вестен полный интеграл $u = \varphi(x, y, a, b)$ дифференциального уравнения с частными производными, эквивалентного уравнению Монжа. Два уравнения

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, w(a)), \\ 0 &= \varphi_a(x, y, a, w(a)) + \varphi_b(x, y, a, w(a))\, w'(a) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

дают соответствующую каждому значению параметра a характеристическую кривую, лежащую на интегральной поверхности, определенной значением $b = w(a)$ (ср. стр. 88). К этим двум надо только прибавить еще одно уравнение, получающееся вторичным дифференцированием по a:

$$0 = \varphi_{aa} + 2\varphi_{ab} w'(a) + \varphi_{bb} w'^2(a) + \varphi_b w''(a). \tag{4}$$

Полученные три уравнения (3) — (4) представляют в параметрической форме, с помощью параметра a, пространственную кривую, а именно, огибающую характеристик. Они и дают искомое решение, если представить себе, что u и y путем исключения a выражены из этих уравнений как функции от x.

§ 6. Примеры

Развитую нами теорию мы поясним на ряде примеров. Некоторые из этих примеров важны и сами по себе.

1. Дифференциальное уравнение $(\operatorname{grad} u)^2 = 1$. Рассмотрим дифференциальное уравнение для функции $u(x, y)$:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \tag{1}$$

и соответственно уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{2}$$

для функции $u(x, y, z)$. Они выражают тот факт, что модуль градиента функции u равен единице.

Эти дифференциальные уравнения интересны и сами по себе благодаря своему значению в геометрической оптике. Именно, решения u описывают возможные состояния распространения света в однородной среде, причем поверхности $u = \text{const}$ — это *волновые поверхности*, а характеристики — *световые лучи*. Более общее дифференциальное уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n(x, y, z) \tag{3}$$

описывает распространение света в неоднородной среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z)$, зависящим от положения точки.

Рассмотрим сначала случай двух независимых переменных, для которого мы уже получили в гл. I, § 3 полный интеграл

$$u = ax + \sqrt{1 - a^2}\, y + b. \tag{4}$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1-a^2}\,y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,y + w'(a) \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

дают решение, содержащее еще произвольную функцию.

Присоединяя к двум уравнениям

$$u = ax + \sqrt{1-a^2}\,y + b,$$

$$0 = x - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,y + c$$

соответствующие соотношения

$$p = a, \quad q = \sqrt{1-a^2},$$

получаем зависящее от трех параметров a, b, c многообразие характеристических полосок, вдоль которых рассматриваем, скажем, x как независимую переменную. Отсюда мы узнаем, что характеристические кривые, «световые лучи», являются прямыми линиями и что вдоль каждой из этих прямых соответствующая касательная плоскость остается постоянной. Как характеристические прямые, так и соответствующие плоскости наклонены к плоскости x, y под углом в 45° и этим обстоятельством они характеризуются. Конус Монжа в точке x_0, y_0, u_0 имеет, очевидно, следующее уравнение:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (u-u_0)^2.$$

Характеристические дифференциальные уравнения, которые решаются написанным выше соотношением, можно записать в виде следующей пропорции:

$$dx : dy : du : dp : dq = p : q : 1 : 0 : 0; \tag{5}$$

их можно, очевидно, тотчас проинтегрировать:

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad u = s + u_0, \quad x = p_0 s + x_0, \quad y = q_0 s + y_0,$$

причем через x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 обозначены соответствующие начальные значения при значении параметра $s = 0$.

Уравнение Монжа для функций $u(x)$, $y(x)$, соответствующее нашему дифференциальному уравнению с частными производными, получится путем исключения величин p и q из соотношения $p^2 + q^2 = 1$, $y' = \frac{q}{p}$, $u' = \frac{1}{p}$ в следующем виде:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1. \tag{6}$$

Решения этого уравнения представляют те кривые, касательные к которым всюду наклонены к плоскости x, y под углом в 45°. Эти *фокальные кривые* или «*каустические линии*» можно представить с помощью

произвольной функции $w(a)$ в следующем виде, не содержащем процессов интегрирования[1]):

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1-a^2}\,y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,y + w'(a), \\ 0 &= -\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^3}}\,y + w''(a). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

С помощью этих фокальных кривых можно охарактеризовать решения дифференциального уравнения (1) — кроме плоскостей (4) и интегральных коноидов, в данном случае круговых конусов, образующие которых наклонены к плоскости x, y под углом в 45°, — как развертывающиеся поверхности, ребро возврата которых есть фокальная кривая, следовательно, кривая, касательные к которой составляют с плоскостью x, y постоянный угол в 45°.

Решения уравнения (1) имеют еще одно важное геометрическое значение. Рассмотрим семейство кривых $u(x, y) = c = \text{const.}$ в плоскости x, y; мы утверждаем, что *значение функции $u(x, y)$ в любой точке плоскости равно расстоянию этой точки от кривой $u(x, y)=0$.* Кривые $u(x, y) = c$ являются по отношению к этой кривой эквидистантными параллельными кривыми на расстоянии c от нее; ортогональные траектории этого семейства кривых — прямые линии (а именно, проекции наших характеристических кривых), и огибающая этих прямых, общая эволюта кривых $u = \text{const.}$, есть проекция ребра возврата, т. е. фокальной кривой.

Для доказательства этого факта решим задачу Коши для какой-нибудь данной начальной кривой $G(x_0, y_0) = 0$, причем вдоль этой кривой предписано начальное условие $u = 0$. Решение этой задачи мы построим по методу характеристик, для чего рассмотрим характеристики, проходящие через точки (x_0, y_0): $x = p_0 s + x_0$, $y = q_0 s + y_0$, $u = s$, и их проекции. В силу того, что $p_0^2 + q_0^2 = 1$, параметр s означает расстояние точки (x, y) этих характеристических проекций от точки (x_0, y_0). Для определения p_0 и q_0 заметим, что из начального условия вытекает: $0 = \frac{du}{dx_0} = p_0 + q_0 \frac{dy_0}{dx_0}$, если вдоль начальной кривой выбрать x_0 за независимый параметр. Следовательно, $p_0 G_{y_0} - q_0 G_{x_0} = 0$, и вышеупомянутая прямая (характеристическая проекция) ортогональна начальной кривой. Следовательно, u есть действительно расстояние точки (x, y) от начальной кривой, по крайней мере в достаточно малой окрестности этой кривой. Что всякая кривая $u = \text{const.}$ ортогональна нашим прямым, вытекает непосредственно из изложенных выше соображений.

---

[1]) Предоставим читателю, в виде задачи, проверить это представление непосредственным вычислением.

Несколько иной ход доказательства получается, если считать заданными кривые $u = \text{const}$. и исходить из задачи о нахождении ортогональных траекторий этих кривых. Для этих ортогональных траекторий имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = u_x, \qquad \frac{dy}{ds} = u_y, \tag{8}$$

откуда, возвышая в квадрат и складывая, получаем:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1; \tag{9}$$

следовательно, s есть длина дуги на траекториях. Далее, дифференцируя первое из уравнений (8) по s и учитывая в правой части снова те же дифференциальные уравнения (8), приходим к уравнению $\frac{d^2x}{ds^2} = u_{xx}u_x + u_{xy}u_y$. Но правая часть тождественно равна нулю, что выясняется, если продифференцировать по x исходное дифференциальное уравнение (1). Точно таким же путем получается $\frac{d^2y}{ds^2} = 0$; следовательно, ортогональные траектории — прямые линии.

Точно таким же образом обнаруживают в случае трех независимых переменных, что решения дифференциального уравнения с частными производными (2) представляют семейство эквидистантных поверхностей $u(x, y, z) = \text{const.}$, параллельных произвольно заданной начальной поверхности $G(x, y, z) = 0$. Эти поверхности имеют прямолинейные ортогональные траектории, и отрезок этих прямых линий между поверхностями $u = c_1$ и $u = c_2$ имеет постоянную длину $c_1 - c_2$; сама функция u есть расстояние точки (x, y, z) от начальной поверхности.

2. $F(u_x, u_y) = 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$p \cdot q = \frac{1}{2} \quad (p = u_x, \ q = u_y)\ ^{1)}. \tag{10}$$

Эквивалентное уравнение Монжа для функций $y(x)$ и $u(x)$ имеет вид

$$u'^2 = 2y'. \tag{11}$$

Полный интеграл, содержащий все поверхностные элементы дифференциального уравнения, имеет вид

$$u = ax + \frac{1}{2a}y + b. \tag{12}$$

---

[1]) При помощи преобразования (вращения) $\xi = u$, $\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $\omega = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ наше дифференциальное уравнение приводится к виду $\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 = 1$ с неизвестной функцией $\omega(\xi, \eta)$; его можно решить аналогично уравнению (1) п. 1.

Отсюда получается семейство решений, зависящее от произвольной функции $w(a)$:

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + \frac{1}{2a}y + w(a), \\ 0 &= x - \frac{1}{2a^2}y + w'(a) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(по исключении a); наконец, присоединяя еще уравнение

$$0 = \frac{1}{a^3}y + w''(a), \tag{13a}$$

получим не содержащее уже процессов интеграции представление фокальных кривых с помощью произвольной функции w.

Уравнения

$$u = ax + \frac{1}{2a}y + b,$$
$$0 = x - \frac{1}{2a^2}y + c$$

с тремя параметрами a, b, c и с величиной, скажем, x в качестве независимой переменной дают совокупность характеристик. Характеристические дифференциальные уравнения:

$$dx : dy : du : dp : dq = q : p : 1 : 0 : 0. \tag{14}$$

Следовательно, и на этот раз характеристики — прямые линии, и соответствующие касательные плоскости остаются постоянными вдоль всей прямой, причем $pq = \frac{1}{2}$. Уравнения характеристических прямых:

$$y = \frac{p_0}{q_0}x + y_0, \qquad u = \frac{1}{q_0}x + u_0. \tag{15}$$

В заключение решим задачу Коши для начальной функции $u(0, y_0) = u_0 = v(y_0)$, заданной произвольно в плоскости $x = 0$. Немедленно получаем:

$$q(0, y_0) = v'(y_0), \qquad p(0, y_0) = \frac{1}{2v'(y_0)};$$

следовательно, уравнения

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{v'(y_0)}x + v(y_0), \\ y &= \frac{1}{2[v'(y_0)]^2}x + y_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

дают решение задачи Коши, причем надо себе представить, что y_0 выражено из второго уравнения через x и y и подставлено в первое. Сравнение с найденным выше решением

$$u = 2ax + aw'(a) + w(a),$$
$$y = 2a^2x + 2a^2w'(a)$$

показывает, что оба решения, действительно, переходят друг в друга следующим образом: вводим вместо a новый параметр y_0 с помощью

равенства $y_0 = 2a^2 w'(a)$, а затем определяем новую функцию $v(y_0)$ вместо $w(a)$ равенством

$$v(y_0) = [aw(a)]' = aw'(a) + w(a).$$

В силу соотношений

$$\frac{dy_0}{da} = 2a[2w'(a) + aw''(a)] = 2a[aw(a)]'',$$

$$v'(y_0) = \frac{dv(y_0)}{dy_0} = [aw(a)]'' \frac{da}{dy_0} = \frac{1}{2a},$$

$$\frac{1}{2[v'(y_0)]^2} = 2a^2,$$

оба решения переходят теперь друг в друга.

Оба рассмотренных выше примера являются частными случаями более общего дифференциального уравнения

$$F(u_x, u_y) = 0, \tag{17}$$

у которого мы имеем совершенно аналогичную ситуацию. Из характеристических дифференциальных уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = F_p : F_q : (pF_p + qF_q) : 0 : 0, \tag{18}$$

как и выше, обнаруживается, что характеристические полоски состоят из прямых линий с соответствующей каждой из них одной лишь касательной плоскостью и что вследствие этого решения дифференциального уравнения (17) представляют развертывающиеся поверхности. Этот последний факт станет еще яснее, если заметить, что возможно построить полный интеграл, состоящий из одних лишь плоскостей. Для этой цели представим себе, что уравнение $F(p, q) = 0$ удовлетворяется двумя функциями $p(a)$ и $q(a)$ параметра a. В таком случае имеем полный интеграл

$$u = p(a)x + q(a)y + b,$$

состоящий, действительно, из одних только плоскостей.

3. Дифференциальное уравнение Клеро[1]). Далее рассмотрим снова дифференциальное уравнение Клеро

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \tag{19}$$

В гл. I, § 4, п. 4 мы нашли в качестве полного интеграла семейство плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b). \tag{20}$$

Решения, получаемые из полного интеграла путем образования огибающей:

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + w(a)y + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + w'(a)y + f_a + f_b w'(a), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

представляют развертывающиеся поверхности. Точно так же выясняем, что все интегральные поверхности, возникающие путем, так сказать,

---

[1]) Ср. также гл. I, § 4, п. 4 и § 6, п. 3.

«нанизывания» характеристик, являются развертывающимися поверхностями; действительно, из характеристических дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} dx:dy:du=(x+f_p):(y+f_q):(px+qy+pf_p+qf_q),\\ dp=dq=0 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

узнаем, как и выше (ср. п.п. 1 и 2), что характеристические полоски являются прямыми линиями с принадлежащей каждой из них одной лишь касательной плоскостью.

Особое решение дифференциального уравнения (19) мы рассмотрели уже в гл. I, §§ 4 и 6; его можно получить в предположении, что $f_{aa}f_{bb}-f_{ab}^2\neq 0$, вычисляя a и b из уравнений

$$x=-f_a, \qquad y=-f_b$$

и подставляя в уравнение

$$u=ax+by+f(a, b);$$

в касательных координатах ξ, η, ω оно имеет простой вид

$$\omega=-f(\xi, \eta). \qquad (23)$$

Общее решение можно теперь очень просто охарактеризовать его отношением к особому решению. Мы замечаем, что плоскости полного интеграла являются касательными плоскостями особого решения, а характеристики — его касательными прямыми. Отсюда вытекает, что общее решение дифференциального уравнения Клеро дает те развертывающиеся поверхности, которые касаются особого решения. Задачу Коши можно теперь просто решить, определяя сначала плоскости, касающиеся одновременно начальной кривой и особого решения, и найдя затем их огибающую.

Непосредственно из дифференциального уравнения можно извлечь тот факт, что конус Монжа есть касательный конус из рассматриваемой точки к особому решению. *Конус Монжа является здесь одновременно интегральным коноидом*[1]).

4. Дифференциальное уравнение поверхностей каналов. Поучительный пример представляет дифференциальное уравнение поверхностей каналов

$$u^2(p^2+q^2+1)=1, \qquad (24)$$

выведенное уже в гл. I, § 4, п. 4. Для этого уравнения семейство сфер

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1 \qquad (25)$$

дает полный интеграл. Геометрически сразу получается, что характеристиками являются окружности больших кругов этих сфер, параллельных оси u.

---

[1]) Соображения этого пункта справедливы и для дифференциального уравнения

$$F(p, q, u-xp-yq)=0,$$

лишь формально более общего.

Аналитически этот факт получается из характеристических дифференциальных уравнений

$$dx : dy : du : dp : dq = u^2p : u^2q : (1 - u^2) : \left(-\frac{p}{u}\right) : \left(-\frac{q}{u}\right), \quad (26)$$

из которых вытекает:

$$d(x + up) = d(y + uq) = d\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Отсюда

$$x - a = -up, \qquad y - b = -uq, \qquad p = cq,$$

где a, b, c — постоянные интегрирования. Из этих уравнений и из соотношения $u^2(p^2 + q^2) = 1 - u^2$ теперь, действительно, получаются уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1$ и $\frac{x - a}{y - b} = c$, а следовательно, характеристическими кривыми являются упомянутые выше окружности. Далее, из пропорций $(x - a) : (y - b) : u = p : q : (-1)$ вытекает, что нормали к соответствующим касательным плоскостям направлены к центру окружности.

Дальнейшими интегральными поверхностями являются огибающие однопараметрических семейств сфер радиуса 1, центр которых движется по кривой в плоскости x, y. Если эта кривая, осевая линия поверхности канала, имеет кривизну, меньшую, чем единичная окружность, то поверхность канала будет, действительно, иметь форму канала, трубки. В этом случае характеристические окружности на ней не имеют огибающей. Если же радиус кривизны осевой линии меньше единицы, то упомянутая выше интегральная поверхность, огибающая однопараметрического семейства сфер, про которую можно также сказать, что она образована подходящим многообразием характеристических окружностей, имеет ребро возврата. Эти ребра возврата суть фокальные кривые нашего дифференциального уравнения. Проекция фокальной кривой на плоскость x, y является в этом случае эволютой осевой линии нашего «канала».

Рекомендуется наглядно пояснить эти взаимоотношения на конкретном примере и на модели.

5. Соотношение однородности. В качестве последнего примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, а именно — *условие однородности* (ср. гл. I, § I, п. 2, пример 6):

$$px + qy = hu, \quad (27)$$

где h — постоянная. Характеристические дифференциальные уравнения

$$dx : dy : du = x : y : hu \quad (28)$$

имеют интегралы

$$\frac{u}{x^h} = a, \qquad \frac{x}{y} = b. \quad (29)$$

Общее решение дифференциального уравнения можно, следовательно, записать с помощью произвольной функции W в виде

$$u = x^h W\left(\frac{y}{x}\right)$$

или с помощью произвольной функции w в виде

$$u = y^h w\left(\frac{x}{y}\right),$$

а, значит, это общее решение есть действительно однородная функция от x и y степени h.

Другое представление общего решения получается из полного интеграла

$$u = ax^h + by^h,$$

откуда общее решение выражается с помощью уравнений

$$u = ax^h + w(a)y^h,$$

$$0 = x^h + w'(a)y^h.$$

Так как из второго уравнения a выражается как функция отношения $\frac{x}{y}$, то и этим методом получаем для u общую однородную функцию измерения h.

§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными

Теория интегрирования общего дифференциального уравнения с n независимыми переменными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{du}{dx_i}\right) \tag{1}$$

строится совершенно аналогично случаю $n = 2$. При этом мы откажемся от подробного повторения геометрического истолкования и обсудим преимущественно вновь возникающий момент, а именно — характеристические многообразия полосок.

По аналогии с § 3 мы относим дифференциальному уравнению $F = 0$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x_i} + F_u p_i) \tag{2}$$

для $2n + 1$ функций x_i, u, p_i параметра s. Эта система (2) называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, принадлежащей дифференциальному уравнению с частными производными (1).