Эти факты мы подтвердим на примерах (ср. § 6 и пример, рассмотренный в § 1 для случая квазилинейного дифференциального уравнения). В теории распространения света *характеристики окажутся световыми лучами*, поэтому *каустические* (*фокальные*) *линии* этих лучей окажутся *фокальными кривыми*, что оправдывает этот термин.

Отметим еще один особый предельный случай задачи Коши, именно — тот случай, когда начальная кривая стягивается в точку. Точно такие же рассуждения, как и выше, приводят к следующему результату:

Совокупность характеристических кривых, проходящих через заданную точку P пространства (x, y, u), образует интегральную поверхность.

Эта интегральная поверхность, имеющая в точке P особую точку конического типа (с конусом Монжа в качестве касательного конуса), называется *интегральным коноидом дифференциального уравнения с частными производными* в точке P. В теории распространения света, как мы увидим впоследствии, он играет особенно важную роль как световой конус.

Наконец, еще одно замечание о существенном различии положения дел в квазилинейном и в общем нелинейном случае (то же замечание справедливо впрочем и при n независимых переменных): в линейном и квазилинейном случае для построения решения достаточно рассмотрения характеристических кривых, которые образуют двухпараметрическое (соответственно — n-параметрическое) семейство. В общем же случае для достижения этой цели мы вынуждены, с помощью присоединения величин p, q, перейти к характеристическим полоскам, носителями которых являются характеристические кривые. Эти полоски образуют уже трехпараметрическое [соответственно $(2n-1)$-параметрическое] многообразие, и то же самое справедливо и для их характеристических несущих кривых.

§ 4. Связь с теорией полного интеграла.

Выше, в гл. I, § 4, п. 2 мы видели, что, имея зависящий от двух параметров a и b полный интеграл $u=\varphi(x, y, a, b)$ дифференциального уравнения $F=0$, можно получить семейство решений дифференциального уравнения, зависящее от произвольной функции. Мы пользовались для этой цели процессом нахождения огибающей, полагая $b=w(a)$ и представляя себе, что из двух уравнений

$$u=\varphi(x, y, a, w(a)),$$
$$0=\varphi_a+\varphi_b w'(a)$$

исключена величина a. Эти два уравнения дают представление зависящего еще от параметра a многообразия кривых, по которым интегральные поверхности касаются своей огибающей. Так как функцию $w(a)$ можно выбрать так, чтобы она в определенной точке a

принимала произвольное значение b и чтобы производная $w'(a)$ получала любое значение c, то система уравнений

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{1}$$

$$0 = \varphi_a + c\varphi_b \tag{1a}$$

представляет зависящее от трех параметров a, b, c семейство кривых, которые могут оказаться кривыми касания при образовании огибающей.

Покажем теперь, что *кривые семейства* (1) *являются характеристическими кривыми нашего дифференциального уравнения*. Отсюда уже само собой будет вытекать, что полоски, получающиеся присоединением функций $p = \varphi_x(x, y, a, b)$, $q = \varphi_y(x, y, a, b)$, являются характеристическими полосками.

Доказательство вытекает непосредственно из того факта, что вдоль нашей кривой касаются две различные интегральные поверхности, что, как мы видели в § 3, возможно лишь вдоль характеристической полоски.

Впрочем это утверждение нетрудно доказать и аналитически. Если вдоль нашей кривой вместо s принять x за независимую переменную, то, дифференцируя уравнение (1a) по x, имеем:

$$0 = \varphi_{ax} + c\varphi_{bx} + y_x(\varphi_{ay} + c\varphi_{by}). \tag{2}$$

Далее, дифференцируем уравнение $F = 0$ по a и по b, учитывая $u = \varphi(x, y, a, b)$:

$$\left.\begin{aligned} F_u\varphi_a + F_p\varphi_{ax} + F_q\varphi_{ay} = 0, \\ F_u\varphi_b + F_p\varphi_{bx} + F_q\varphi_{by} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Умножая второе из этих уравнений на c и складывая с первым, принимая во внимание уравнения (1a) и (2), получим[1]): $F_p y_x - F_q = 0$. На основании соображений стр. 82 из этого равенства и вытекает, что наши кривые являются характеристическими. При этом предполагается, отметим это здесь еще раз, что в рассматриваемой области

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0.$$

Итак, коль скоро известен полный интеграл дифференциального уравнения с частными производными, система двух уравнений (1) даст нам трехпараметрическое семейство характеристических кривых и соответственно полосок; то обстоятельство, что мы выбрали за независимое переменное x вместо того, чтобы пользоваться симметрическим представлением с помощью параметра s, несущественно. Таким образом, мы обратили тот процесс, который рассмотрен в § 3, а именно, мы теперь *получили решения характеристических дифференциальных уравнений из полного решения дифференциального*

---

[1]) Точнее, получим $(\varphi_{ay} + c\varphi_{by})(F_q - F_p y_x) = 0$. Но если положить $\varphi_{ay} + c\varphi_{by} = 0$, то отсюда, принимая во внимание (1a) и (2), вытекало бы, что ранг матрицы M (стр. 32), противно сделанному там предположению, меньше двух. (*Прим. перев.*)

уравнения в частных производных. В § 8 мы еще раз подробно остановимся на этой точке зрения, которая противоположна исходной.

Что таким образом мы получим все характеристики и соответственно все решения дифференциального уравнения с частными производными, следует немедленно, если предположим, что для всякой заданной интегральной поверхности, для которой $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, в каждой точке можно определить индивидуальную поверхность семейства $u = \varphi(x, y, a, b)$, касающуюся ее в этой точке.

Наконец, еще одно замечание о роли особого решения. Согласно гл. I, § 4, п. 3 мы получаем такое решение методом образования огибающей двухпараметрического семейства $u = \varphi(x, y, a, b)$ или, не прибегая к специальному полному интегралу, путем исключения величин p и q из уравнений

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Для особого решения все соображения § 4 отпадают, ибо там всегда предполагалось, что на интегральных поверхностях выполняется соотношение $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Исключительный характер особого решения выражается, между прочим, и в том, что на нем характеристическое начальное условие

$$\Delta = F_p \frac{dy}{dt} - F_q \frac{dx}{dt} = 0$$

удовлетворяется тождественно, какую бы начальную кривую мы ни выбрали на этом решении. В этом смысле всякая начальная полоска, лежащая на особом решении, является характеристической.

§ 5. Фокальные кривые и уравнение Монжа

На стр. 80 мы представили фокальные кривые с помощью системы дифференциальных уравнений (3), причем величины p, q были еще подчинены дополнительному условию $F(x, y, u, p, q) = 0$. Если ввести, в предположении $F_p \neq 0$, вместо s просто x в качестве параметра на кривой, то получим следующие три уравнения:

$$F = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F_q}{F_p}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{pF_p + qF_q}{F_p}. \tag{1}$$

Если исключить из этих уравнений p и q, то получится одно обыкновенное дифференциальное уравнение для двух неизвестных функций y и u

$$M\left(x, y, u, \frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением Монжа.* Это — простейший *пример недоопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*; это уравнение представляет собой условие для направлений образующих конуса Монжа в точке