Таким образом, мы доказали, что из факта существования решения задачи Коши для начального многообразия C_1 вытекает, что C_1 есть характеристическое многообразие полосок.

Что это свойство также и достаточно в вышеуказанном смысле для существования решения, получается буквально тем же рассуждением, что и в квазилинейном случае. Построим какое-нибудь многообразие C_1', которое пересекает C_1 по $(n-2)$-мерному многообразию S и на котором всюду выполняется условие $\Delta \neq 0$. Поэтому задача Коши для многообразия C_1', как начального, имеет единственное решение — интегральную поверхность J. Все характеристические полоски, имеющие начальный элемент на C_1', в частности, те, которые проходят через S, а, следовательно, и образуемое последними многообразие C_1, лежат, следовательно, на интегральной поверхности J. Вследствие произвольности выбора многообразия C_1' задача Коши для начального многообразия C_1 имеет поэтому бесконечное множество решений.

§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона-Якоби

1. Образование огибающей и характеристические кривые. Пусть дано дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Пусть известно решение этого уравнения, зависящее от n параметров a_i:

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \tag{2}$$

для которого определитель

$$D = |\varphi_{x_i a_k}| \neq 0 \tag{3}$$

в интересующей нас области пространства x, u [1]). Тогда огибающая любого $(n-1)$-параметрического семейства этих решений оказывается снова решением. Для доказательства положим

$$a_i = \omega_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) Можно было бы по аналогии с гл. I, § 4, п. 2 общее поставить условие, чтобы матрица из n строк

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

имела ранг n.

где ω_i — произвольные функции $(n-1)$ параметров t_k. Для получения огибающей вычисляют $t_1, \ldots, t_{n-1}$ из уравнений

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

как функции от $x_1, \ldots, x_n$ и подставляют в

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \omega_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_{n-1})).$$

Кривые касания поверхностей, даваемых полным интегралом, с огибающей окажутся *характеристическими кривыми*. Каждая такая кривая касания принадлежит определенной системе значений t_ν, $\frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu}$ и a_i. Характеристическим свойством для кривой касания является то, что вдоль нее сохраняются также соотношения (4), из которых для величин φ_{a_i} получаются, с точностью до общего множителя пропорциональности λ, некоторые постоянные значения b_i:

$$\varphi_{a_i} = \lambda b_i. \tag{5}$$

Эти равенства можно рассматривать как отнесение значениям x_i и a_i значений b_i; на основании условия (3) в окрестности рассматриваемой системы значений их можно однозначным образом разрешить относительно величин x_i. Мы получаем при этом функции

$$x_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \lambda).$$

Подставив эти функции в $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots a_n)$, получим для каждой системы значений a_i, b_i пространственную кривую, представленную в параметрической форме с параметром λ. Что все эти кривые являются кривыми касания в нашем процессе образования огибающей, вытекает из того обстоятельства, что путем подходящего выбора функций ω_i можно достигнуть того, чтобы a_i и b_i принимали любые значения из рассматриваемой области. Таким образом, получаем для нашего полного интеграла семейство кривых касания, зависящее от $2n$ параметров.

Эти кривые являются характеристическими кривыми дифференциального уравнения с частными производными (1), а совместно с величинами

$$p_i = \varphi_{x_i}(x_k(a_\nu, b_\nu, \lambda); a_\nu)$$

они дают характеристические полоски.

Геометрически это получается из определения наших кривых как кривых касания. Для того, чтобы вывести это аналитически, продифференцируем уравнения (5) по параметру λ, причем дифференцирование по λ будем обозначать штрихом:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{a_i x_j} x_j' = b_i. \tag{6}$$

С другой стороны, дифференцируя по a_i дифференциальное уравнение (1), которое удовлетворяется функцией $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$

тождественно относительно x_i и a_i, и принимая во внимание (5), имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{x_j a_i} F_{p_j} + F_u \lambda b_i = 0. \tag{7}$$

Отсюда видно, что величины $-\frac{F_{p_j}}{\lambda F_u}$ удовлетворяют той же неоднородной системе линейных уравнений, что и x'_j; так как определитель этой системы не равен нулю, то

$$x'_j = -\frac{F_{p_j}}{\lambda F_u}$$

или, если обозначим отличное от нуля выражение $-\frac{1}{\lambda F_u}$ через ρ,

$$x'_j = \rho F_{p_j}. \tag{8}$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (1) по x_j, имеем:

$$F_u p_j + \sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} + F_{x_j} = 0;$$

так как в силу (8)

$$\sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_j} x'_i = \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} x'_i =$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{\partial p_j}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{\rho} p'_j,$$

то отсюда получаем:

$$p'_j = -\rho (F_u p_j + F_{x_j}).$$

Наконец, на основании уравнения (8)

$$u' = \sum_i u_{x_i} x'_i = \rho \sum_i p_i F_{p_i}.$$

В силу того, что параметр λ можно выбрать так, чтобы $\rho = 1$, мы приходим к выводу, что характеристические уравнения (2), § 7 (стр. 99) удовлетворяются на изучаемых нами кривых [1]).

---

[1]) Заметим кстати, что из решения $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$, зависящего от n произвольных параметров, можно получить новые решения методом образования огибающей еще и другими способами. Можно, например, образовать огибающую n-параметрического семейства (2), причем получится особое решение; это особое решение, как и в случае $n = 2$, можно также получить с помощью процессов дифференцирования и исключения, из соотношений $F = 0$ и $F_{p_i} = 0$. Или иначе: из n-параметрического семейства (2) можно выделить с помощью произвольных функций какое-либо семейство, зависящее от m параметров ($m < n$), и образовать огибающую полученного семейства. Многообразия касания будут в этом случае характеристическими многообразиями m измерений.

2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений. Теорию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка можно привести к более наглядному виду и упростить вычисления п. 1, если искомая функция u не входит явно в дифференциальное уравнение. Этого можно всегда достигнуть и для любого дифференциального уравнения за счет увеличения числа независимых переменных на единицу.

Для этой цели надо лишь (ср. гл. I, § 5, п. 2, стр. 38) ввести $u = x_{n+1}$ в качестве независимой переменной и семейство решений $u = \psi(x_1, \ldots, x_n; c)$ писать в неявном виде $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$. Вместо u_{x_i} придется подставить $-\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_{n+1}}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ясно, что для искомой функции φ получается теперь дифференциальное уравнение, не содержащее явно φ.

Кроме того, выделим одну переменную $x_{n+1} = x$ и будем считать дифференциальное уравнение разрешенным относительно производной от функции φ по этому переменному. Если теперь вместо φ писать снова u, то можем, следовательно, ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ p = u_x, \quad p_i = u_{x_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

для функции u от $n+1$ переменных $x, x_1, \ldots, x_n$.

Система характеристических дифференциальных уравнений, если писать x вместо s, причем $\frac{dx}{ds} = 1$, переходит в следующую систему:

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и еще

$$\frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H, \qquad \frac{dp}{dx} = -H_x. \tag{11}$$

Уже уравнения (10) сами по себе образуют определенную систему из $2n$ дифференциальных уравнений. После того, как из них определены функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, остальные две функции $p(x)$ и $u(x)$ получатся из уравнений (11) при помощи простого интегрирования.

К дифференциальным уравнениям вида (10) приводят задачи механики и вариационного исчисления (ср., например, т. I, гл. IV, § 9, а также § 9 этой главы). Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}, \tag{10}$$

соответствующая функции $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ от $2n+1$ переменных, называется *канонической системой дифференциальных уравнений.*

Результаты этого пункта можно резюмировать так, что интегрирование дифференциального уравнения с частными производными (9) может быть приведено к интегрированию канонической системы с той же функцией H.

3. Теория Гамильтона-Якоби. Одним из главных достижений Якоби было обнаружение того факта, что эту связь можно обратить. Собственно говоря, по обычной классификации интегрирование дифференциального уравнения с частными производными считается более высокой задачей, чем интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Но в математической физике часто приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений канонического вида, которые оказываются сравнительно сложными и представляют значительные трудности для интеграции, между тем как соответствующее дифференциальное уравнение с частными производными более доступно; например, допускает нахождение полного интеграла методом разделения переменных (гл. I, § 3). В таких случаях можно найти общее решение соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи процессов дифференцирования и исключения на основании знания полного интеграла. Этот вывод, который уже содержится в результатах § 4 и § 8 п. 1, в случае канонических дифференциальных уравнений допускает особенно простую формулировку и аналитическое доказательство, независимое от эвристического рассмотрения огибающих.

Прежде всего мы несколько по-новому определим понятие полного интеграла для нашего дифференциального уравнения. Для этого заметим, что для всякого решения u дифференциального уравнения выражение $u+a$ с произвольной постоянной a тоже должно быть решением. Теперь, если $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n, x; a_1, \ldots, a_n)$ есть решение, зависящее от n параметров a_i, притом такое, что определитель

$$|\varphi_{x_i a_k}| \neq 0, \tag{12}$$

то выражение

$$u=\varphi+a,$$

зависящее от $n+1$ параметров, мы будем называть *полным интегралом*. Главное содержание излагаемой здесь теории образует следующая теорема, которая находится в полной аналогии к фактам, доказанным в п. 1 этого параграфа.

Если для дифференциального уравнения с частными производными

$$u_x+H(x_1, \ldots, x_n, x, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})=0 \tag{9}$$

известен полный интеграл

$$u=\varphi(x_1, \ldots x_n, x, a_1, \ldots, a_n)+a,$$

то из уравнений

$$\varphi_{a_i}=b_i, \qquad \varphi_{x_i}=p_i \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{13}$$

с $2n$ произвольными параметрами a_i и b_i получается $2n$-параметрическое семейство решений канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}. \tag{10}$$

Если представим себе, что из первых n уравнений (13) величины x_i выражены как функции от x и от $2n$ параметров a_i, b_i, что в силу условия (12) возможно, и что эти выражения для x_i подставлены во вторую группу уравнений (13), то получим функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, зависящие еще от $2n$ параметров и представляющие общее решение канонических дифференциальных уравнений. Следовательно, решение канонической системы дифференциальных уравнений приводится к задаче нахождения полного интеграла соответствующего дифференциального уравнения с частными производными.

Доказательство проще всего вести в виде простой поверки, по образцу доказательства в п. 1 этого параграфа [1]). Для того, чтобы показать, что функции $x_i(x)$ и $p_i(x)$, определенные по данному выше правилу, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}, \tag{10}$$

продифференцируем уравнение $\varphi_{a_i} = b_i$ по x, а уравнение $\varphi_x + H(x_i, x_i, \varphi_{x_i}) = 0$ по a_i и получим следующие $2n$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial a_i}\,\frac{\partial x_k}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial a_i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Вследствие неравенства нулю определителя $|\varphi_{a_k x_i}|$ из этих уравнений сразу вытекает первая группа доказываемых соотношений. Для доказательства второй группы соотношений дифференцируем уравнения $\varphi_{x_i} = p_i$ по x, а уравнение $\varphi_x + H(x_i, x, \varphi_{x_i}) = 0$ по x_i; получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial x} \\ \text{и} \qquad & \\ &0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_i} + H_{x_i}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[1]) Существенное отличие приводимого здесь доказательства от доказательства п. 1 заключается в сохранении несимметричного способа записи.

из которых в силу уже доказанного равенства $\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}$ и вытекает вторая группа соотношений (10).

4. Пример. Задача о двух телах. Движение двух материальных точек P_1 и P_2, взаимно притягивающихся по закону тяготения Ньютона, описывается дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= U_{x_1}, & m_1\ddot{y}_1 &= U_{y_1}, & m_1\ddot{z}_1 &= U_{z_1}, \\ m_2\ddot{x}_2 &= U_{x_2}, & m_2\ddot{y}_2 &= U_{y_2}, & m_2\ddot{z}_2 &= U_{z_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$U = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}.$$

Так как движение, как это нетрудно обнаружить, происходит постоянно в одной плоскости, то можно выбрать эту плоскость за плоскость x, y нашей системы координат и положение точки P_2 принять за начало координат. Для координат x, y материальной точки P_1 мы получим тогда уравнения движения

$$\ddot{x} = V_x, \qquad \ddot{y} = V_y; \qquad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{2}$$

где $k^2 = \varkappa^2 m_2$.

Наконец, после введения *функции Гамильтона*

$$H = \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

эта система (2) переходит в систему *канонических дифференциальных уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, & \dot{p} &= H_x, \\ \dot{y} &= H_q, & \dot{q} &= -H_y \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

для величин x, y, $p = \dot{x}$, $q = \dot{y}$. Интегрирование этой системы эквивалентно задаче отыскания полного интеграла дифференциального уравнения с частными производными[1])

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5}$$

Переход к полярным координатам r, ϑ преобразует наше уравнение в следующее:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right) = \frac{k^2}{r}. \tag{6}$$

Нетрудно обнаружить, что это уравнение имеет полный интеграл

$$\varphi = -\alpha t - \beta\vartheta + \gamma - \int_{r_0}^{r} \sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}\, d\rho, \tag{7}$$

---

[1]) Ср. гл. I, § 3, п. 1, пример 4.

зависящий от параметров α, β, γ. На основании теоремы п. 3 отсюда получается общее решение системы (4):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -t_0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\vartheta_0,$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} t - t_0 &= -\int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}, \\ \vartheta - \vartheta_0 &= \beta \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Второе из этих уравнений дает *траекторию*, а первое определяет движение материальной точки по этой кривой в зависимости от времени t.

Интеграл во втором из уравнений (8) легко вычислить с помощью подстановки $\rho' = \frac{1}{\rho}$, и уравнение траектории (при надлежащем выборе r_0) получится в явном виде

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\arcsin \frac{\frac{\beta^2}{k^2}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}}$$

или, если ввести для сокращения величины

$$p = \frac{\beta^2}{k^2}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}, \tag{8a}$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\arcsin \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon},$$

т. е. окончательно уравнение траектории примет следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_0)}. \tag{8b}$$

Следовательно, траектория будет *эллипсом*, *параболой* или *гиперболой*, смотря по тому, какое из соотношений: $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon > 1$ имеет место[1]).

---

[1]) По поводу исследования уравнений (8) ср., например, Р. Курант, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II, стр. 318 и следующие, М.-Л., 1931.

5. Пример. Геодезические линии на эллипсоиде. Дифференциальные уравнения геодезических линий $u = u(s)$, $v = v(s)$ поверхности

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

согласно т. I, гл. IV, § 9 могут быть записаны в нижеследующем каноническом виде:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= H_p, \qquad & p_s &= -H_u, \\ v_s &= H_q, \qquad & q_s &= -H_v, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$p = Eu_s + Fv_s,$$
$$q = Fu_s + Gv_s$$

и

$$H = \frac{1}{EG - F^2}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

причем

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

В соответствии с п. 3 рассмотрим принадлежащее системе (9) дифференциальное уравнение с частными производными

$$\varphi_s + \frac{1}{EG - F^2}(G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + E\varphi_v^2) = 0, \tag{10}$$

имея в виду найти полный интеграл этого уравнения. Полагая

$$\varphi = -s + \psi(u, v),$$

получим для ψ уравнение[1])

$$G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2. \tag{11}$$

Так как нас интересуют лишь интегральные кривые системы (9), а не частный вид параметрического представления этих кривых, одновременно определяемый системой уравнений (9), то достаточно найти однопараметрическое семейство решений $\psi(u, v; \alpha)$ уравнения (11); из этого семейства в силу основной теоремы п. 3 получится двухпараметрическое семейство геодезических линий с уравнением

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \text{const}. \tag{12}$$

В частном случае *трехосного эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

справедливо, как это легко проверить, следующее параметрическое представление (ср. т. I, стр. 217):

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}}, \\ y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}}, \\ z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

---

[1]) Ср. гл. II, § 9, п. 3.

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} E &= (u-v)A(u), \\ F &= 0, \\ G &= (v-u)A(v), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где для сокращения введено обозначение

$$A(u) = \frac{1}{4}\frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

Для функции $\psi(u, v)$ получается, стало быть, дифференциальное уравнение с частными производными

$$A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)A(u)A(v). \tag{15}$$

Полагая $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$, тотчас же получаем семейство решений

$$\psi(u, v; \alpha) = \int \sqrt{A(u)(u+\alpha)}\,du + \int \sqrt{A(v)(v+\alpha)}\,dv. \tag{16}$$

Отсюда на основании уравнения (12) вытекает нижеследующее *уравнение геодезических линий на эллипсоиде*:

$$\int \sqrt{\frac{A(u)}{u+\alpha}}\,du + \int \sqrt{\frac{A(v)}{v+\alpha}}\,dv = C. \tag{17}$$

§ 9. Теория Гамильтона и вариационное исчисление

Теория Гамильтона-Якоби дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка теснейшим образом связана с классическим вариационным исчислением. Существует полная эквивалентность между теорией таких дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, в которые искомая функция не входит явно, и вариационной задачей следующего типа:

$$\delta J = \delta \int_\tau^t F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, s)\,ds = 0, \tag{1}$$

где $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$ — n функций параметра s, точка обозначает дифференцирование по s, а $F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $2n+1$ аргументов в рассматриваемой области их изменения. Эти связи мы здесь вкратце изложим и при этом вновь получим и углубим результаты § 8.

1. Дифференциальные уравнения Эйлера в канонической форме. Экстремали нашей вариационной задачи (ср. т. I, гл. IV) даются системой *n эйлеровых дифференциальных уравнений* второго порядка для функций $u_\nu(s)$:

$$\frac{d}{ds}F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Но нашу вариационную задачу можно заменить (ср. по этому поводу т. I, гл. IV, § 9) другой эквивалентной канонической вариационной