

ническому виду. Дифференциальное уравнение  $L[u] = 0$ , если вместо обозначений новых независимых переменных писать опять  $x_1, \dots, x_n$ , примет тогда следующий вид:

$$\sum x_i u_{x_i x_i} + \dots = 0. \quad (6)$$

Если не только главная часть второго порядка, но и все выражение  $L[u]$  линейно и однородно, то дифференциальное уравнение приведется к виду

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

где  $b_i$  и  $c$  — постоянные, а коэффициенты  $x_i$  равны  $\pm 1$  или нулю соответственно.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами можно, с помощью дальнейшего преобразования, еще значительно упростить, освободившись от производных первого порядка по тем переменным  $x_i$ , для которых  $x_i \neq 0$ . Для этой цели мы отвлечемся от параболического случая и введем вместо  $u$  новую искомую функцию  $v$  с помощью соотношения

$$u = ve^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{x_i} x_i}. \quad (7)$$

После небольших выкладок дифференциальное выражение приведется к виду

$$L[u] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{x_i} x_i} \left[ \sum x_i v_{x_i x_i} + \left( c - \frac{1}{4} \sum \frac{b_i^2}{x_i} \right) v \right]. \quad (8)$$

Следовательно, при рассмотрении непараболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно ограничиться дифференциальными уравнениями вида

$$\sum x_i v_{x_i x_i} + dv = g(x_1, \dots, x_n), \quad (9)$$

где  $g$  — какая-нибудь заданная функция независимых переменных, а  $d$  — постоянная. Следовательно, все дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в эллиптическом случае приводятся к виду

$$\Delta v + dv = g,$$

а в гиперболическом случае, если вместо  $n$  писать  $n+1$  и положить  $x_{n+1} = t$ , — к виду

$$\Delta v - v_{tt} + dv = g(x_1, \dots, x_n, t).$$

#### § 4. Дифференциальные уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений

Совершенно аналогично дифференциальным уравнениям второго порядка можно, с помощью алгебраических же критериев, предпринять разбиение на различные типы и дифференциальных выражений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. При этом

вместо алгебраической характеристической формы *второго порядка* появится соответствующая алгебраическая форма *высшего порядка*.

**1. Дифференциальные уравнения высшего порядка.** Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка  $k$

$$L(u) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} + \dots = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{i_1 \dots i_n}$  *главной части*, т. е. выражения, содержащего производные порядка  $k$ , являются заданными функциями независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$  в рассматриваемой области  $G$ . Этому дифференциальному уравнению и соответственно дифференциальному выражению  $L[u]$  мы отнесем следующую однородную форму *порядка  $k$* , зависящую от переменных  $y_1, \dots, y_n$ :

$$C(y) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1 \dots i_n} y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n},$$

так называемую *характеристическую форму*, причем точка  $x_1, \dots, x_n$  рассматривается как постоянная. Если, подобно предыдущему, подвергнуть независимые переменные  $x_1, \dots, x_n$  преобразованию

$$\xi_i = \xi_i(x_1, \dots, x_n); \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} = t_{il}, \quad (2)$$

то получим:

$$L[u] = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{i_1} \dots \partial \xi_n^{i_n}} + \dots, \quad (3)$$

где точки обозначают выражения, содержащие производные более низкого порядка от неизвестной функции  $u$ , а коэффициенты  $a_{i_1 \dots i_n}$  нового дифференциального выражения получаются из коэффициентов  $a_{i_1 \dots i_n}$  первоначального с помощью преобразования

$$a_{i_1 \dots i_n} = \sum_{l_1, \dots, l_n} a_{l_1 \dots l_n} t_{i_1 l_1} \dots t_{i_n l_n}. \quad (4)$$

Это можно также выразить и следующим образом. Для характеристической формы при аффинном преобразовании

$$y_i = \sum_l t_{il} \eta_l \quad (5)$$

справедливо тождество

$$C(y) = \sum a_{i_1 \dots i_n} y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n} = \sum a_{i_1 \dots i_n} \eta_1^{i_1} \dots \eta_n^{i_n}.$$

В силу этого те свойства формы  $C$  порядка  $k$ , которые остаются неизменными при аффинном преобразовании независимых переменных  $y_1, \dots, y_n$ , будут характеристическими признаками нашего дифференциального выражения и притом признаками, общими всем дифференциальным выражениям, получающимся из первоначального при помощи преобразования независимых переменных. Естественно поэтому

использоваться такими *аффинно-инвариантными свойствами характеристической формы*. С в качестве характеристических признаков для классификации дифференциальных уравнений высшего порядка.

Рассмотрим, в частности, алгебраический «характеристический» конус  $k$ -го порядка в пространстве  $y_1, \dots, y_n$ , определяемый для всякой фиксированной точки уравнением

$$C = 0. \quad (6)$$

Это дает нам возможность установить следующую классификацию.

В том случае, если характеристический конус  $C = 0$  не имеет действительных точек, за исключением нулевой точки  $y_1 = \dots = y_n = 0$ , т. е. в том случае, когда  $C$  есть положительно или отрицательно определенная форма (свойство, инвариантное по отношению к аффинным преобразованиям), то дифференциальное выражение  $L[u]$  называется *эллиптическим* в рассматриваемой точке или соответственно в рассматриваемой области  $G$ .

Если в точке  $x_1, \dots, x_n$  форма  $C$  может быть преобразована с помощью аффинного преобразования в форму  $k$ -го порядка, зависящую от меньшего, чем  $n$ , числа переменных, то дифференциальное выражение называется *параболически вырождающимся* в рассматриваемой точке. В этом случае можно преобразованием независимых переменных в рассматриваемой точке привести дифференциальное выражение к такому виду, в который входят производные порядка  $k$  лишь по  $n - 1$  или меньшему числу независимых переменных.

Дальнейшие типы дифференциальных уравнений различают по свойствам действительности или минимости, связанным с конусом  $C = 0$ .

В частности, дифференциальное выражение  $L[u]$  мы будем называть *вполне гиперболическим* или *тотально гиперболическим* в рассматриваемой точке, если имеет место следующее свойство: возможно (в случае нужды — после надлежащего преобразования переменных) выделить в рассматриваемой точке одну переменную, например,  $y_n = s$ , таким образом, чтобы алгебраическое уравнение, получающееся для  $s$  из  $C = 0$ , при произвольном выборе переменных  $y_1, \dots, y_{n-1}$ , имело  $k$  действительных корней, причем допускаются также и кратные корни.

Примером эллиптического типа является дифференциальное уравнение

$$\Delta u = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_i \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + 2 \sum_{i < k} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_k^2}.$$

Характеристический конус имеет здесь уравнение

$$C = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 = 0.$$

Другим примером эллиптического дифференциального уравнения может служить уравнение

$$\sum \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0$$

с характеристической формой

$$C = \sum y_i^4.$$

Примером параболически выродившегося дифференциального уравнения является уравнение

$$u_t = \Delta \Delta u,$$

причем  $n$  заменено через  $n+1$  и переменная  $x_{n+1} = t$  выделена. Характеристическая форма для этого дифференциального уравнения есть

$$C = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2$$

и, следовательно, не содержит переменной  $y_{n+1} = s$ .

Тотально гиперболическим дифференциальным выражением является следующее:

$$\left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = \Delta \Delta u - 3 \Delta u_{tt} + 2 u_{ttt}.$$

Характеристическая форма с переменными  $y_1, \dots, y_n$ ,  $s$  имеет вид

$$C = (\sum y_i^2 - s^2)(\sum y_i^2 - 2s^2)$$

и, очевидно, обладает требуемым свойством. Напротив, дифференциальное выражение

$$\left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = \Delta \Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

не является ни эллиптическим, ни параболическим, но оно не относится и к totally гиперболическому типу, так как форма

$$C = (\sum y_i^2)^2 - s^4$$

имеет при фиксированных значениях переменных  $y_1, \dots, y_n$  лишь два, а не четыре действительных корня  $s$ .

**2. Классификация систем дифференциальных уравнений.** Многие задачи математической физики приводят к системе дифференциальных уравнений и притом к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому заслуживает быть отмеченым тот факт, что и для систем дифференциальных уравнений можно очень просто предпринять классификацию на эллиптические, параболические и другие, в особенности гиперболические, типы.

Пусть  $u_1, \dots, u_m$  —  $m$  искомых функций от  $n$  независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ , рассматриваемых как компоненты «функционального вектора»  $u$ . Пусть  $m^2$  выражений

$$L_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{ik}^r \frac{\partial}{\partial x_r} \quad (7)$$

будут линейными однородными дифференциальными выражениями первого порядка, причем  $nm^2$  коэффициентов  $a'_{ik}$  — заданные функции от  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть, далее,  $g_1, \dots, g_m$ , рассматриваемые как компоненты функционального вектора  $g$ , — заданные функции независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$  и величин  $u_1, \dots, u_m$ ; при этом нет нужды функции  $g_1, \dots, g_m$  предполагать линейными относительно величин  $u_1, \dots, u_m$ . В указанных обозначениях рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^m L_{ik}[u_k] = g_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (8)$$

которую можно представить в сокращенной записи

$$\sum_{r=1}^n A^r \frac{\partial u}{\partial x_r} = g, \quad (9)$$

введя в рассмотрение матрицы  $(a'_{ik}) = A^r$ .

Такой системе дифференциальных уравнений мы относим — для фиксированной точки  $x_1, \dots, x_n$  — «характеристическую» форму, однородную степени  $m$  относительно переменных  $y_1, \dots, y_n$

$$C(y) = \begin{vmatrix} \sum a'_{11}y_r & \sum a'_{12}y_r & \dots & \sum a'_{1m}y_r \\ \sum a'_{21}y_r & \sum a'_{22}y_r & \dots & \sum a'_{2m}y_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a'_{m1}y_r & \sum a'_{m2}y_r & \dots & \sum a'_{mm}y_r \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Нетрудно установить следующие факты. При преобразовании независимых переменных в дифференциальных уравнениях возникает новая система дифференциальных уравнений, характеристическая форма которой тождественна форме  $C$ , если одновременно подвергнуть переменные  $y_i$  аффинному преобразованию (5). Далее, если заменить нашу систему дифференциальных уравнений эквивалентной системой, составленной из  $m$  не зависящих друг от друга линейных комбинаций данных дифференциальных уравнений, то форма  $C$  умножается лишь на определитель матрицы коэффициентов этой линейной комбинации. Наконец, если неизвестные функции  $u_i$  заменить какими-либо их линейными комбинациями, то форма  $C$  также остается неизменной с точностью до множителя, равного определителю матрицы коэффициентов этой системы линейных комбинаций. Приходим, следовательно, к следующему результату:

Алгебраический конус  $C = 0$  инвариантно сопряжен системе дифференциальных уравнений в том смысле, что остается неизменным при преобразовании независимых переменных в дифференциальных уравнениях и одновременном соответствующем аффинном преобразовании (5) величин  $y_i$ ; он также не изменяется,

если от данной системы дифференциальных уравнений перейти к эквивалентной системе, введенной новых линейных комбинаций дифференциальных уравнений и искомых функций.

Тем самым мотивировано следующее подразделение на типы, которые всегда впрочем относятся к определенной точке  $x_1, \dots, x_n$ .

Если при помощи подходящего преобразования (5) форма  $C$  может быть приведена к виду, зависящему от меньшего, чем  $n$ , числа переменных, то система дифференциальных уравнений называется *парabolически выродившейся*.

При отсутствии вырождения системы дифференциальных уравнений называется *эллиптической*, если алгебраический конус  $C = 0$  не имеет действительных точек, кроме вершины.

Система дифференциальных уравнений называется *вполне гиперболической* или *тотально гиперболической*, если удовлетворяется — в случае надобности, после выполнения надлежащего (линейного) преобразования переменных  $x_i$  (соответственно  $y_i$ ) — следующее условие. При выборе произвольных значений величин  $y_1, \dots, y_{n-1}$  получающееся для  $y_n$  алгебраическое уравнение  $C = 0$  степени  $m$  должно иметь  $m$  действительных, не обязательно различных, корней.

Этот тотально гиперболический случай бывает, в частности, тогда, когда перед нами «*гиперболическая нормальная форма*». Под этим мы разумеем, что матрицы  $A^r$  симметричны и что одна из матриц, скажем,  $A = A_{n+1}$  (мы здесь опять рассматриваем  $n+1$  переменную вместо  $n$  и полагаем  $x_{n+1} = t$ ), положительно определенная. В этом случае, с помощью подходящего ортогонального преобразования, сохраняющего симметрию, можно достигнуть того, чтобы последняя матрица перешла в положительно определенную диагональную матрицу; но тогда из уже известных теорем (действительность корней векового уравнения) вытекает, что имеет место гиперболический случай.

Простейший пример эллиптической системы доставляют условия Коши-Римана или, общее, дифференциальные уравнения Бельтрами (ср. стр. 147):

$$\begin{aligned} Wu_y + av_x + bv_y &= 0, \\ -Wu_x + bv_x + cv_y &= 0, \end{aligned}$$

причем матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

предполагается положительно определенной.

Матрица операторов ( $L_{ik}$ ) имеет здесь вид

$$(L_{ik}) = \begin{pmatrix} W \frac{\partial}{\partial y} & a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \\ -W \frac{\partial}{\partial x} & b \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

а соответствующая характеристическая форма выглядит так:

$$C(y) = \begin{vmatrix} Wy_2 & ay_1 + by_2 \\ -Wy_1 & by_1 + cy_2 \end{vmatrix} = W(ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2);$$

в частности, для уравнений Коши-Римана  $W = 1$ ,  $a = c = 1$ ,  $b = 0$  и

$$C(y) = (y_1^2 + y_2^2).$$

Гиперболический случай мы имеем в системе дифференциальных уравнений Максвелла, которая в простейшем случае, для эфира, если принять скорость света за единицу, имеет следующий вид:

$$\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

При этом  $\mathfrak{E} = (u_1, u_2, u_3)$  есть электрический вектор,  $\mathfrak{H} = (u_4, u_5, u_6)$  — магнитный вектор; для четвертой переменной, времени, пишем  $t$  вместо  $x_4$ . Записав нашу систему дифференциальных уравнений в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{\partial u_6}{\partial y} - \frac{\partial u_5}{\partial z}; & -\frac{\partial u_4}{\partial t} &= \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial u_4}{\partial z} - \frac{\partial u_6}{\partial x}; & -\frac{\partial u_5}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial u_5}{\partial x} - \frac{\partial u_4}{\partial y}; & -\frac{\partial u_6}{\partial t} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

получим в качестве операторной матрицы

$$(L_{ik}) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получается характеристическое уравнение в переменных  $y_1, y_2, y_3, y_4 = s$  сначала с помощью определителя

$$C(y) = \begin{vmatrix} -s & 0 & 0 & 0 & -y_3 & y_2 \\ 0 & -s & 0 & y_3 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & -s & -y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & -y_2 & -s & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & y_1 & 0 & -s & 0 \\ y_2 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0,$$

а затем, по выполнении вычислений, в следующем виде:

$$C = s^2(s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 = 0.$$

И «волновое уравнение»  $u_{tt} - \Delta u = 0$ , которому удовлетворяет каждая из компонент  $u_1, \dots, u_6$ , имеет характеристическое соотношение того же вида:  $s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$ . Это обстоятельство основывается на следующем факте, доказательство которого мы предлагаем в качестве задачи. Если из системы дифференциальных уравнений методом исключения получается одно единственное дифференциальное уравнение (для одной из искомых функций), то характеристический конус  $C = 0$  последнего всегда содержится в характеристическом уравнении исходной системы<sup>1)</sup>.

Для дифференциальных уравнений Дирака справедлив результат, аналогичный полученному для уравнений Максвелла. Уравнения Дирака относятся к системе четырех комплексных функций  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  от четырех переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4 = ct$ . Для того, чтобы их сформулировать, вводят в рассмотрение следующие матрицы:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц уравнение Дирака записывается так:

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - \alpha_k \right) u - \beta b u = 0.$$

При этом вектор  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  пропорционален вектору-потенциалу,  $-\alpha_4$  пропорционально скалярному потенциалу, а  $b$  — энергии покоя.

<sup>1)</sup> Эту теорему можно обобщить, если установить характеристические формы и для систем дифференциальных уравнений высших порядков.

Согласно нашим правилам характеристический определитель в развернутом виде дает следующую форму четвертой степени в переменных  $y_1, y_2, y_3, y_4$ :

$$C(v) = \left| \sum_{k=1}^4 a_{ik} y_k \right| = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2)^2.$$

Следовательно, характеристический конус опять тот же, что и для волнового уравнения.

В заключение заметим, что как результаты предыдущего параграфа, так и п. 1 настоящего параграфа могут быть вновь получены, исходя из усвоенной ныне точки зрения. Если, например, заменить дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \dots = 0$$

ниже следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \quad (l = 1, \dots, n-1),$$

$$\sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \dots = 0,$$

то для этой системы получим характеристическое условие

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} y_k & \sum_{k=1}^n a_{2k} y_k & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} y_k \\ y_n & 0 & \dots & -y_1 \\ 0 & y_n & \dots & -y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_n, -y_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

которое, по вычислению определителя, принимает вид

$$(-1)^{n-1} y_n^{n-2} \sum a_{ik} y_i y_k = 0$$

в согласии с полученным ранее результатом.

**3. Замечания о нелинейных задачах.** Так же как и в случае  $n=2$ , возможно обобщение нашей классификации на нелинейные дифференциальные выражения и при произвольном  $n$ ; правда, при этом мы должны отказаться от общего установления простых нормальных видов. Сейчас мы ограничимся указанием на случай квазилинейного дифференциального выражения второго порядка

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(p_i, u, x_i) u_{x_i x_k} + \dots$$

И здесь деление на типы в точке  $x_i, p_i$ , и пространства  $(x, p, u)$   $2n+1$  измерений производится на основании характера инерции определенной в этой точке квадратичной формы

$$\sum a_{ijk} y_j y_k$$

зависящей от неопределенных параметров  $y_i$ .

Аналогичный вывод справедлив для систем первого порядка и для других квазилинейных задач высшего порядка. К этим вопросам мы еще вернемся позднее в гл. VI, в рамках общей теории характеристик.

## § 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**1. Общие соображения.** В § 3 мы занимались преобразованием линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к простым нормальным формам. Теперь мы займемся исследованием структуры самих решений. При этом решающее значение будет иметь понятие волн; в частности, мы будем иметь возможность трактовать решения дифференциальных уравнений как наложение (суперпозицию) таких волн. Однако, в то время как в общем случае возможность преобразования к нормальным формам существенным образом основывается на том, что порядок дифференциального уравнения равен двум, нижеследующие соображения, касающиеся построения решения из волн, справедливы также и для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Мы будем при этом рассматривать  $n+1$  независимое переменное и сохраним за собою право писать  $x_{n+1} = t$ , отличая, в случае необходимости, эту последнюю переменную как временнюю координату.

Общее линейное дифференциальное уравнение порядка  $k$  записывается так:

$$L[u] = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n+1}=k} a_{i_1 \dots i_{n+1}} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_{n+1}^{i_{n+1}}} + \dots = 0, \quad (1)$$

причем многоточие обозначает опять дифференциальное выражение порядка ниже  $k$ , а сумма, выписанная явно, есть главная часть дифференциального уравнения. Характеристический конус

$$C(y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum a_{i_1 \dots i_{n+1}} y_1^{i_1} \dots y_{n+1}^{i_{n+1}} = 0$$

не зависит здесь от точки  $x_1, \dots, x_{n+1}$  ( $n+1$ )-мерного пространства  $x, t$ , которое мы обозначим через  $\mathfrak{N}_{n+1}$ .

Дифференциальное уравнение (1) можно записать в следующем символическом виде:

$$\left( P_k \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + P_{k-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \dots + P_0 \right) u + g = 0, \quad (2)$$