Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} E &= (u-v)A(u), \\ F &= 0, \\ G &= (v-u)A(v), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где для сокращения введено обозначение

$$A(u) = \frac{1}{4}\frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}.$$

Для функции $\psi(u, v)$ получается, стало быть, дифференциальное уравнение с частными производными

$$A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)A(u)A(v). \tag{15}$$

Полагая $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$, тотчас же получаем семейство решений

$$\psi(u, v; \alpha) = \int \sqrt{A(u)(u+\alpha)}\,du + \int \sqrt{A(v)(v+\alpha)}\,dv. \tag{16}$$

Отсюда на основании уравнения (12) вытекает нижеследующее *уравнение геодезических линий на эллипсоиде*:

$$\int \sqrt{\frac{A(u)}{u+\alpha}}\,du + \int \sqrt{\frac{A(v)}{v+\alpha}}\,dv = C. \tag{17}$$

§ 9. Теория Гамильтона и вариационное исчисление

Теория Гамильтона-Якоби дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка теснейшим образом связана с классическим вариационным исчислением. Существует полная эквивалентность между теорией таких дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, в которые искомая функция не входит явно, и вариационной задачей следующего типа:

$$\delta J = \delta \int_\tau^t F(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, s)\,ds = 0, \tag{1}$$

где $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$ — n функций параметра s, точка обозначает дифференцирование по s, а $F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих $2n+1$ аргументов в рассматриваемой области их изменения. Эти связи мы здесь вкратце изложим и при этом вновь получим и углубим результаты § 8.

1. Дифференциальные уравнения Эйлера в канонической форме. Экстремали нашей вариационной задачи (ср. т. I, гл. IV) даются системой *n эйлеровых дифференциальных уравнений* второго порядка для функций $u_\nu(s)$:

$$\frac{d}{ds}F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Но нашу вариационную задачу можно заменить (ср. по этому поводу т. I, гл. IV, § 9) другой эквивалентной канонической вариационной

задачей, которая приводит к системе $2n$ канонических дифференциальных уравнений первого порядка для экстремалей. Для этой цели мы вводим с помощью преобразования Лежандра *«импульсы»*

$$F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu. \tag{3}$$

Мы предполагаем, что из этих уравнений (3) в рассматриваемой области переменных $\dot{u}_\nu$, u_ν, s возможно выразить величины $\dot{u}_\nu$ как функции величин v_ν, u_ν, s, и с этой целью налагаем требование

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| \neq 0, \tag{4}$$

где выражение в левой части означает определитель порядка n с элементами $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}_\nu \partial \dot{u}_\mu}$. При этом предположении система уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_{\dot{u}_\nu} &= v_\nu, \\ L_{v_\nu} &= \dot{u}_\nu, \\ F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s) + L(v_\nu, u_\nu, s) &= \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu v_\nu{}^{1)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

представляет *преобразование Лежандра и обратное ему*, причем u_ν и s играют роль параметров, не подвергающихся преобразованию (ср. гл. I, § 6). Из (5) непосредственно получаем дальнейшее соотношение

$$L_{u_\nu} + F_{u_\nu} = 0. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения Эйлера переходят при этом в *каноническую систему*

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_\nu &= -L_{u_\nu}, \\ \dot{u}_\nu &= L_{v_\nu} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

с принадлежащей вариационной задаче *«функцией Лежандра»* $L(v_1, \ldots, v_n; u_1, \ldots, u_n; s)$. Эти канонические дифференциальные уравнения принадлежат в качестве эйлеровых уравнений задаче, эквивалентной первоначальной вариационной задаче (*«каноническая форма вариационной задачи»*) (ср. т. I, гл. IV, § 9)

$$\delta J = \delta \int_\tau^t \left(\sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s)\right) ds = 0$$

или

$$\delta \int_\tau^t \left(\sum u_\nu \dot{v}_\nu + L(v_\nu, u_\nu, s)\right) ds = 0,$$

---

[1]) В этом и следующем параграфе, если нет особых указаний, суммирования всегда распространяются от 1 до n.

причем $2n$ функциональных аргументов u_ν, v_ν являются функциями параметра s.

Переменные u_ν и v_ν называются *канонически сопряженными*.

Следует заметить, что канонического преобразования не существует, если функция F — однородная функция величин $\dot{u}_\nu$ первого измерения[1]) (см., однако, п. 3), например:

$$F=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_\nu^2}.$$

Мы подчеркиваем, однако, что в том случае, *когда условие* (4) *выполнено*, переход от эйлеровой формы уравнений экстремалей к канонической на основании формул (5) непосредственно обратим, т. е. *всякому подинтегральному выражению вариационной задачи* $F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s)$ *соответствует функция Лежандра* $L(v_\nu, u_\nu, s)$ *и обратно*.

Наша каноническая система (7) дифференциальных уравнений Эйлера совпадает с характеристической системой дифференциальных уравнений, принадлежащей дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка

$$J_s+L(J_{u_\nu}, u_\nu, s)=0 \tag{8}$$

для неизвестной функции $J(u_1, \ldots, u_n, s)$. В п. 2 и 4 мы увидим, что это уравнение имеет непосредственное значение для вариационной задачи.

2. Геодезическое расстояние или эйконал, его производные и дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби. Предположим теперь, что в рассматриваемой области пространства $n+1$ измерений переменных u_ν, s любые две точки: B с координатами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \tau$ и A с координатами $q_1, \ldots, q_n, t$ могут быть однозначным образом соединены экстремалью. В таком случае экстремали, прорезывающие эту область, можно представить с помощью функций

$$u_\nu=f_\nu(s;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t), \tag{9}$$

а соответствующие импульсы v_ν — с помощью функций

$$v_\nu=g_\nu(s;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t) \tag{9a}$$

с величинами $\varkappa_\nu$, τ, q_ν, t в качестве параметров. В частности, для точек A и B

$$\left.\begin{aligned} q_\nu&=f_\nu(t;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t),\\ \varkappa_\nu&=f_\nu(\tau;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Направление экстремалей в этих точках дается функциями

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_\nu&=\dot{f}_\nu(t;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t),\\ \dot{\varkappa}_\nu&=\dot{f}_\nu(\tau;\ \varkappa_\nu,\ \tau;\ q_\nu,\ t),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

---

[1]) Определитель в условии (4) в этом случае тождественно равен нулю.

причем точка $\cdot$ означает дифференцирование по первому аргументу (дифференцирование вдоль экстремали). Эти величины (11) являются функциями $2n+2$ переменных t, q_ν, τ, $\varkappa_\nu$, так же как и импульсы v_ν в конечных точках:

$$\left.\begin{aligned} p_\nu &= g_\nu(t;\varkappa_\nu,\tau;q_\nu,t) = F_{\dot q_\nu}(\dot q_\nu, q_\nu, t),\\ \pi_\nu &= g_\nu(\tau;\varkappa_\nu,\tau;q_\nu,t) = F_{\dot\varkappa_\nu}(\dot\varkappa_\nu,\varkappa_\nu,\tau),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

— это так называемые *функции поля*.

Если подставить функции (9) в наш вариационный интеграл

$$J = \int_\tau^t F(\dot u_\nu, u_\nu, s)\,ds = \int_\tau^t \Big(\sum_\nu v_\nu \dot u_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s)\Big)\,ds,$$

то этот интеграл перейдет в функцию

$$J(t, q_\nu, \tau, \varkappa_\nu)$$

от $2n+2$ переменных τ, $\varkappa_\nu$, t, q_ν.

Эту функцию называют *геодезическим расстоянием точек B и A*, принимая во внимание, что вариационную задачу можно рассматривать как обобщение задачи о кратчайшем пути в пространстве. Функцию $J(t, q_\nu, \tau, \varkappa_\nu)$ можно также истолковать оптически, рассматривая s как время и полагая

$$F = \frac{\sqrt{\sum \dot u_\nu^2}}{v(\dot u_\nu, u_\nu, s)},$$

причем тогда v истолковывается как скорость света в пространстве u_ν в ее зависимости от положения, направления и времени. Если теперь принять согласно *принципу Ферма о кратчайшем времени распространения света* (ср. т. I, гл. IV, § 1), что световые лучи являются экстремалями нашей задачи, то функция J означает время, которое требуется свету для того, чтобы пройти от точки B до точки A по своему пути. При таком истолковании функцию J называют *эйконалом*.

Поставим себе задачей выразить производные эйконала J по своим $2n+2$ независимым переменным с помощью функции F.

Результат выражается в виде следующей теоремы:

Частные производные эйконала выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} J_t &= -L(p_\nu, q_\nu, t) = F(\dot q_\nu, q_\nu, t) - \sum_\nu \dot q_\nu F_{\dot q_\nu},\\ J_{q_\nu} &= p_\nu = F_{\dot q_\nu},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} J_\tau &= L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau) = -F(\dot\varkappa_\nu, \varkappa_\nu, \tau) + \sum_\nu \varkappa_\nu F_{\dot\varkappa_\nu},\\ J_{\varkappa_\nu} &= -\pi_\nu = -F_{\dot\varkappa_\nu}\end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

или в сжатом виде

$$\delta J = -L(p_\nu, q_\nu, t)\delta t + \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu + L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\delta\tau - \sum_\nu \pi_\nu \delta\varkappa_\nu, \quad (14)$$

причем $\dot{q}_\nu$, $\dot{\varkappa}_\nu$, p_ν, π_ν надо брать из формул (11) и (12).

Быстрее всего можно притти к этим формулам при помощи канонического представления вариационной задачи. Если рассматривать $2n+2$ координаты начальной точки B и конечной точки A в виде каких-либо непрерывно дифференцируемых функций параметра s и дифференцирование по этому параметру обозначать символом δ, то, принимая во внимание, что экстремали удовлетворяют каноническим дифференциальным уравнениям (7), немедленно получаем:

$$\delta J = \Big(\sum_\nu \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t)\Big)\delta t - \Big(\sum_\nu \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\Big)\delta\tau +$$

$$+ \int_\tau^t \Big[\sum (v_\nu \delta \dot{u}_\nu + \dot{u}_\nu \delta v_\nu) - \sum_\nu (L_{u_\nu} \delta u_\nu + L_{v_\nu} \delta v_\nu)\Big] ds =$$

$$= \Big(\sum_\nu \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t)\Big)\delta t - \Big(\sum_\nu \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\Big)\delta\tau +$$

$$+ \int_\tau^t \sum_\nu (v_\nu \delta u_\nu)^{\cdot} ds.$$

Следовательно,

$$\delta J = \Big(\sum_\nu \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t)\Big)\delta t - \Big(\sum_\nu \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\Big)\delta\tau + \Big[\sum_\nu v_\nu \delta u_\nu\Big]_\tau^t.$$

Но из формул (10) непосредственно следует:

$$\delta q_\nu = \dot{q}_\nu \delta t + \delta u_\nu\big|_{s=t}, \quad \delta\varkappa_\nu = \dot{\varkappa}_\nu \delta\tau + \delta u_\nu\big|_{s=\tau};$$

следовательно,

$$\delta J = -L(p_\nu, q_\nu, t)\delta t + L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\delta\tau + \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu - \sum_\nu \pi_\nu \delta\varkappa_\nu. \quad (14)$$

Это соотношение и выражает нашу теорему.

Из уравнений (13) можно исключить импульсы p_ν. Мы тогда получим *для геодезического расстояния J, как функции конечной точки A, дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби*:

$$J_t + L(J_{q_\nu}, q_\nu, t) = 0, \quad (15)$$

которое называется также *уравнением эйконала*. Таким образом, установлена связь уравнения (8) с вариационной задачей, отмеченная в п. 1. Как уже было указано в упомянутом месте, характеристические уравнения дифференциального уравнения (15) являются как раз нашими каноническими дифференциальными уравнениями; следова-

тельно, *характеристики уравнения Гамильтона являются экстремалями канонической вариационной задачи.*

3. Однородные подинтегральные выражения. Геодезические линии. И в исключительном случае, когда F — однородная функция первого измерения относительно величин $\dot{u}_\nu$, можно также провести соответствующие рассуждения. На этот раз

$$\left|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}\right| \equiv 0, \quad \text{а также} \quad L = -F + \sum_\nu \dot{u}_\nu F_{\dot{u}_\nu} \equiv 0,$$

и преобразование Лежандра к каноническому виду отказывается служить. Однако, в этом случае находим, как выше в п. 2,

$$J_t = 0, \qquad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu},$$

причем теперь выражения $F_{\dot{q}_\nu}$ — однородные функции нулевого измерения относительно $\dot{q}_\nu$. Отсюда можно выразить отношения величин $\dot{q}_\nu$ через производные J_{q_ν}, и соотношение однородности

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = F$$

дает здесь замену дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона.

В качестве примера рассмотрим случай *геодезических линий*

$$F = \sqrt{Q}, \qquad Q = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu}\, \dot{u}_\nu \dot{u}_\mu,$$

причем коэффициенты $a_{\nu\mu}$ квадратичной формы Q являются функциями от $u_1, \ldots, u_n$. Имеем:

$$J_t = 0, \qquad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu} = \sum_\mu \frac{a_{\nu\mu}\dot{q}_\mu}{F}$$

или

$$\frac{\dot{q}_\nu}{F} = \sum_\mu A_{\nu\mu} J_{q_\mu},$$

где величины $A_{\nu\mu}$ образуют матрицу, взаимную с матрицей $a_{\nu\mu}$. Умножая на $F_{\dot{q}_\nu} = J_{q_\nu}$ и суммируя по ν, получим в силу условия однородности, уравнение

$$\sum_{\mu,\nu} A_{\nu\mu} J_{q_\nu} J_{q_\mu} = 1 \tag{16}$$

в качестве дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона для геодезического расстояния J. Для величины $\Gamma = J^2$ получится дифференциальное уравнение с частными производными

$$\sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu} \Gamma_{q_\nu} \Gamma_{q_\mu} = 4\Gamma. \tag{16a}$$

Например, в евклидовом случае $F=\sqrt{\sum \dot{u}_\nu^2}$ имеем дифференциальное уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} J_{q_\nu}^2 = 1.$$

Тот же общий результат (16) мы получаем для задачи о геодезических линиях, если s не входит явно в F, следующим образом. В дифференциальных уравнениях Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0, \qquad F = \sqrt{Q} \\ &\text{или} \\ &\frac{d}{ds}\frac{Q_{\dot{u}_\nu}}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} Q_{u_\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

мы выбираем параметр s так, чтобы было $Q=F^2=1$. Дифференциальные уравнения Эйлера принимают тогда более простой вид

$$\frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu} - Q_{u_\nu} = 0. \tag{17a}$$

Это линейная система дифференциальных уравнений, и функция Q является ее интегралом [1]), в силу чего и возможно ставить дополнительное требование $Q=1$ без риска впасть в противоречие. Новые дифференциальные уравнения (17a) можно теперь преобразовать к каноническому виду, ибо они относятся уже не к однородному выражению первой степени $\sqrt{Q}$, а к квадратичному выражению Q. Каноническое преобразование с учетом однородности функции Q дает (пишем H вместо L):

$$\left.\begin{aligned} -Q + \sum Q_{\dot{u}_\nu} \dot{u}_\nu &= Q = H(p_\nu, u_\nu), \\ \dot{u}_\nu &= H_{p_\nu}, \\ \dot{p}_\nu &= -H_{u_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из дополнительного условия $H=1$ вытекает теперь непосредственно уравнение

$$H(J_{u_\nu}, u_\nu) = 1,$$

эквивалентное написанному выше уравнению (16).

---

[1]) Доказательство. Вдоль экстремали Q становится функцией от s, производная которой $\frac{dQ}{ds} = \sum Q_{\dot{u}_\nu} \ddot{u}_\nu + \sum Q_{u_\nu} \dot{u}_\nu$. Но правая часть в силу соотношения однородности равна

$$2\frac{dQ}{ds} + \sum \dot{u}_\nu \left[Q_{u_\nu} - \frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu} \right] = 2\frac{dQ}{ds}$$

[на основании (17a)]. Следовательно, $\frac{dQ}{ds} = 2\frac{dQ}{ds}$, откуда $\frac{dQ}{ds} = 0$.

4. Поля экстремалей и дифференциальное уравнение Гамильтона. Возвращаемся к рассмотрению геодезического расстояния J, введенного в п. 2. Если закрепить начальную точку B, то J становится функцией $n+1$ координат q_ν, t одной лишь конечной точки, удовлетворяющей дифференциальному уравнению Гамильтона (15); мы предполагаем при этом, как уже было подчеркнуто, что конечная точка A пробегает область, в которой экстремали BA, а, следовательно, и функции поля, введенные в формулах (11), (12), однозначно определены. Такую область мы будем называть *полем*.

Понятие поля и соответствующей ему функции $n+1$-го переменного (геодезическое расстояние), удовлетворяющей уравнению Гамильтона, допускает существенное обобщение. Для этой цели мы, кроме геодезического расстояния от неподвижной точки, вводим еще понятие *геодезического расстояния от постоянной начальной поверхности*

$$T(x_\nu, \tau) = 0.$$

К этому понятию геодезического расстояния в поле мы приходим следующим образом: закрепим на время конечную точку A экстремали и будем искать начальную точку B на заданной поверхности

$$T(x_1, \ldots, x_n, \tau) = 0 \tag{19}$$

под условием, чтобы геодезическое расстояние $J(B, A)$ было стационарно по отношению к вариации точки B. Подставляя вместо вариаций δq_ν, δt конечной точки A значения нуль, получим из нашей формулы (14) следующее условие для начальной точки B:

$$L(\pi_\nu, x_\nu, \tau)\,\delta\tau - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \delta x_\nu = 0. \tag{20}$$

Это условие должно выполняться, как бы ни варьировалось положение начальной точки на заданной поверхности $T=0$, т. е. это уравнение должно быть следствием уравнения (19), а, следовательно, и уравнения

$$\delta T = \sum T_{x_\nu} \delta x_\nu + T_\tau \delta\tau = 0.$$

Это равносильно существованию нижеследующих условий, так называемых *условий трансверсальности* (ср. т. I, гл. IV, § 5) с функцией $L = L(\pi_\nu, x_\nu, \tau)$:

$$-L : \pi_\nu = T_\tau : T_{x_\nu} \tag{21}$$

или с $F = F(\dot{x}_\nu, x_\nu, \tau)$:

$$\left(F - \sum \dot{x}_\nu F_{\dot{x}_\nu}\right) : F_{\dot{x}_\nu} = T_\tau : T_{x_\nu}. \tag{21a}$$

Это условие трансверсальности есть соотношение, которое должно существовать между координатами поверхности $T=0$ и производными $\dot{x}_\nu$ или соответственно канонически сопряженными величинами π_ν искомой экстремали. Экстремаль, удовлетворяющую в точке B усло-

вию (21), мы будем называть *экстремалью, трансверсальной к поверхности* $T=0$, или *трансверсалью этой поверхности*. Если каждой точке такого куска поверхности отнести трансверсаль, то эти трансверсальные кривые образуют *семейство трансверсалей*, зависящее от n параметров.

Предположим теперь, что в каждой точке рассматриваемого куска поверхности T можно построить такую трансверсально стоящую экстремаль и что семейство этих экстремалей однозначно покрывает некоторую область, примыкающую к этому куску поверхности, или, как говорят, образует *поле экстремалей*. В таком случае каждой точке A этого поля соответствует однозначно точка B на поверхности $T=0$. Точно так же в этом поле однозначно определены величины поля $\dot{q}_\nu$, а также величины q_ν для экстремалей, как функции точки. Следовательно, значение эйконала от B до A можно рассматривать как функцию координат q_ν, t конечной точки A. Этот эйконал представляет собой стационарное геодезическое расстояние от точки A до поверхности $T=0$. Мы будем его называть геодезическим расстоянием точки A от поверхности.

Рассмотренный сначала случай неподвижной начальной точки B является предельным случаем, который получается, если начальная поверхность (например, сфера) стягивается в точку B.

Нетрудно убедиться, что в частном случае подинтегрального выражения $F=\sqrt{\sum \dot{q}_\nu^2}$ геодезическое расстояние оказывается в точности евклидовым расстоянием по прямой линии. В этом случае поле экстремалей совпадает с *полем нормалей* поверхности $T=0$, т. е. оно образовано n-параметрическим семейством прямых специального вида. Следовательно, общее понятие поля экстремалей есть лишь обобщение этого элементарно-геометрического понятия в том направлении, что место евклидова расстояния занимает геодезическое расстояние, определенное с помощью нашей вариационной задачи, а место кратчайшего прямолинейного пути занимают соответствующие экстремали.

В виде естественного обобщения положения дел в специальном случае евклидова расстояния, поверхности $J=\text{const}$. называют *семейством параллельных поверхностей вариационной задачи*.

Так как для этого геодезического расстояния, в силу условий трансверсальности (21) и (21a), справедливо соотношение (20), то для геодезического расстояния от поверхности получаем из формулы (14) вновь то же самое соотношение, что и при неподвижной начальной точке B:

$$\delta J = -L(p_\nu, q_\nu, t)\,\delta t + \sum p_\nu \delta q_\nu. \tag{22}$$

Мы приходим, следовательно, к следующему общему результату:

Если $\dot{q}_\nu = \dot{q}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t)$ и $p_\nu = p_\nu(q_1, \ldots, q_n, t)$ — величины поля в поле экстремалей, трансверсальном гладкой поверхности $T=0$ (т. е. с непрерывно дифференцируемой функцией T), то в этом поле

частные производные геодезического расстояния $J = J(q_1, \ldots, q_n, t)$ *от поверхности* $T = 0$ *даются формулами*

$$\left.\begin{aligned} J_t &= F(\dot{q}_\nu, q_\nu, t) - \sum \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = -L(p_\nu, q_\nu, t), \\ J_{q_\nu} &= F_{\dot{q}_\nu} = p_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{13a}$$

Само геодезическое расстояние удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными Гамильтона (уравнению эйконала)

$$J_t + L(J_{q_\nu}, q_\nu, t) = 0. \tag{15}$$

Это утверждение связано с предположением, что наше построение поля, на котором покоится понятие геодезического расстояния, было возможно. Исключение, когда это построение поля невозможно, представляет тот случай, когда начальная поверхность сама образована трансверсальными к ней экстремалями, когда последние, следовательно, лежат на начальной поверхности. Однако, вполне возможно, чтобы трансверсальные кривые касались начальной поверхности, не совпадая с ней, и в этом случае они все же могут служить для однозначного построения поля, примыкающего с одной стороны к начальной поверхности. В этом случае начальную поверхность называют *каустической поверхностью*. Изложенный выше результат остается в силе и в этом случае.

Формулируем теперь же *обратную теорему*:

Если $J(q_1, \ldots, q_n, t)$ *есть решение дифференциального уравнения с частными производными* (15) *Гамильтона, то существует поле экстремалей, экстремали которого трансверсальны ко всем поверхностям некоторого семейства* $J = \text{const.}$, *считая начальной поверхность* $J = 0$. *Функция* J *означает тогда геодезическое расстояние от начальной поверхности в этом поле экстремалей.*

Для доказательства этой обратной теоремы будем исходить из заданного решения J дифференциального уравнения (15) и определим в рассматриваемой области n величин поля p_ν при помощи уравнений

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Из уравнения (15) вытекает тогда

$$J_t = -L(p_\nu, q_\nu, t).$$

Теперь мы определим семейство кривых, зависящее от n параметров, с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_\nu = L_{p_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

причем в правую часть вместо величин p_ν надо подставить значения

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Вдоль интегральной кривой этой системы дифференциальных уравнений величины p_ν становятся функциями параметра t, и дифференцирование по этому параметру дает

$$\dot{p}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} J_{q_\nu q_\mu} \dot{q}_\mu + J_{q_\nu t}.$$

С другой стороны, дифференцируя по q_ν дифференциальное уравнение (15), получим тождество

$$J_{q_\nu t} + L_{q_\nu} + \sum_{\mu} L_{p_\mu} J_{q_\nu q_\mu} = 0,$$

а, следовательно

$$\dot{p}_\nu = -L_{q_\nu}.$$

Эти уравнения совместно с прежними $\dot{q}_\nu = L_{p_\nu}$ характеризуют наше семейство кривых как n-параметрическое семейство экстремалей. Заменяя в условиях трансверсальности (21) π_ν через J_{q_ν} и $\varkappa_\nu$, τ через q_ν, t, а T через $J(q_1, \ldots, q_n, t)$, обнаруживаем непосредственно, что семейство этих экстремалей трансверсально ко всем поверхностям семейства $J = \text{const}$.

5. Конус лучей. Построение Гюйгенса (Huyghens). Рассуждениями этого параграфа установлено, что, обладая решением вариационной проблемы, можно построить решения дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона, зависящие еще от произвольной функции, именно — решения, обращающиеся в нуль на произвольной поверхности $T = 0$, и что тем самым мы исчерпаем все возможные решения этого дифференциального уравнения. Тот частный случай, когда начальная поверхность вырождается в точку, т. е. когда J становится геодезическим расстоянием от неподвижной точки, приводит к тем решениям дифференциального уравнения с частными производными, которые мы раньше обозначили термином *интегральный конус*; в оптическом истолковании ему соответствует *конус лучей*. Соответствующие поверхности $J = c = \text{const}$. естественно называть *геодезическими сферами*.

Заметим, что построение огибающих Гюйгенса здесь также получает весьма естественное освещение. Желая построить для данной поверхности $T = 0$ семейство параллельных поверхностей $J = c = \text{const}$., мы можем рассматривать это семейство параллельных поверхностей как огибающие геодезических сфер радиуса c, описанных вокруг точек B исходной поверхности как центров. Таким образом устанавливается связь с теорией полного интеграла.

6. Инвариантный интеграл Гильберта (Hilbert) для представления эйконала. Вычисление производных эйконала J для поля позволяет получить для самого эйконала выражение в виде не зависящего от пути криволинейного интеграла от полного дифференциала, соответствующего этим производным. Рассмотрим в поле пространства u_ν, s произвольную кусочногладкую кривую C, заданную

с помощью функций $u_\nu(s)$ с параметром s и производными $u_\nu'(s)$, которая соединяет точку B поля с переменной конечной точкой A. Производные и импульсы, относящиеся к точкам поля и соответствующие его экстремалям, как функции от u_ν, s, мы будем обозначать, как в п. 1, через $\dot{u}_\nu$, v_ν.

Для какой-нибудь функции J точки u_ν, s справедлива при любом пути интегрирования C между точками B и A следующая формула:

$$J(A)-J(B)=\int_B^A\left(\sum_\nu J_{u_\nu}du_\nu+J_s ds\right). \tag{23}$$

В качестве функции J выберем специально расстояние точки от начальной поверхности $T=0$ в нашем поле. Если, в частности, точка B лежит на поверхности $T=0$, то $J(B)=0$. Если внести вместо частных производных функции J их выражения (13а), то получим для эйконала следующее интегральное выражение:

$$J(q_\nu,\ t)-J(x_\nu,\ \tau)=\int_B^A\left(F(\dot{u}_\nu,\ u_\nu,\ s)+\sum_\nu(u_\nu'-\dot{u}_\nu)F_{\dot{u}_\nu}\right)ds \tag{24}$$

или

$$J(q_\nu,\ t)-J(x_\nu,\ \tau)=\int_B^A\left(\sum_\nu v_\nu u_\nu'-L(v_\nu,\ \dot{u}_\nu,\ s)\right)ds. \tag{25}$$

Подчеркнем еще раз: величины u_ν' означают производные вдоль кривой C, между тем как $\dot{u}_\nu$ и v_ν — это определенные ранее величины поля, т. е. производные и импульсы, которые принадлежат в рассматриваемой точке проходящим через нее экстремалям поля. Эти величины поля следует при этом рассматривать как заданные функции координат точки поля.

«Независимый интеграл Гильберта» можно, обратно, охарактеризовать следующим образом. Пусть $v_\nu(u_1,\ldots,u_n,t)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ — функции, заданные в некоторой области $n+1$-мерного пространства, притом такие, что $\int_B^A\left(\sum v_\nu u_\nu'-L(v_\nu,\ u_\nu,\ s)\right)ds$ между двумя точками B и A не зависит от пути; тогда функции $v_\nu(u_1,\ldots,u_n,t)$ являются величинами поля некоторого поля экстремалей, и значение криволинейного интеграла, как функции конечной точки A, есть принадлежащая этому полю экстремалей функция J, выражающая геодезическое расстояние.

Доказательство следует почти непосредственно из замечания, что для такого не зависящего от пути криволинейного интеграла, на основании элементарных теорем интегрального исчисления, должны быть справедливы в конечной точке A соотношения

$$J_{q_\nu}=p_\nu,\qquad J_t=-L.$$

Следовательно, такой интеграл, как функция верхнего предела, удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона (15), откуда и вытекает наше утверждение, со ссылкой на теорему п. 4, согласно которой всякое решение дифференциального уравнения Гамильтона выражает геодезическое расстояние в некотором поле экстремалей.

Итак, мы узнали, что существует полная эквивалентность между дифференциальным уравнением с частными производными Гамильтона, построением полей экстремалей и принадлежащих им функций, выражающих геодезическое расстояние, с одной стороны, и отысканием не зависящего от пути криволинейного интеграла типа (24), — с другой.

7. Теорема Гамильтона-Якоби. Из интегральной формулы Гильберта получается новое доказательство и соответственно новое освещение теоремы Якоби (ср. § 8). Если $J(q_1, \ldots, q_n, t, a_1, \ldots, a_n)$ есть решение дифференциального уравнения с частными производными Гамильтона, притом такое, что определитель $|J_{a_\nu q_\mu}|$ не исчезает, то уравнения $J_{a_\nu} = b_\nu$ и $J_{q_\nu} = p_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ дают семейство решений канонических уравнений, зависящее от $2n$ параметров a_i и b_i.

В самом деле, функции J соответствует поле экстремалей, зависящее от параметров $a_1, \ldots, a_n$, и в этом поле экстремалей функция J выражается интегралом Гильберта (24). Дифференцированием последнего под знаком интеграла получаем формулу

$$J_{a_\mu} = \int_B^A \sum_{\nu=1}^{n} (u_\nu' - \dot{u}_\nu) F_{\dot{u}_\nu a_\mu} ds, \tag{26}$$

которая, само собою разумеется, также не зависит от пути интегрирования. Если теперь точка A движется из некоторого начального положения A_0 вдоль экстремали поля, соответствующего системе значений a_i, т. е. если соответствующая дуга кривой C есть экстремаль, то $u_\nu' = \dot{u}_\nu$, подинтегральное выражение на этой дуге исчезает и мы имеем:

$$J_{a_\nu} = b_\nu, \tag{27}$$

где b_ν — постоянная, а именно — значение интеграла между точками B и A_0. Обратно, если уравнениями $J_{a_\nu} = b_\nu$ определяется семейство кривых $q_\nu(t; a_\nu, b_\nu)$, что в силу условия $|J_{a_\nu q_\mu}| \neq 0$ для некоторой окрестности рассматриваемой системы значений a_i, b_i возможно лишь единственным образом, то эти кривые должны быть экстремалями. Действительно, на дуге кривой C этого семейства подинтегральное выражение в (26) должно обращаться в нуль; получается линейная однородная система уравнений для разностей $u_\nu' - \dot{u}_\nu$ с определителем $|F_{\dot{u}_\nu a_\mu}|$. С другой стороны, согласно п. 4 $v_\nu = F_{\dot{u}_\nu} = J_{u_\nu}$. Следовательно, этот определитель тождественно равен определителю

$|J_{u_\nu a_\mu}|$, а потому согласно условию не исчезает. Следовательно, $u_\nu' - \dot{u}_\nu = 0$, и эти кривые C являются экстремалями.

В следующем параграфе мы придем к другому доказательству теоремы Гамильтона-Якоби.

§ 10. Канонические преобразования и приложения

1. Каноническое преобразование. Каноническая форма характеристических дифференциальных уравнений вариационной задачи и, соответственно, дифференциального уравнения с частными производными первого порядка образует исходный пункт важной для приложений *теории канонических преобразований*. Пусть даны функция $L(v_\nu, u_\nu, s)$ и соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_\nu &= L_{v_\nu}, \\ \dot{v}_\nu &= -L_{u_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Спрашивается, возможно ли и как преобразовать канонически сопряженные переменные v_ν, u_ν к новым переменным

$$\eta_\nu = \eta_\nu(u_1, \ldots, u_n;\ v_1, \ldots, v_n); \qquad \omega_\nu = \omega_\nu(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) \tag{29}$$

и из функции $L(v_\nu, u_\nu, s)$ получить новую функцию $\Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s)$ так, чтобы решениям канонических дифференциальных уравнений (28) соответствовали решения новой системы канонических дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_\nu &= \Lambda_{\eta_\nu}, \\ \dot{\eta}_\nu &= -\Lambda_{\omega_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Такое преобразование переменных, а также канонической системы дифференциальных уравнений называется *каноническим преобразованием*. Проще всего получить канонические преобразования, исходя из вариационной задачи. В самом деле, наше требование будет выполнено, если в результате преобразования (29) подинтегральное выражение одной канонической вариационной задачи перейдет в подинтегральное выражение другой канонической вариационной задачи с точностью до слагаемого выражения типа дивергенции (ср. т. I, гл. IV, § 3, п. 5), которое не оказывает влияния на уравнения Эйлера. Этого можно, например, достигнуть, если выбрать преобразование (29) так, чтобы соотношение

$$\sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s) \equiv \sum \dot{\omega}_\nu \eta_\nu - \Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s) + \frac{dW}{ds} \tag{31}$$

выполнялось тождественно относительно величин u_ν, ω_ν, $\dot{u}_\nu$, $\dot{\omega}_\nu$ с произвольно выбранной функцией

$$W = W(u_\nu, \omega_\nu, s)$$

и

$$\frac{dW}{ds} = \sum W_{\omega_\nu} \dot{\omega}_\nu + \sum W_{u_\nu} \dot{u}_\nu + W_s.$$