ГЛАВА III

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В первом томе было рассмотрено много отдельных задач, относящихся к дифференциальным уравнениям с частными производными высших порядков. В последующих главах мы займемся более систематической теорией. Правда, для дифференциальных уравнений высшего порядка, в противоположность уравнениям первого порядка, исчерпывающая теория их решения исключена. К тому же мы должны ограничиваться выбором идей, особенно важных для математической физики.

Для приложений исключительно важную роль играют — вследствие большей доступности для явного решения — линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Но для более глубокого понимания и этих уравнений требуется построение более общих принципиальных понятий. Мы предпосылаем поэтому в первой части этой главы такие более общие соображения, имея, в частности, в виду классификацию дифференциальных уравнений и соответственно дифференциальных выражений на существенно различные типы.

§ 1. Нормальные формы линейных дифференциальных выражений второго порядка с двумя независимыми переменными

1. Эллиптические, гиперболические и пароболические нормальные формы. Начнем со следующего вопроса. Пусть дано линейное дифференциальное выражение второго порядка для функции $u(x, y)$

$$L[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy},$$

где коэффициенты a, b, c — заданные непрерывно дифференцируемые, не исчезающие одновременно функции от x и y в рассматриваемой области G. Исследуем дифференциальное выражение

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \ldots, \tag{1}$$

причем здесь и в дальнейшем точки в конце означают дифференциальное выражение $g(x, y, u, u_x, u_y)$, не содержащее вторых производных, которое в последующем необязательно предполагать линейным. Нашей целью является введением новых независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{2}$$

преобразовать дифференциальное выражение (1) и соответственно дифференциальное уравнение

$$L[u] + \ldots = 0 \tag{3}$$

к простым нормальным формам. При этом дифференциальное выражение (1) переводится в эквивалентное выражение вида

$$\alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \ldots = \Delta[u] + \ldots, \tag{4}$$

функция $u(x, y)$ переходит в функцию $u(\xi, \eta) = u(x, y)$, и мы имеем:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \qquad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + \ldots,\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + \ldots,\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + \ldots,
\end{aligned}$$

где опять точки обозначают выражения, в которые не входят производные второго порядка от функции u. Следовательно,

$$\Delta[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2,\\
\beta &= a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y,\\
\gamma &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Непосредственной проверкой устанавливается соотношение

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (ac - b^2)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2. \tag{6}$$

Так как в преобразовании (2) в нашем распоряжении две функции φ и ψ, то естественно попытаться путем подходящего выбора этих функций придать новому дифференциальному выражению (4) простые формы, налагая на коэффициенты α, β, γ два надлежащих условия.

Мы формулируем следующие типы таких условий:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \alpha = \gamma, \qquad \beta = 0,\\
&\text{II.} \quad \alpha = -\gamma, \qquad \beta = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = \gamma = 0,\\
&\text{III.} \quad \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Какая из нормальных форм, характеризуемых этими условиями, может быть достигнута с помощью нашего преобразования? Это зависит исключительно от алгебраического характера квадратичной формы

$$Q(l, m) = al^2 + 2blm + cm^2$$

с переменными l, m, причем x и y надо рассматривать как параметры в выражениях коэффициентов. А именно, оказывается, что выражения коэффициентов α, β, γ у $\Delta[u]$ через коэффициенты a, b, c

у $L[u]$ можно получить, вводя в квадратичную форму $Q(l, m)$ новые переменные λ, μ с помощью формул

$$l = \lambda\varphi_x + \mu\psi_x, \qquad m = \lambda\varphi_y + \mu\psi_y,$$

причем $Q(l, m)$ преобразуется к виду

$$Q = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2.$$

По типу формы Q и дифференциальные выражения подразделяют на различные типы. Дифференциальное выражение $L[u]$ называют в точке x, y

I. эллиптическим, если $ac - b^2 > 0$,

II. гиперболическим, если $ac - b^2 < 0$,

III. параболическим, если $ac - b^2 = 0$.

Соответственно этому *нормальные формы дифференциального выражения* таковы:

$$\text{I.}\quad \Lambda[u] + \ldots = \alpha(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \ldots,$$

$$\text{II.}\quad \Lambda[u] + \ldots = \alpha(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) + \ldots,$$

или

$$\Lambda[u] + \ldots = 2\beta u_{\xi\eta} + \ldots,$$

$$\text{III.}\quad \Lambda[u] + \ldots = \alpha u_{\xi\xi} + \ldots,$$

а нормальные формы дифференциального уравнения имеют следующий вид:

$$\text{I.}\quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0,$$

$$\text{II.}\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \ldots = 0,$$

или

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0,$$

$$\text{III.}\quad u_{\xi\xi} + \ldots = 0.$$

Для заданной точки x, y такой нормальной формы можно достигнуть уже путем линейного преобразования. Именно, если

$$l = k_1\lambda + k_2\mu, \qquad m = k_3\lambda + k_4\mu$$

есть линейное преобразование, приводящее квадратичную форму Q к соответствующему нормальному виду в указанной точке x, y, то достаточно положить

$$\varphi = k_1 x + k_3 y, \qquad \psi = k_2 x + k_4 y.$$

Допустим что *дифференциальное выражение $L[u]$ имеет один и тот же тип в каждой точке рассматриваемой области G*. Мы ставим себе целью показать, что при надлежащем выборе функций преобразования φ, ψ можно достигнуть *нормальной формы в каждой точке области G*. Этот факт еще не доказывается алгебраической аналогией; он, напротив, основывается на разрешимости известных систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

При доказательстве этого утверждения можно без ограничения общности предположить, что в области G всюду $a \neq 0$. В противном

случае было бы справедливо эквивалентное предположение $c \neq 0$, либо мы уже имели бы дело со второй упомянутой нормальной формой.

Функции преобразования φ и ψ надо теперь определить так, чтобы новые коэффициенты α, β, γ удовлетворяли написанным выше условиям. Допустим сначала, что $L[u]$ относится в области G к гиперболическому типу, и поставим требование $\alpha = \gamma = 0$. В таком случае соотношения (5) дают для отношения $\frac{\lambda}{\mu}$ производных φ_x, φ_y, с одной стороны, и ψ_x, ψ_y, с другой, одно и то же квадратное уравнение

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0. \tag{7}$$

Это уравнение имеет два различных действительных решения $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, так как в области G

$$ac - b^2 < 0.$$

В силу того, что $a \neq 0$, можно положить

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Тогда величины λ_1 и λ_2 определяются уравнением (7) как непрерывно дифференцируемые функции от x и y в области G. Следовательно, в гиперболическом случае мы достигнем нормальной формы $\beta u_{\xi\eta} + \ldots = 0$, если выберем функции преобразования φ и ψ так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\varphi_x - \lambda_1\varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \lambda_2\psi_y = 0. \tag{8}$$

Эти два линейных однородных дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка действительно дают два семейства кривых $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$, которые можно также определить как семейства решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' + \lambda_1 = 0, \qquad y' + \lambda_2 = 0 \tag{9}$$

или дифференциального уравнения

$$ay'^2 - 2by' + c = 0,$$

если вдоль кривой семейства рассматривать y как функцию x.

Соотношение

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

показывает, что кривые обоих семейств не могут касаться друг друга ни в какой точке рассматриваемой области и что $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$. Из равенства (6) затем вытекает при $\alpha = \gamma = 0$, что $\beta \neq 0$.

Кривые $\xi = \varphi(x, y) = \text{const.}$, а также $\eta = \psi(x, y) = \text{const.}$ называются *характеристическими кривыми или характеристиками линейного гиперболического дифференциального выражения* $L[u]$.

Так как дифференциальное уравнение можно разделить на β, то полученный результат можно формулировать так:

В гиперболическом случае ($ac-b^2<0$) *линейное дифференциальное уравнение второго порядка* (3) *допускает преобразование к нормальному виду*

$$u_{\xi\eta}+\ldots=0, \tag{10}$$

для чего надо ввести в качестве координатных линий оба семейства характеристических кривых $\xi=\text{const.}$ и $\eta=\text{const.}$

Если в рассматриваемой области G имеет место неравенство $ac-b^2>0$, то дифференциальное выражение (1) в этой области принадлежит к эллиптическому типу. В этом случае квадратное уравнение (7) не имеет действительных решений; оно имеет два комплексных сопряженных решения λ_1 и λ_2, являющихся комплексными непрерывными функциями действительных переменных x, y. Уравнениям $\alpha=\gamma=0$ нельзя удовлетворить никаким семейством действительных кривых $\varphi=\text{const.}$, характеристических кривых не существует. Однако, если a, b, c — аналитические функции переменных x, y и если функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ предполагать аналитическими, то дифференциальные уравнения (8) можно рассматривать для комплексных переменных x, y и так же, как и выше, совершить преобразование к новым переменным ξ и η, которые будут теперь комплексно-сопряженными. Введя теперь снова действительные независимые переменные σ и ρ с помощью формул

$$\frac{\xi+\eta}{2}=\rho; \qquad \frac{\xi-\eta}{2i}=\sigma, \tag{11}$$

получим $4u_{\xi\eta}=u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}$. Таким образом, *в эллиптическом случае* мы приводим дифференциальное уравнение *к нормальному виду*

$$\Delta u+\ldots=u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}+\ldots=0. \tag{12}$$

Но этот способ приведения эллиптического уравнения к нормальному виду опирается на предположение об аналитичности коэффициентов, которое совершенно не требуется природой вопроса. Поэтому следует предпочесть следующий прямой путь преобразования к нормальному виду в эллиптическом случае, не выходящий за пределы действительной области. Заменяя в уравнениях (2), (4) ξ, η на ρ, σ, попытаемся удовлетворить условиям

$$\alpha=\gamma, \qquad \beta=0$$

или в раскрытом виде:

$$a\rho_x^2+2b\rho_x\rho_y+c\rho_y^2=a\sigma_x^2+2b\sigma_x\sigma_y+c\sigma_y^2,$$
$$a\rho_x\sigma_x+b(\rho_x\sigma_y+\rho_y\sigma_x)+c\rho_y\sigma_y=0.$$

Эти дифференциальные уравнения можно привести с помощью элементарных алгебраических выкладок к следующей системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\sigma_x=\frac{b\rho_x+c\rho_y}{W}, \quad \sigma_y=-\frac{a\rho_x+b\rho_y}{W}, \tag{13}$$

причем

$$W^2=ac-b^2$$

и для W возможны оба знака. Из этой системы так называемых *дифференциальных уравнений Бельтрами* можно, исключив одну из неизвестных, например, σ, получить непосредственно следующее дифференциальное уравнение второго порядка для другой величины, ρ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\rho_x+b\rho_y}{W}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{b\rho_x+c\rho_y}{W}=0. \tag{14}$$

Следовательно, вопрос о возможности преобразования к нормальному виду (12) зависит от разрешимости этих уравнений: (13) или соответственно (14). Ниже, в гл. IV, § 6 мы увидим, что решение этих дифференциальных уравнений, а тем самым и преобразование к эллиптической нормальной форме возможно и в неаналитическом случае, при одном лишь предположении непрерывной дифференцируемости коэффициентов a, b, c по действительным переменным x, y. При этом достаточно знать одно единственное частное решение уравнения (14).

Наконец, третий — *параболический случай*: $ac-b^2=0$. В этом случае квадратное уравнение (7) имеет один действительный корень, и соответственно этому можно ввести в качестве координатных линий одно такое семейство кривых $\xi=\varphi(x, y)=\text{const.}$, что α обратится в нуль: в силу соотношения (6) автоматически становится и $\beta=0$, между тем как, выбирая, например, в качестве второй формулы преобразования $\psi=x$, имеем $\gamma=a\neq 0$ в области G. Итак, *в параболическом случае приходим к нормальной форме*

$$u_{\eta\eta}+\ldots=0. \tag{15}$$

Таким образом, теорема о преобразовании к нормальному виду, сформулированная на стр. 145, доказана для всех трех типов дифференциальных выражений второго порядка.

Заметим, что преобразование к нормальному виду отнюдь не определено однозначно. Например, в эллиптическом случае нормальная форма сохраняется, если область ρ, σ подвергнуть какому-либо конформному отображению.

2. Примеры. Мы не раз уже рассматривали примеры наших трех различных типов дифференциальных уравнений. Простейшим гиперболическим уравнением является дифференциальное уравнение колебания струны

$$u_{xx}-u_{tt}=0,$$

причем мы пишем t вместо y, имея в виду физическое значение этой переменной как временной координаты. Это уравнение было решено полностью в гл. I, § 1. Простейшим эллиптическим дифференциальным уравнением является уравнение Лапласа $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$, решение которого также обсуждалось в различных местах (ср., например, гл. I, § 3). Мы нашли выше (гл. I, § 3) решения и для простейшего параболического дифференциального уравнения — уравнения теплопроводности

$$u_t-u_{xx}=0.$$

В дальнейшем мы узнаем, что произведенное нами подразделение дифференциальных уравнений на типы существенным образом связано с природой дифференциальных уравнений и их решений. Впрочем, одно и то же дифференциальное уравнение может в различных областях относиться к разным типам.

1. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{xx}+yu_{yy}=0, \tag{16}$$

для которого $ac-b^2=y$; при $y>0$ это уравнение относится к эллиптическому типу, при $y<0$ — к гиперболическому.

В области $y<0$ квадратное уравнение (7), т. е. уравнение

$$\lambda^2+y\mu^2=0,$$

имеет два действительных решения $\frac{\lambda}{\mu}=\pm\sqrt{-y}$, так что для φ и ψ получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\varphi_x+\sqrt{-y}\,\varphi_y=0, \qquad \psi_x-\sqrt{-y}\,\psi_y=0. \tag{17}$$

Можно указать частные решения этих уравнений

$$\varphi=x+2\sqrt{-y},$$
$$\psi=x-2\sqrt{-y}.$$

Преобразование

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x+2\sqrt{-y},\\ \eta&=x-2\sqrt{-y}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

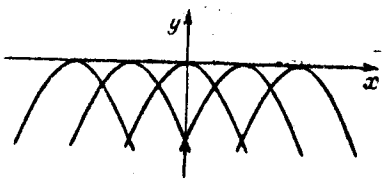
приводит дифференциальное уравнение (16) при $y<0$ к гиперболическому нормальному виду

$$u_{xx}+yu_{yy}=4u_{\xi\eta}+\frac{2}{\xi-\eta}(u_\xi-u_\eta)=0. \tag{19}$$

Характеристические кривые — параболы

$$y=-\frac{1}{4}(x-c)^2,$$

причем ветви этих парабол, идущие от оси абсцисс влево, являются кривыми $\varphi=\text{const.}$, кривые же $\psi=\text{const.}$ — ветви этих же парабол, идущие от оси x-ов направо (ср. черт. 2).



Черт. 2.

В случае $y>0$ мы пишем:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x,\\ \eta&=2\sqrt{y}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

По выполнении этого преобразования дифференциальное уравнение (16) переходит в эллиптическую нормальную форму

$$u_{xx}+yu_{yy}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}u_\eta=0. \tag{21}$$

2. У дифференциального выражения

$$u_{xx}+xu_{yy} \tag{22}$$

$ac - b^2 = x$; следовательно, это — выражение эллиптического типа при $x > 0$, гиперболического при $x < 0$.

В случае $x < 0$ выражение (22) приводится преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \xi = \varphi(x, y) &= \frac{3}{2} y + (\sqrt{-x})^3, \\ \eta = \psi(x, y) &= \frac{3}{2} y - (\sqrt{-x})^3 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

к нормальному виду

$$u_{xx} + x u_{yy} = 9x \left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} (u_\xi - u_\eta) \right], (\xi > \eta). \tag{24}$$

Характеристические кривые — параболы Нейля (черт. 3)

$$y - c = \pm \frac{2}{3} (\sqrt{-x})^3,$$

причем ветви, направленные вниз, дают кривые $\varphi = \text{const}$., а ветви, направленные вверх, — кривые $\psi = \text{const}$.

В случае $x > 0$ мы пишем:

$$\xi = \frac{3}{2} y - i\sqrt{x^3},$$
$$\eta = \frac{3}{2} y + i\sqrt{x^3};$$

полагая

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{3}{2} y, \\ \sigma &= \frac{\xi - \eta}{2i} = -\sqrt{x^3}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

мы, после преобразования, получаем нормальную форму

$$u_{xx} + x u_{yy} = \frac{9}{4} x \left[(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{3\sigma} u_\sigma \right]. \tag{26}$$

Черт. 3.

Функции (25) удовлетворяют дифференциальным уравнениям Бельтрами

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\sqrt{x}\rho_y, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{x}} \rho_x. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

§ 2. Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений

1. Нормальные формы. Классификация на типы и преобразование к некоторым нормальным формам допускает обобщение на нелинейные дифференциального уравнения и выражения. Целесообразно при этом пользоваться следующими сокращениями:

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$