Общее решение дифференциального уравнения можно, следовательно, записать с помощью произвольной функции W в виде

$$u = x^h W\left(\frac{y}{x}\right)$$

или с помощью произвольной функции w в виде

$$u = y^h w\left(\frac{x}{y}\right),$$

а, значит, это общее решение есть действительно однородная функция от x и y степени h.

Другое представление общего решения получается из полного интеграла

$$u = ax^h + by^h,$$

откуда общее решение выражается с помощью уравнений

$$u = ax^h + w(a)y^h,$$

$$0 = x^h + w'(a)y^h.$$

Так как из второго уравнения a выражается как функция отношения $\frac{x}{y}$, то и этим методом получаем для u общую однородную функцию измерения h.

§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными

Теория интегрирования общего дифференциального уравнения с n независимыми переменными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{du}{dx_i}\right) \tag{1}$$

строится совершенно аналогично случаю $n = 2$. При этом мы откажемся от подробного повторения геометрического истолкования и обсудим преимущественно вновь возникающий момент, а именно — характеристические многообразия полосок.

По аналогии с § 3 мы относим дифференциальному уравнению $F = 0$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x_i} + F_u p_i) \tag{2}$$

для $2n + 1$ функций x_i, u, p_i параметра s. Эта система (2) называется *характеристической системой дифференциальных уравнений*, принадлежащей дифференциальному уравнению с частными производными (1).

Функция $F(x_i, u, p_i)$ является интегралом[1]) этой характеристической системы дифференциальных уравнений, ибо для всякого решения этой системы

$$\frac{dF}{ds} = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} = 0.$$

Все решения нашей характеристической системы, которые, сверх того, удовлетворяют условию $F = 0$, мы будем называть *характеристическими полосками*. Они образуют семейство, зависящее от $(2n-1)$ параметров. Точно так же, как в случае двух переменных, можно теперь установить следующую теорему:

На всякой интегральной поверхности $u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения $F = 0$ лежит бесконечное множество характеристических полосок. Всякая характеристическая полоска, имеющая общий элемент (т. е. общую систему значений x_i, u, p_i) с интегральной поверхностью, лежит на этой интегральной поверхности полностью.

Подобно § 3 *задача Коши* формулируется здесь так: Пусть дано $(n-1)$-мерное *начальное многообразие* C путем задания непрерывно дифференцируемых функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, u от параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, причем пусть матрица производных $\frac{dx_i}{dt_k}$ имеет ранг $n-1$. Пусть это многообразие C дополнено дальнейшим заданием n функций $p_1, \ldots, p_n$ параметров t_i до *многообразия полосок* C_1 так, чтобы *условия полоски*

$$u_{t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

удовлетворялись тождественно относительно t_ν. Далее, предполагаем, что координаты полоски $x_1, \ldots, x_n$, u, $p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют соотношению

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

тождественно в t_i. *Требуется найти интегральное многообразие $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. такое решение дифференциального уравнения $F = 0$, которое содержит заданное начальное многообразие C_1.*

Для решения задачи рассмотрим семейство тех характеристических полосок (с параметром s вдоль полоски), начальный элемент которых при $s = 0$ содержится в заданном начальном многообразии полосок C_1, т. е. те решения

$$x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad p_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

---

[1]) См. примечание 1, стр. 82.

характеристических дифференциальных уравнений, которые при $s=0$ переходят в заданные в условии задачи функции. Если функциональный определитель

$$\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(s,t_1,\ldots,t_{n-1})}, \tag{4}$$

совпадающий в силу системы (2) с определителем

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_{p_1} & \cdots & F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

не исчезает вдоль начального многообразия C_1 (т. е. при $s=0$), а, следовательно, и в некоторой окрестности C_1, то в этой окрестности возможно, обратно, выразить величины s, $t_1,\ldots,t_{n-1}$ через $x_1,\ldots,x_n$. Подставив эти выражения в $u(s, t_1,\ldots,t_{n-1})$, получим однозначно определенную поверхность $u=u(x_1,\ldots,x_{n-1})$, которая содержит начальное многообразие C_1. Мы покажем, что эта функция u решает нашу задачу Коши. Так как нам известно, что на поверхности $J: u=u(x_1,\ldots,x_n)$ величина $F(x_i, u, p_i)$ тождественно исчезает, если подставить вместо x_i, u, p_i решения характеристических дифференциальных уравнений, то достаточно лишь обнаружить, что на поверхности J всюду $p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Это доказательство проводится совершенно так же, как в случае двух независимых переменных (ср. § 3, п. 2), и здесь его можно опустить.

Остается рассмотреть тот исключительный случай, когда $\Delta=0$ на C_1. Соотношение $\Delta=0$ можно и на этот раз, как в § 2, заменить утверждением, что существует $n-1$ множителей λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$, с которыми выполняются вдоль C_1 линейные зависимости

$$F_{p_i}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}. \tag{5}$$

Нашей целью является исследовать, какие дальнейшие условия должны быть выполнены для того, чтобы задача Коши имела решение и в этом случае. И здесь также введение понятия *«характеристического многообразия»* делает возможной наглядную формулировку существующих соотношений. Начнем с того, что определим и проанализируем это понятие. В отличие от квазилинейного случая, § 2, где характеристическое многообразие было $(n-1)$-мерным многообразием C в пространстве x, u $(n+1)$ измерений, теперь нам придется рассматривать $(n-1)$-мерные многообразия полосок C_1,

характеризуемые системами $2n+1$ величин x_i, u, p_i, которые можно также истолковывать в пространстве $2n+1$ измерений x, u, p.

Прежде всего отнесем каждой точке пространства $2n+1$ измерений x, u, p (или каждому поверхностному элементу пространства $n+1$ измерений x, u) систему $2n+1$ чисел как компонент *«характеристического вектора полоски»*:

$$\left.\begin{aligned} a_i = F_{p_i}, \qquad a = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F_{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu, \\ b_i = -F_{x_i} - p_i F_u \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Введем теперь следующее определение: *Многообразие полосок C_1 $n-1$ измерений, удовлетворяющее тождественно соотношению $F(x_i, u, p_i) = 0$, называется характеристическим, если в каждой из его точек характеристический вектор полоски направлен тангенциально.*

Это геометрическое определение (основанное на истолковании в пространстве $2n+1$ измерений) мы уточним теперь аналитически в том смысле, что требование тангенциального направления вектора полоски означает требование линейной зависимости вектора (a_i, a, b_i) от $n-1$ независимых векторов

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}, \quad \frac{\partial u}{\partial t_\nu}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu}\right) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1),$$

которые называются (в порядке определения) тангенциальными к многообразию C_1.

Итак, пусть многообразие C_1 $n-1$ измерений, заданное с помощью функций x_i, u, p_i независимых параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, удовлетворяет тождественно относительно t соотношению

$$F(x_i, u, p_i) = 0, \tag{7}$$

а также *условиям полоски*

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Это многообразие полосок называется характеристическим в том случае, если для него существует $n-1$ множителей $\lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1})$ такого рода, что выполняются линейные зависимости[1])

$$X_i = a_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = 0, \tag{9}$$

---

[1]) Эти $2n+1$ соотношений между $2n+1$ величинами x_i, u, p_i не являются взаимно независимыми. Напротив, для их левых частей X_i, U, P_i справедливы следующие n тождеств:

$$U = \sum_i p_i X_i$$

$$U = a - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = 0, \tag{10}$$

$$P_i = b_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = 0. \tag{11}$$

И здесь опять справедливы следующие две теоремы.

Всякое характеристическое многообразие полосок C_1 производится лежащим в нем полностью семейством характеристических полосок, зависящим от $n-2$ параметров.

Всякая характеристическая полоска, имеющая общий начальный элемент с характеристическим многообразием, лежит в нем полностью.

Для доказательства снова, как в § 2, определим в $(n-1)$-мерном многообразии t_i кривые $t_i(s)$ с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_\nu}{ds} = \lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (\nu = 1, \ldots, n-1). \tag{12}$$

Эти кривые образуют $(n-2)$-параметрическое семейство, которое производит многообразие t_i. Функции $x_i(t_\nu)$, $u(t_\nu)$, $p_i(t_\nu)$ после подстановки $t_\nu = t_\nu(s)$ определяют лежащую в многообразии C_1 одномерную полоску $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$; докажем, что эта последняя является характеристической полоской нашего исходного дифференциального уравнения с частными производными. Действительно, принимая во внимание наши соотношения (9), (10), (11), имеем:

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu = a_i = F_{p_i},$$

$$\frac{du}{ds} = \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = a = \sum_i p_i F_{p_i},$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = b_i = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

и
$$\frac{\partial F}{\partial t_\rho} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial t_\rho} - \frac{\partial U_\rho}{\partial t_\nu}\right) + F_u U_\rho + \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial p_i}{\partial t_\rho} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\rho}\right),$$

где
$$U_\nu = \frac{\partial u}{\partial t_\nu} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dx_i}{dt_\nu}.$$

Эти соотношения нетрудно проверить. Из них вытекает, что кроме соотношения $F = 0$ (из которого получаются соотношения $\frac{\partial F}{\partial t_\rho} = 0$), условий полоски (8) и условий (9) надо еще поставить лишь одно единственное из условий (11), для того чтобы обеспечить выполнение недостающих условий. Однако, как и во многих других вопросах геометрии и анализа, целесообразно из соображений симметрии сохранить в определении систему зависимых соотношений.

Следовательно, наши функции $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$ являются решениями характеристической системы дифференциальных уравнений и, в силу справедливости соотношения $F(x_i, u, p_i) = 0$, определяют характеристическую полоску. Полученное $(n-2)$-параметрическое семейство таких полосок покрывает многообразие C_1.

Вторая теорема получается теперь в полном соответствии с рассуждениями в квазилинейном случае (§ 2) из однозначной определимости решений характеристической системы дифференциальных уравнений начальными значениями.

После этого рассмотрения характеристических многообразий можно выразить общий результат точно так же, как в квазилинейном случае, и так же точно довести до конца доказательство:

Задача Коши для заданного начального многообразия C_1 имеет одно и только одно решение, если вдоль C_1 всюду $\Delta \neq 0$. Если же на C_1 выполняется соотношение $\Delta = 0$, то для существования решения задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы многообразие C_1 было характеристическим; в этом случае существует бесконечное множество решений.

Нам нужно еще доказать лишь те утверждения, которые относятся к случаю $\Delta = 0$. В этом случае немедленно вытекает существование $n-1$ множителей $\lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1})$ такого рода, что выполняются соотношения (9). Если принять, что $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ представляет интегральную поверхность J, проходящую через многообразие C_1, причем $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, то непосредственно получаются недостающие еще соотношения (10), (11), отличающие многообразие C_1 как характеристическое. Именно, сначала получаем, принимая во внимание $p_i = u_{x_i}$ и соотношения (9):

$$a = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu},$$

чем устанавливается справедливость соотношения (10). Дифференцируя по x_k дифференциальное уравнение с частными производными (1), находим, что функция u должна удовлетворять, тождественно относительно x_i, уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_u p_k + F_{x_k} = 0,$$

при этом мы подставили $\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$. Пользуясь этим уравнением и принимая во внимание уравнение (12), получим:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_k}{\partial t_\nu} = -F_u p_k - F_{x_k} = b_k,$$

т. е. недостающие соотношения (11).

Таким образом, мы доказали, что из факта существования решения задачи Коши для начального многообразия C_1 вытекает, что C_1 есть характеристическое многообразие полосок.

Что это свойство также и достаточно в вышеуказанном смысле для существования решения, получается буквально тем же рассуждением, что и в квазилинейном случае. Построим какое-нибудь многообразие C_1', которое пересекает C_1 по $(n-2)$-мерному многообразию S и на котором всюду выполняется условие $\Delta \neq 0$. Поэтому задача Коши для многообразия C_1', как начального, имеет единственное решение — интегральную поверхность J. Все характеристические полоски, имеющие начальный элемент на C_1', в частности, те, которые проходят через S, а, следовательно, и образуемое последними многообразие C_1, лежат, следовательно, на интегральной поверхности J. Вследствие произвольности выбора многообразия C_1' задача Коши для начального многообразия C_1 имеет поэтому бесконечное множество решений.

§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона-Якоби

1. Образование огибающей и характеристические кривые. Пусть дано дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Пусть известно решение этого уравнения, зависящее от n параметров a_i:

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \tag{2}$$

для которого определитель

$$D = |\varphi_{x_i a_k}| \neq 0 \tag{3}$$

в интересующей нас области пространства x, u [1]). Тогда огибающая любого $(n-1)$-параметрического семейства этих решений оказывается снова решением. Для доказательства положим

$$a_i = \omega_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) Можно было бы по аналогии с гл. I, § 4, п. 2 общее поставить условие, чтобы матрица из n строк

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

имела ранг n.