

Обратно, если C есть характеристическое многообразие, то можно построить бесконечное множество содержащих это многообразие решений дифференциального уравнения (1) следующим образом: выбираем произвольное многообразие $n-1$ измерений C' , пересекающее C по многообразию S $n-2$ измерений так, чтобы на C' всюду было $\Delta \neq 0$. Через C' проходит однозначно определенная интегральная поверхность J' . Но эта поверхность на основании указанного выше ее построения содержит все характеристические кривые, проходящие через S , а, следовательно, и многообразие C , которое они производят. Тем самым доказательство нашей основной теоремы доведено до конца.

§ 3. Общие дифференциальные уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными

1. Характеристические и фокальные кривые. Рассмотрим общее дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (1)$$

где для сокращения положено $p = u_x$, $q = u_y$. Соответственно нашему постоянному соглашению мы будем предполагать, что F в рассматриваемой области есть непрерывная функция своих пяти аргументов, имеющая непрерывные производные первого и второго порядков по этим аргументам. Мы подчеркиваем еще предположение

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0.$$

Дифференциальное уравнение (1) можно истолковать геометрически в пространстве x, y, u следующим образом (ср. гл. I, § 4): в каждой из рассматриваемых точек x, y, u от направляющих коэффициентов p, q касательной плоскости к интегральной поверхности $u = u(x, y)$ требуется выполнение соотношения $F = 0$. Это уравнение теперь уже не линейно относительно p и q ; поэтому возможные касательные плоскости уже не образуют вообще пучка плоскостей; мы допускаем, что они образуют однопараметрическое семейство и огибают некоторый конус, *конус Монжа*. Следовательно, дифференциальное уравнение относит каждой точке (x, y, u) рассматриваемой части пространства такой конус Монжа; задача интегрирования дифференциального уравнения с частными производными состоит в отыскании таких поверхностей, которые в каждой своей точке касаются соответствующего конуса.

Вместо соотношения $F = 0$ для их касательных плоскостей конусы Монжа можно также охарактеризовать с помощью соотноше-

тельным к интегральной поверхности; так как его проекция на пространство x -ов в силу соотношений (5) тангенциальна к проекции многообразия C на пространство x -ов, то отсюда вытекает, что он сам направлен тангенциально к C .

ния для их образующих. Для того, чтобы получить такое соотношение, вообразим, что конус Монжа $F = 0$ представлен в параметрическом виде, а именно, что p и q выражены в функции параметра λ . В таком случае образующая конуса есть предельное положение линии пересечения двух касательных плоскостей, соответствующих значениям параметра λ и $\lambda + h$, при $h \rightarrow 0$. Если представить себе вдоль образующей координаты x , y , u как функции расстояния s от вершины конуса, то наряду с уравнением

$$\frac{du}{ds} = p(\lambda) \frac{dx}{ds} + q(\lambda) \frac{dy}{ds}$$

обычным приемом получаем еще уравнение

$$0 = p'(\lambda) \frac{dx}{ds} + q'(\lambda) \frac{dy}{ds}.$$

Кроме того, дифференцируя уравнение $F = 0$ по λ , имеем:

$$F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0.$$

Из этих трех уравнений для направлений образующих конуса получается следующее соотношение:

$$dx : dy : du = F_p : F_q : (pF_p + qF_q), \quad (2)$$

которое можно рассматривать как представление конуса Монжа, взаимное дифференциальному уравнению (1).

Направления образующих конуса Монжа, выражаемые формулой (2), мы будем называть *характеристическими направлениями*. В отличие от квазилинейных дифференциальных уравнений, у которых каждой точке соответствует лишь одно характеристическое направление, мы здесь, следовательно, в каждой точке имеем дело с однопараметрической совокупностью характеристических направлений. Пространственные кривые, которые в каждой своей точке имеют характеристическое направление, мы будем называть *фокальными кривыми* или *кривыми Монжа*. Введя на фокальной кривой подходящий параметр s , можно условия (2) для фокальных кривых привести к следующему виду:

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q. \quad (3)$$

Последнее из этих трех дифференциальных уравнений называется *условием полоски*. Оно выражает тот факт, что функции $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $p(s)$, $q(s)$ определяют не только пространственную кривую, но одновременно в каждой ее точке и касательную плоскость. Геометрический образ, состоящий из кривой и из однопараметрической совокупности касательных плоскостей этой кривой, называется *полоской*. Эта система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (3) вместе с соотношением $F(x, y, u, p, q) = 0$ для пяти функций $x, y,$

u, p, q (в их зависимости от s) представляет недоопределенную систему. Каждое решение этой системы дает так называемую *фокальную полоску*¹⁾.

Сущность нашей теории покоится теперь на следующем соображении. На всякой интегральной поверхности $u = u(x, y)$ должны существовать фокальные кривые; в самом деле, в каждой точке интегральная поверхность касается соответствующего конуса Монжа, следовательно, содержит характеристическое направление, и это характеристическое поле направлений дает на интегральной поверхности соответствующие фокальные кривые как линии поля. Мы покажем, что требование, чтобы фокальная кривая уложилась в интегральную поверхность $u = u(x, y)$, приводит к двум дополнительным обыкновенным дифференциальным уравнениям для величин p и q как функций от s . Словом «уложилась» мы хотим сказать, что в окрестности проекции фокальной кривой на плоскость x, y функция u является однозначной, дважды непрерывно дифференцируемой функцией от x и y .

Действительно, если исходить из определенной интегральной поверхности $u = u(x, y)$, на которой тем самым даны также величины $p = u_x, q = u_y$, то дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q$$

определяется на интегральной поверхности однопараметрическое семейство кривых. Вдоль этих кривых, во всяком случае,

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds},$$

а, следовательно,

$$\frac{du}{ds} = pF_p + qF_q.$$

Следовательно, наши кривые на интегральной поверхности образуют семейство кривых Монжа и производят эту интегральную поверхность. Из дифференциального уравнения с частными производными дифференцированием по x и по y получаем следующие соотношения, выполняющиеся на нашей интегральной поверхности тождественно в x и y :

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u p + F_x = 0,$$

$$F_p p_y + F_q q_y + F_u q + F_y = 0.$$

1) Для того, чтобы эти четыре условия для фокальной полоски дополнить до полной системы, можно еще предписать произвольное соотношение между x, y, u , следовательно, потребовать, чтобы фокальная кривая лежала на заданной поверхности. (Заметим, что, вообще говоря, полоска не будет касаться этой поверхности.) Легко усмотреть, что на заданной поверхности существует вообще однопараметрическое семейство фокальных кривых.

Возьмем теперь любую из наших кривых Монжа, лежащих на интегральной поверхности, с параметром s ; в силу уравнений $F_p = \frac{dx}{ds}$, $F_q = \frac{dy}{ds}$, $p_y = q_x$ последние два соотношения переходят в равенства

$$\frac{dp}{ds} + F_u p + F_x = 0, \quad \frac{dq}{ds} + F_u q + F_y = 0,$$

выполняющиеся вдоль рассматриваемых фокальных кривых. Следовательно, если кривая Монжа уложена на интегральной поверхности, то координаты x , y , и ее точек и величины p и q вдоль нее удовлетворяют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p, & \frac{dy}{ds} &= F_q, & \frac{du}{ds} &= pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{ds} &= -(pF_u + F_x), & \frac{dq}{ds} &= -(qF_u + F_y). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эта система называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, принадлежащей уравнению (1).

Обратим теперь порядок рассмотрения, отвлекаясь от того, что эта система обыкновенных дифференциальных уравнений получена, исходя из интегральной поверхности, существование которой мы предположили; напротив, примем за исходный пункт систему (4) без ссылки на решения уравнения (1). Так как аддитивная постоянная в параметре s не имеет значения, эта система определяет *четырехпараметрическое семейство кривых* $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ с отнесенными им касательными плоскостями $p(s)$, $q(s)$, т. е. многообразие полосок.

Заметим: *функция F есть интеграл нашей характеристической системы дифференциальных уравнений*, т. е. вдоль каждого решения этой системы функция F сохраняет постоянное значение¹⁾. Действительно, для такого решения

$$\frac{dF}{ds} = F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds},$$

а выражение справа, в силу характеристических дифференциальных уравнений, равно нулю тождественно относительно s .

Выделим теперь из четырехпараметрического семейства решений характеристических дифференциальных уравнений семейство с тремя параметрами при помощи условия, чтобы функция F имела на этих решениях не любое постоянное значение, а именно значение нуль, в соответствии с исходным дифференциальным уравнением с частными производными²⁾.

¹⁾ По поводу этого значения слова «интеграл», которое не следует смешивать со значением: интеграл-решение, ср. гл. I, § 5, стр. 36.

²⁾ Отсутствие этого ограничения означало бы одновременное рассмотрение всех дифференциальных уравнений $F = \text{const.}$

Всякое решение характеристических дифференциальных уравнений, удовлетворяющее, сверх того, уравнению $F = 0$, мы будем называть «характеристической полоской»; пространственная кривая $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, несущая такую полоску, называется характеристической кривой.

Как и в квазилинейном случае, из вывода характеристических дифференциальных уравнений вытекают следующие теоремы:

На всякой интегральной поверхности существует однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полосок.

Если характеристическая полоска имеет общий элемент (т. е. общие значения x , y , u , p , q) с интегральной поверхностью, то эта полоска принадлежит полностью упомянутой интегральной поверхности.

Важнейший результат в теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка состоит в том, что задача интегрирования нашего дифференциального уравнения с частными производными (1) эквивалентна задаче интегрирования характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4), т. е. интегрирование дифференциального уравнения с частными производными (1) можно привести к интегрированию характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Решение задачи Коши. Для доказательства мы, по аналогии с §§ 1 и 2, построим интегральные поверхности с помощью характеристических полосок. Мы снова формулируем для нашего дифференциального уравнения с частными производными задачу Коши, что целесообразно сделать в следующем виде: с помощью функций $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$ задана начальная полоска C_1 с проекцией C_0 (на плоскость x , y), свободной от двойных точек, причем для C_1 выполняется тождественно относительно t :

1. Условие полоски

$$\frac{du}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt},$$

2. $F = 0$.

Такая полоска C_1 называется интегральной полоской¹⁾). Задача Коши состоит теперь в том, чтобы в окрестности C_0 найти такую функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет в этой окрестности дифференциальному уравнению и на C_0 (совместно с $p = u_x$, $q = u_y$) принимает заданные ранее значения, т. е. требуется построить интегральную поверхность, содержащую начальную полоску C_1 .

1) При постановке задачи можно было бы сначала считать заданной лишь начальную кривую и дополнительно определить начальные значения величин p и q с помощью соотношения полоски и уравнения $F = 0$; однако, выбранная здесь форма задачи Коши заслуживает предпочтения, так как при ней мы избегаем несущественного для настоящей задачи исследования уравнений, получающихся для p и q .

Для решения задачи Коши представим себе, что через каждый начальный элемент этой заданной полоски проведена характеристическая полоска с текущим параметром s , т. е. такое решение характеристических дифференциальных уравнений (4), которое при $s=0$ переходит в $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$. Эту систему решений мы обозначим через $x(s, t)$, $y(s, t)$, $u(s, t)$, $p(s, t)$, $q(s, t)$.

Известные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивают единственность этих решений и существование у них непрерывных производных по s и по t . Если выражение

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = F_p y_t - F_q x_t \quad (5)$$

отлично от нуля вдоль нашей начальной полоски, а, следовательно, и в некоторой ее окрестности (т. е. в некоторой области значений s и t), то в этой окрестности можно ввести в качестве независимых переменных вместо параметров t и s величины x и y и, следовательно, величины u , p , q выразить как функции от x и y ; в частности, мы получаем поверхность $u = u(x, y)$. Мы утверждаем, что на этой поверхности $p = u_x$ и $q = u_y$ и что эта поверхность является интегральной поверхностью, а следовательно, решает нашу задачу Коши.

Последний факт сделается понятным сам собой, как только мы установим, что на нашей поверхности $p = u_x$, $q = u_y$; в самом деле, так как F есть интеграл системы (4), то в силу второго начального условия величина $F(x, y, u, p, q)$ обращается на нашей поверхности в нуль тождественно относительно s и t , а следовательно, и относительно x и y .

Остается, следовательно, показать, что $p = u_x$ и $q = u_y$. Для этого достаточно убедиться, что обе величины

$$\left. \begin{array}{l} U = u_t - p x_t - q y_t, \\ V = u_s - p x_s - q y_s \end{array} \right\} \quad (6)$$

тождественно исчезают на нашей поверхности. Действительно, соотношения

$$\left. \begin{array}{l} 0 = u_t - u_x x_t - u_y y_t, \\ 0 = u_s - u_x x_s - u_y y_s, \end{array} \right\} \quad (7)$$

несомненно, справедливые, можно рассматривать как систему линейных уравнений для u_x , u_y . Так как определитель этой системы $x_t y_s - x_s y_t = -\Delta$, по предположению, не равен нулю, то из $U = V = 0$ и системы (7) вытекало бы $p = u_x$, $q = u_y$.

Исчезание величины V есть очевидное следствие характеристических дифференциальных уравнений. Для того, чтобы доказать, что $U = 0$, будем рассматривать U и V как функции от s и t . Имеем тождество:

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial t} = -(p_s x_t - p_t x_s + q_s y_t - q_t y_s).$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, так как V тождественно исчезает, и подставляя сюда выражения для x_s, y_s, p_s, q_s из характеристических дифференциальных уравнений (4), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = p_t F_p + q_t F_q + (px_t + qy_t) F_u + F_x x_t + F_y y_t.$$

С другой стороны, из соотношения $F = 0$, тождественного относительно s и t , дифференцируя по t , имеем:

$$p_t F_p + q_t F_q + u_t F_u + x_t F_x + y_t F_y = 0,$$

а, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -F_u U. \quad (8)$$

Это уравнение при фиксированном значении t представляет собой однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для U как функции от s . Так как U при $s = 0$ исчезает (на основании первого начального условия), то величина U равна нулю для всех значений s в силу того, что решение обыкновенного дифференциального уравнения для функции $U(s)$ определяется однозначно ее начальным значением $U(0)^1$. Тем самым требуемое доказательство доведено до конца. Вследствие того, что решения обыкновенных дифференциальных уравнений однозначно определяются своими начальными значениями, интегральная поверхность, полученная при помощи нашего построения, также определена однозначно.

Полученный нами результат можно резюмировать следующим образом:

Пусть $C: x = x(t), y = y(t), u = u(t)$ — заданная пространственная кривая, которая совместно с заданными функциями $p(t), q(t)$ образует начальную полоску $C_1(x, y, u, p, q)$, удовлетворяющую условию полоски и соотношению $F = 0$, и пусть вдоль этой полоски $\Delta = F_p y_t - F_q x_t \neq 0$; в таком случае в некоторой ее окрестности существует одна и только одна интегральная поверхность $u(x, y)$, содержащая эту начальную полоску.

3. Характеристики как элементы разветвления. Дополнительные замечания. Интегральный коноид. Остается еще выяснить значение того исключительного случая, который характеризуется равенством $\Delta = 0$. Если для начальной полоски C_1 , лежащей на интегральной поверхности $u(x, y)$, всюду $F_p y_t - F_q x_t = 0$, то на основании стр. 82 C_1 должна быть характеристической полоской на этой интегральной поверхности. Поэтому в исключительном случае $\Delta = 0$ через кривую C может проходить интегральная поверхность лишь в том случае, если кривая C — характеристическая, т. е. функции p и q , присое-

¹⁾ Или же в силу равенства

$$U(s) = U(0) e^{-\int_0^s F_u ds}.$$

диненные при помощи условий 1 и 2, дополняют эту кривую до характеристической полоски. Если это условие выполнено, то через начальную полоску проходит не только одна, но бесконечное множество интегральных поверхностей, которые, следовательно, касаются друг друга вдоль этой начальной полоски. В самом деле, рассмотрим кривую C' , пересекающую кривую C и дополненную до начальной полоски таким образом, что эта начальная полоска в общей точке касается характеристической полоски, принадлежащей кривой C ; в таком случае задача Коши для C' дает интегральную поверхность, которая содержит всю характеристическую полоску, принадлежащую кривой C , так как эта интегральная поверхность имеет общий элемент с характеристической полоской.

Таким образом, характеристические кривые на интегральной поверхности — это такие линии, вдоль которых касаются друг друга различные интегральные поверхности. Поэтому эти кривые и соответственно полоски можно рассматривать как *элементы разветвления интегральных поверхностей*. При переходе такой линии можно, не нарушая условия непрерывности первых производных функции u , вместо первоначальной интегральной поверхности продолжать двигаться по любой другой из семейства интегральных поверхностей, касающихся по этой линии.

Резюмируя, мы имеем следующие два случая задачи Коши: *Если $\Delta \neq 0$ для начальной полоски C_1 , то задача Коши имеет единственное решение. Если же, вдоль C_1 , $\Delta = 0$, то задача Коши имеет решение лишь в том случае, если начальная полоска C_1 — характеристическая; в этом случае существует бесконечное множество решений.*

В заключение еще одно замечание об исключительном случае $\Delta = 0$. Если начальная полоска C_1 не удовлетворяет дополнительному условию (быть характеристической), то C_1 , как легко видеть, является лишь фокальной полоской; в этом случае через полоску C_1 не может проходить никакое решение задачи Коши, т. е. *никакая интегральная поверхность, которая содержала бы эту начальную полоску и в ее окрестности имела бы непрерывные производные до второго порядка*. Мысленно, однако, существование такой интегральной поверхности, для которой C является особой линией. Действительно, если через каждый элемент (x, y, u, p, q) полоски C_1 , как начальный элемент, проведем характеристическую полоску, то такое же рассуждение, как и раньше, покажет, что эти полоски (соответственно — их кривые) образуют интегральную поверхность, если все они не совпадают — в случае характеристической полоски C_1 .

На этой интегральной поверхности кривая C должна быть особой линией и представлять собой огибающую характеристических кривых, производящих эту поверхность. Можно ожидать, что она является ребром возврата интегральной поверхности или что, во всяком случае, в окрестности проекции кривой C на плоскость x, y уже невозможно определить решение u как однозначную функцию от x и y .

Эти факты мы подтверждим на примерах (ср. § 6 и пример, рассмотренный в § 1 для случая квазилинейного дифференциального уравнения). В теории распространения света *характеристики окажутся световыми лучами*, поэтому *каустические (фокальные) линии* этих лучей окажутся *фокальными кривыми*, что оправдывает этот термин.

Отметим еще один особый предельный случай задачи Коши, именно — тот случай, когда начальная кривая стягивается в точку. Точно такие же рассуждения, как и выше, приводят к следующему результату:

Совокупность характеристических кривых, проходящих через заданную точку P пространства (x, y, u) , образует интегральную поверхность.

Эта интегральная поверхность, имеющая в точке P особую точку конического типа (с конусом Монжа в качестве касательного конуса), называется *интегральным коноидом дифференциального уравнения с частными производными* в точке P . В теории распространения света, как мы увидим впоследствии, он играет особенно важную роль как световой конус.

Наконец, еще одно замечание о существенном различии положения дел в квазилинейном и в общем нелинейном случае (то же замечание справедливо впрочем и при n независимых переменных): в линейном и квазилинейном случае для построения решения достаточно рассмотрения характеристических кривых, которые образуют двухпараметрическое (соответственно — n -параметрическое) семейство. В общем же случае для достижения этой цели мы вынуждены, с помощью присоединения величин p, q , перейти к характеристическим полоскам, носителями которых являются характеристические кривые. Эти полоски образуют уже трехпараметрическое [соответственно $(2n - 1)$ -параметрическое] многообразие, и то же самое справедливо и для их характеристических несущих кривых.

§ 4. Связь с теорией полного интеграла.

Выше, в гл. I, § 4, п. 2 мы видели, что, имея зависящий от двух параметров a и b полный интеграл $u = \varphi(x, y, a, b)$ дифференциального уравнения $F = 0$, можно получить семейство решений дифференциального уравнения, зависящее от произвольной функции. Мы пользовались для этой цели процессом нахождения огибающей, полагая $b = w(a)$ и представляя себе, что из двух уравнений

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, w(a)), \\ 0 &= \varphi_a + \varphi_b w'(a) \end{aligned}$$

исключена величина a . Эти два уравнения дают представление зависящего еще от параметра a многообразия кривых, по которым интегральные поверхности касаются своей огибающей. Так как функцию $w(a)$ можно выбрать так, чтобы она в определенной точке a