На основании уравнений Коши-Римана

$$x_\sigma = -\tilde{x}_\rho, \quad y_\sigma = -\tilde{y}_\rho, \quad u_\sigma = -\tilde{u}_\rho,$$

откуда

$$x_\rho - ix_\sigma = f_1'(\omega), \quad y_\rho - iy_\sigma = f_2'(\omega), \quad u_\rho - iu_\sigma = f_3'(\omega),$$

и условия (16) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(\omega) = (E - G) - 2iF = \sum f_\nu'(\omega)^2 = 0.$$

Мы пришли, следовательно, к следующему результату. Все минимальные поверхности могут быть представлены с помощью уравнений

$$x = \Re f_1(\omega), \quad y = \Re f_2(\omega), \quad u = \Re f_3(\omega),$$

где $\Re$ обозначает «действительную часть», а аналитические функции $f_\nu(\omega)$ подчинены условию

$$\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'(\omega)^2 = 0.$$

Так как вместо ω можно ввести в качестве независимой переменной одну из этих функций, например, $f_3(\omega)$, то последняя формула, кроме того, показывает, что совокупность минимальных поверхностей по существу зависит лишь от одной единственной произвольной аналитической функции комплексного переменного.

§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных

1. Эллиптические, гиперболические и параболические дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения с числом независимых переменных, большим двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще, уже невозможно привести с помощью преобразования к простым нормальным формам для целой области независимых переменных[1]). Все же и для этих диффе-

---

[1]) Если мы, например, попытаемся, как в § 1, с помощью преобразования

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n)$$

достигнуть того, чтобы в преобразованном выражении

$$\Lambda[u] = \sum_{i,k} a_{ik} u_{\xi_i \xi_k}$$

исчезали смешанные члены матрицы (a_{ik}), то придется n функций t_i подчинить $\frac{1}{2} n(n-1)$ условиям [ср. ниже формулу (4)]:

$$\sum_{l,s} a_{ls} \frac{\partial t_k}{\partial x_l} \frac{\partial t_i}{\partial x_s} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Но эта система дифференциальных уравнений является при $\frac{1}{2}(n-1)n > n$, т. е. при $n > 3$, сверхопределенной, и, следовательно, в общем случае неразрешимой. При $n = 3$ решение еще возможно, но в отличие от случая $n = 2$ здесь уже нет возможности подчинить дальнейшим условиям также и члены главной диагонали.

ренциальных уравнений существует аналогичная классификация фундаментальной важности.

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \ldots \tag{1}$$

и соответственно дифференциальное уравнение $L[u] = 0$, где коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$ — заданные, непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ в области G, а точки обозначают дифференциальные выражения ниже второго порядка. Выписанное выражение второго порядка мы и здесь назовем *главной частью дифференциального выражения*.

К классификации наших дифференциальных выражений мы приходим, исследуя влияние преобразования независимых переменных

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

на вид дифференциального выражения в определенной точке x_i. Полагая для краткости

$$t_{ik} = \frac{\partial t_i}{\partial x_k},$$

получаем:

$$u_{x_l} = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} u_{\xi_k}$$

и

$$u_{x_l x_s} = \sum_{k,\, i} t_{kl} t_{is} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots,$$

где многоточие опять означает выражение, в котором встречаются производные функции u не выше первого порядка. В результате этого преобразования дифференциальное выражение (1) переходит в выражение вида

$$\Lambda[u] = \sum \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \ldots, \tag{3}$$

коэффициенты которого преобразуются по закону

$$\alpha_{ik} = \sum_{l,\, s} t_{kl} t_{is} a_{ls}. \tag{4}$$

Следовательно, коэффициенты главной части нашего дифференциального выражения преобразуются в рассматриваемой точке $x_1, \ldots, x_n$ совершенно так же, как коэффициенты квадратичной формы, так называемой «*характеристической формы*»:

$$Q = \sum_{i,\, k} a_{ik} y_i y_k,$$

если в этой квадратичной форме подвергнуть неопределенные параметры y_i аффинному линейному преобразованию к новым параметрам η_i:

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} \eta_l. \tag{5}$$

Известно, что такая квадратичная форма всегда может быть преобразована, при помощи аффинного преобразования, к *«каноническому виду»*:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \eta_i^2,$$

коэффициенты которого имеют только лишь значения $+1$, -1 или нуль. При этом число отрицательных коэффициентов, *индекс инерции*, является аффинным инвариантом, так же, как и число исчезающих коэффициентов, — *«дефект»* квадратичной формы (ср. т. I, гл. I, § 3, п. 4). Сообразно с этим, упомянутые два числа будут иметь значение и для нашего дифференциального выражения в рассматриваемой точке.

Мы будем называть *дифференциальное выражение* в рассматриваемой точке *эллиптическим*, если все коэффициенты $\varkappa_i = 1$ или все $\varkappa_i = -1$. Мы его будем называть собственно гиперболическим или просто *«гиперболическим»*, если все коэффициенты $\varkappa_i$, кроме одного, равны -1, а этот остающийся коэффициент равен $+1$ или соответственно наоборот. Если имеется несколько положительных и несколько отрицательных коэффициентов, то иногда говорят об *ультрагиперболическом* случае. Если же один или несколько коэффициентов $\varkappa_i$ обращаются в нуль, то дифференциальное выражение (и соответственно дифференциальное уравнение) называется *параболически выродившимся*.

Если дифференциальное выражение в некоторой точке относится к эллиптическому типу, то с помощью надлежащего преобразования независимых переменных можно добиться того, чтобы дифференциальное уравнение приняло в *рассматриваемой точке* вид $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} + \ldots = 0$; в гиперболическом случае дифференциальное уравнение может быть преобразовано в рассматриваемой точке к виду $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_nx_n} + \ldots = 0$. Но, вообще говоря, невозможно достигнуть такой нормальной формы с помощью одного и того же преобразования для целой области, в которой дифференциальное уравнение принадлежит к соответствующему типу, так как преобразование к каноническому виду существенно зависит от точки (x_i) (см. выше стр. 156).

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Однако, если коэффициенты a_{ik} дифференциального выражения (1) постоянны, то приведенные выше соображения дают возможность достигнуть нормального вида, справедливого одновременно во всех точках соответствующей области, при помощи одного и того же преобразования. Для этой цели требуется лишь подвергнуть независимые переменные x_i аффинному преобразованию $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$ с такими коэффициентами, чтобы «характеристическая форма» приводилась преобразованием (5) к кано-

ническому виду. Дифференциальное уравнение $L[u]=0$, если вместо обозначений новых независимых переменных писать опять $x_1, \ldots, x_n$, примет тогда следующий вид:

$$\sum \varkappa_i u_{x_i x_i} + \ldots = 0. \tag{6}$$

Если не только главная часть второго порядка, но и все выражение $L[u]$ линейно и однородно, то дифференциальное уравнение приведется к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

где b_i и c — постоянные, а коэффициенты $\varkappa_i$ равны ± 1 или нулю соответственно.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно, с помощью дальнейшего преобразования, еще значительно упростить, освободившись от производных первого порядка по тем переменным x_i, для которых $\varkappa_i \neq 0$. Для этой цели мы отвлечемся от параболического случая и введем вместо u новую искомую функцию v с помощью соотношения

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l}. \tag{7}$$

После небольших выкладок дифференциальное выражение приведется к виду

$$L[u] = e^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_l}{\varkappa_l} x_l} \left[\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4}\sum \frac{b_l^2}{\varkappa_l}\right) v \right]. \tag{8}$$

Следовательно, при рассмотрении непараболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно ограничиться дифференциальными уравнениями вида

$$\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + dv = g(x_1, \ldots, x_n), \tag{9}$$

где g — какая-нибудь заданная функция независимых переменных, а d — постоянная. Следовательно, *все дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в эллиптическом случае приводятся к виду*

$$\Delta v + dv = g,$$

а *в гиперболическом случае*, если вместо n писать $n+1$ и положить $x_{n+1} = t$, — *к виду*

$$\Delta v - v_{tt} + dv = g(x_1, \ldots, x_n, t).$$

§ 4. Дифференциальные уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений

Совершенно аналогично дифференциальным уравнениям второго порядка можно, с помощью алгебраических же критериев, предпринять разбиение на различные типы и дифференциальных выражений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. При этом