

$a^2 - b^2 = x$; следовательно, это — выражение эллиптического типа при $x > 0$, гиперболического при $x < 0$.

В случае $x < 0$ выражение (22) приводится преобразованием

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) = \frac{3}{2}y + (\sqrt{-x})^3, \\ \eta &= \psi(x, y) = \frac{3}{2}y - (\sqrt{-x})^3 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

к нормальному виду

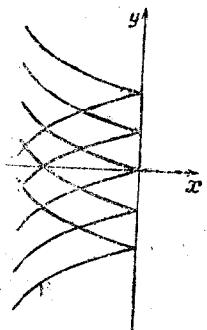
$$u_{xx} + xu_{yy} = 9x \left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6}(\xi - \eta)(u_\xi - u_\eta) \right], (\xi > \eta). \quad (24)$$

Характеристические кривые — параболы Нейля (черт. 3)

$$y - c = \pm \frac{2}{3}(\sqrt{-x})^3,$$

причем ветви, направленные вниз, дают кривые $\varphi = \text{const.}$, а ветви, направленные вверх, — кривые $\psi = \text{const.}$

В случае $x > 0$ мы пишем:



полагая

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{3}{2}y - i\sqrt{x^3}, \\ \eta &= \frac{3}{2}y + i\sqrt{x^3}; \\ p &= \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{3}{2}y, \\ \sigma &= \frac{\xi - \eta}{2i} = -\sqrt{x^3}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

мы, после преобразования, получаем нормальную форму

$$u_{xx} + xu_{yy} = \frac{9}{4}x \left[(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{3\sigma}u_\sigma \right]. \quad (26)$$

Функции (25) удовлетворяют дифференциальным уравнениям Бельтрами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\sqrt{x}\rho_y, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{x}}\rho_x. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

§ 2. Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений

1. Нормальные формы. Классификация на типы и преобразование к некоторым нормальным формам допускает обобщение на нелинейные дифференциальное уравнения и выражения. Целесообразно при этом пользоваться следующими сокращениями:

$$p = u_x, \quad q = u_y, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}.$$

Мы здесь ограничимся рассмотрением важнейшего во многих отношениях случая квазилинейного дифференциального выражения

$$L[u] = ar + 2bs + ct + d, \quad (1)$$

причем теперь a, b, c, d — заданные функции величин x, y, u, p, q . И в этом случае дифференциальное выражение называется *эллиптическим*, если $ac - b^2 > 0$, *гиперболическим*, если $ac - b^2 < 0$, *параболическим*, если $ac - b^2 = 0$. Различие состоит в том, что это деление на типы для дифференциальных выражений (1) уже невозможно произвести независимо от соответствующей функции u ; напротив, оно именно зависит от взятой функции $u(x, y)$, а в связи с этим от рассматриваемой функции $u(x, y)$ зависит и преобразование к нормальной форме.

Сделаем прежде всего общее замечание, что при введении новых переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ с функциональным определителем

$$D = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$$

имеют место следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} Dx_\xi &= \eta_y, & Dx_\eta &= -\xi_y, \\ Dy_\xi &= -\eta_x, & Dy_\eta &= \xi_x, \\ p = u_x &= \frac{u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}; & q = u_y &= \frac{u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Будем теперь считать $u(x, y)$ в выражении $L[u]$ заданной функцией. Тем самым не только u , но и p и q становятся на этой поверхности $u = u(x, y)$ известными функциями от x и y , и при подстановке в выражение $L[u]$ коэффициенты a, b, c , а также величина d переходят в заданные функции от x и y . Поэтому уместна попытка для этой специальной поверхности $u(x, y)$ ввести новые переменные, в точном соответствии с линейным случаем, с тем расчетом, чтобы после этого преобразования коэффициенты преобразованного дифференциального выражения $L[u]$ удовлетворяли на заданной поверхности либо условиям $\alpha = \gamma = 0$, либо условиям $\alpha = \gamma, \beta = 0$, смотря по тому, к какому случаю может быть отнесено дифференциальное выражение для этой поверхности: гиперболическому или эллиптическому (случай параболического вырождения мы оставляем здесь в стороне). Точнее, от новых переменных ξ, η или p, q соответственно мы требуем, чтобы они удовлетворяли либо системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2 &= 0, \\ a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или, что то же самое, в силу формул (2)

$$\left. \begin{aligned} ay_\xi^2 - 2by_\xi x_\xi + cx_\xi^2 &= 0, \\ ay_\eta^2 - 2by_\eta x_\eta + cx_\eta^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

либо системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a\rho_x^2 + 2b\rho_x\rho_y + c\rho_y^2 &= a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2, \\ a\rho_x\sigma_x + b(\rho_x\sigma_y + \rho_y\sigma_x) + c\rho_y\sigma_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

или соответственно

$$\left. \begin{aligned} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 &= ay_s^2 - 2by_s x_s + cx_s^2, \\ ay_\rho y_s - b(x_\rho y_s + y_\rho x_s) + cx_\rho x_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Системе уравнений (3) можно удовлетворить двумя действительными функциями $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ в том и только в том случае, если на рассматриваемой поверхности выполняется условие

$$ac - b^2 < 0.$$

В таком случае дифференциальное выражение относится к гиперболическому типу для этой поверхности. Система уравнений (5) принадлежит дифференциальному выражению эллиптического типа, который характеризуется соблюдением на поверхности $u = u(x, y)$ условия

$$ac - b^2 > 0.$$

Как и в случае линейных дифференциальных выражений, наши системы уравнений (3) и (5) формально переходят друг в друга при комплексном преобразовании

$$\frac{\xi + \eta}{2} = \rho; \quad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma.$$

В гиперболическом случае уравнения (4) допускают расщепление на два уравнения вида

$$\psi_1 y_\eta + \lambda_1 x_\eta = 0, \quad \psi_2 y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \quad (7)$$

совершенно так же, как и у линейных дифференциальных уравнений, но теперь в коэффициентах $a, b, c, \lambda_1, \psi_1, \lambda_2, \mu_2$ содержатся не только переменные x и y , но и величины u, p, q ; если $a \neq 0$, можно положить $\psi_1 = \psi_2 = 1$. Если заменить всюду величины p и q их выражениями (2) и вообразить, что вместо x и y в коэффициенты введены в качестве новых переменных ξ и η , то пара уравнений (7) или (4) соответственно представляет собой два соотношения между величинами x, y, u и их частными производными первого порядка по ξ и η .

Эти два уравнения отнюдь не могут служить для того, чтобы определить кривые $\xi = \text{const}$. и $\eta = \text{const}$. независимо от функции $u(x, y)$, как это было возможно в линейном случае. Теперь они представляют, напротив, систему двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для трех величин $u(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, стало быть, недопределенную систему.

Эта точка зрения наводит на мысль рассматривать также и исходное дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ как дифференциальное

уравнение, именно второго порядка, связывающее эти три функции независимых переменных ξ, η , так что первоначальное дифференциальное уравнение совместно с этими двумя «характеристическими уравнениями» образует систему трех дифференциальных уравнений для трех функций u, x, y . При такой постановке вопроса интегральная поверхность отыскивается не в несимметрическом виде $u = u(x, y)$, а в параметрическом представлении с помощью независимых «характеристических» параметров ξ и η .

Преобразование дифференциального выражения (1) приводит в этом случае дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ к виду, в который, как и следовало ожидать, входят еще только смешанные вторые производные по ξ и η :

$$\begin{aligned} x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = \\ = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2 \sqrt{b^2 - ac}}, \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ x_\xi & y_\xi & u_\xi \\ x_\eta & y_\eta & u_\eta \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2 \sqrt{b^2 - ac}}, \quad (9)$$

или, если рассматривать величины x, y, u как координаты радиуса-вектора ξ и воспользоваться векторным обозначением для скалярного и векторного произведения,

$$\xi_{\xi\eta}(\xi_\xi \times \xi_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2 \sqrt{b^2 - ac}}. \quad (10)$$

Если, в частности, $d = 0$, то приходим к замечательному следствию: дифференциальное уравнение (8) уже не зависит от специального вида исходного уравнения.

Квазилинейное дифференциальное уравнение вида

$$ar + 2bs + ct = 0$$

в гиперболическом случае допускает преобразование к одному и тому же неизменному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\xi_{\xi\eta}(\xi_\xi \times \xi_\eta) = 0 \quad (10a)$$

и двум дифференциальным уравнениям первого порядка (7), которые зависят еще от вида функций a, b, c .

Напомним еще раз, что в полученных дифференциальных уравнениях надо всюду заменить величины p и q их выражениями (2). Наша система (7), (8) трех дифференциальных уравнений с частными производными для радиуса-вектора ξ и есть искомый общий нормальный вид в гиперболическом случае.

Если на поверхности выполняется условие $b^2 - ac < 0$, т. е. имеет место эллиптический случай, то мы придем к другому соответствующему преобразованию к нормальному виду. Это преобразо-

вание можно получить либо чисто формально из найденного выше результата заменой $\frac{\xi + \eta}{2} = \rho$, $\frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma$, либо непосредственно с помощью условий (6).

В результате получится следующий вывод:

В эллиптическом случае наше дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ эквивалентно следующей системе трех дифференциальных уравнений для величин x, y, u или соответственно для радиус-вектора ξ как функции параметров ρ и σ :

$$\left. \begin{array}{l} ay_\rho^2 - 2by_\rho x_\rho + cx_\rho^2 = ay_\sigma^2 - 2by_\sigma x_\sigma + cx_\sigma^2, \\ ay_\rho y_\sigma - b(y_\rho x_\sigma + y_\sigma x_\rho) + cx_\rho x_\sigma = 0, \\ \Delta \xi (\xi_\rho \times \xi_\sigma) = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\rho & y_\rho & u_\rho \\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = (x_\rho y_\sigma - x_\sigma y_\rho)^2 \frac{d}{\sqrt{ac - b^2}}, \end{array} \right\} \quad (11)$$

где Δ означает оператор Лапласа.

В частном случае, когда $d = 0$, последнее дифференциальное уравнение, содержащее вторые производные, и здесь не зависит от вида функций a, b, c ; оно имеет теперь следующий вид:

$$\Delta \xi (\xi_\rho \times \xi_\sigma) = 0.$$

2. Пример. Минимальные поверхности. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение минимальных поверхностей

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0. \quad (12)$$

Это — дифференциальное уравнение всюду эллиптического типа, так как $ac - b^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0$. Следовательно, возможно преобразование к виду (11). После несложных выкладок получается следующая нормальная система:

$$\left. \begin{array}{l} x_\rho^2 + y_\rho^2 + u_\rho^2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + u_\sigma^2 \quad \text{или} \quad \xi_\rho^2 = \xi_\sigma^2, \\ x_\rho x_\sigma + y_\rho y_\sigma + u_\rho u_\sigma = 0 \quad \text{или} \quad \xi_\rho \xi_\sigma = 0, \end{array} \right\} \quad (13)$$

$$\Delta \xi (\xi_\rho \times \xi_\sigma) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta \xi = \xi_{\rho\rho} + \xi_{\sigma\sigma}. \quad (14)$$

Эту систему можно привести к еще значительно более простому виду. Из уравнений (13) дифференцированием получаем:

$$\xi_{\rho\rho} \xi_\rho = \xi_{\sigma\sigma} \xi_\sigma \quad \text{и} \quad \xi_{\rho\rho} \xi_\rho = -\xi_{\sigma\sigma} \xi_\sigma,$$

а, следовательно,

$$\xi_\rho \Delta \xi = 0 \quad \text{и точно так же} \quad \xi_\sigma \Delta \xi = 0.$$

С другой стороны, из уравнения (14) вытекает, что $\Delta \xi = \alpha \xi_\rho + \beta \xi_\sigma$, т. е. должно быть линейной комбинацией векторов ξ_ρ и ξ_σ . Следовательно, $\alpha = \beta = 0$, откуда и $\Delta \xi = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Минимальная поверхность может быть охарактеризована в параметрической форме, с подходящим образом выбранными па-

раметрами ρ и σ , при помощи следующих условий: каждая из трех координат x, y, u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta u = 0. \quad (15)$$

, кроме того, они подчинены еще условиям

$$\left. \begin{array}{l} A = \xi_\sigma^2 - \xi_\rho^2 = 0, \\ B = 2\xi_\rho \xi_\sigma = 0. \end{array} \right\} \quad (16)$$

В принятых в дифференциальной геометрии обозначениях

$$E = \xi_\rho^2, \quad F = \xi_\rho \xi_\sigma, \quad G = \xi_\sigma^2$$

для фундаментальных величин нашей поверхности, условия (16) принимают вид

$$E - G = 0, \quad F = 0. \quad (16a)$$

Эти дополнительные условия (16) или, что то же самое, (16a) являются двумя дальнейшими дифференциальными уравнениями наряду с тремя уравнениями (15), но они носят лишь характер краевого условия. Дело в том, что нет нужды требовать выполнения условий (16) в двухмерной области ρ, σ . Напротив, достаточно установить эти условия для какой-нибудь кривой в плоскости ρ, σ . Действительно, в силу уравнений (15) выполняются условия

$$A_\rho = B_\sigma, \quad A_\sigma = -B_\rho.$$

Следовательно, величина $A + iB$ есть аналитическая функция комплексной переменной $\rho + \sigma i$, а потому исчезает тождественно, если ее действительная часть A исчезает на некоторой замкнутой кривой, например, на границе, а мнимая часть B обращается в нуль в одной точке.

Для теории минимальных поверхностей существенны следующие два замечания, непосредственно вытекающие из предыдущего. Во-первых, *отображение плоскости ρ, σ на минимальную поверхность кокформно*.

Во-вторых, представлению минимальных поверхностей с помощью гармонических функций эквивалентно представление с помощью аналитической функции комплексной переменной

$$\rho + \sigma i = \omega,$$

ведущее свое начало от Вейерштрасса.

К так называемым формулам Вейерштрасса мы приходим, рассматривая гармонические функции x, y, u от ρ, σ как действительные части аналитических функций $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega)$ комплексной переменной ω .

Обозначая через $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}$ сопряженные гармонические функции, имеем:

$$x + i\tilde{x} = f_1(\omega), \quad y + i\tilde{y} = f_2(\omega), \quad u + i\tilde{u} = f_3(\omega).$$

На основании уравнений Коши-Римана

$$x_\sigma = -\tilde{x}_\rho, \quad y_\sigma = -\tilde{y}_\rho, \quad u_\sigma = -\tilde{u}_\rho,$$

откуда

$$x_\rho - ix_\sigma = f'_1(\omega), \quad y_\rho - iy_\sigma = f'_2(\omega), \quad u_\rho - iu_\sigma = f'_3(\omega),$$

и условия (16) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(\omega) = (E - G) - 2iF = \sum f'_v(\omega)^2 = 0.$$

Мы пришли, следовательно, к следующему результату. Все минимальные поверхности могут быть представлены с помощью уравнений

$$x = \Re f_1(\omega), \quad y = \Re f_2(\omega), \quad u = \Re f_3(\omega),$$

где \Re обозначает «действительную часть», а аналитические функции $f_v(\omega)$ подчинены условию

$$\sum_{v=1}^3 f'_v(\omega)^2 = 0.$$

Так как вместо ω можно ввести в качестве независимой переменной одну из этих функций, например, $f_3(\omega)$, то последняя формула, кроме того, показывает, что совокупность минимальных поверхностей по существу зависит лишь от одной единственной произвольной аналитической функции комплексного переменного.

§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных

1. Эллиптические, гиперболические и параболические дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения с числом независимых переменных, большим двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще, уже невозможно привести с помощью преобразования к простым нормальным формам для целой области независимых переменных¹⁾. Все же и для этих диффе-

1) Если мы, например, попытаемся, как в § 1, с помощью преобразования

$$\xi_i = t_i(x_1, \dots, x_n)$$

достигнуть того, чтобы в преобразованном выражении

$$\Lambda[u] = \sum_{i,k} a_{ik} u_{\xi_i \xi_k}$$

исчезали смешанные члены матрицы (a_{ik}) , то придется n функций t_i подчинить $\frac{1}{2} n(n-1)$ условиям [ср. ниже формулу (4)]:

$$\sum_{l,s} a_{ls} \frac{\partial t_k}{\partial x_l} \frac{\partial t_i}{\partial x_s} = 0 \quad (i \neq k).$$

Но эта система дифференциальных уравнений является при $\frac{1}{2} (n-1)n > n$, т. е. при $n > 3$, сверхопределенной, и, следовательно, в общем случае не-разрешимой. При $n = 3$ решение еще возможно, но в отличие от случая $n = 2$ здесь уже нет возможности подчинить дальнейшим условиям также и члены главной диагонали.