И здесь деление на типы в точке x_i, p_i, u пространства (x, p, u) $2n+1$ измерений производится на основании характера инерции определенной в этой точке квадратичной формы

$$\sum a_{ik} y_i y_k,$$

зависящей от неопределенных параметров y_i.

Аналогичный вывод справедлив для систем первого порядка и для других квазилинейных задач высшего порядка. К этим вопросам мы еще вернемся позднее в гл. VI, в рамках общей теории характеристик.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Общие соображения. В § 3 мы занимались преобразованием линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к простым нормальным формам. Теперь мы займемся исследованием структуры самих решений. При этом решающее значение будет иметь понятие волны; в частности, мы будем иметь возможность трактовать решения дифференциальных уравнений как наложение (суперпозицию) таких волн. Однако, в то время как в общем случае возможность преобразования к нормальным формам существенным образом основывается на том, что порядок дифференциального уравнения равен двум, нижеследующие соображения, касающиеся построения решения из волн, справедливы также и для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Мы будем при этом рассматривать $n+1$ независимое переменное и сохраним за собою право писать $x_{n+1} = t$, отличая, в случае надобности, эту последнюю переменную как временную координату.

Общее линейное дифференциальное уравнение порядка k запишется так:

$$L[u] = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{n+1}=k} a_{i_1 \ldots i_{n+1}} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_{n+1}^{i_{n+1}}} + \ldots = 0, \tag{1}$$

причем многоточие обозначает опять дифференциальное выражение порядка ниже k, а сумма, выписанная явно, есть *главная часть* дифференциального уравнения. Характеристический конус

$$C(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum a_{i_1 \ldots i_{n+1}} y_1^{i_1} \ldots y_{n+1}^{i_{n+1}} = 0$$

не зависит здесь от точки $x_1, \ldots x_{n+1}$ $(n+1)$-мерного пространства x, t, которое мы обозначим через $\mathfrak{R}_{n+1}$.

Дифференциальное уравнение (1) можно записать в следующем символическом виде:

$$\left(P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + P_{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \ldots + P_0\right) u + g = 0, \tag{2}$$

где P_j есть однородный полином степени j относительно символов $\frac{\partial}{\partial x_i}$, а g — заданная функция независимых переменных. Мы будем преимущественно рассматривать случай однородного уравнения, т. е. случай $g = 0$.

В силу постоянства коэффициентов, одновременно с решением $u(x_1, x_2, \ldots)$ однородного уравнения будут всегда также решениями и функция $u(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots)$ при произвольных значениях ξ_i, и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. Плоские волны. Отсутствие искажения. Дисперсия. В связи с теорией собственных значений мы ранее, в гл. V первого тома, рассмотрели *стоячие волны*. Мы их определили как такие решения линейного дифференциального уравнения, которые могут быть представлены в виде произведения множителя $p(t)$, зависящего только от времени t, на функцию $f(x)$, зависящую лишь от пространственных переменных x_i, рассматриваемых совместно как вектор x:

$$u(x, t) = p(t) f(x).$$

Функция $f(x)$ дает тогда форму стоячей волны.

Однако, для нас теперь исходным пунктом будут не стоячие, а *проходящие волны*, и именно *плоские волны*. Под *проходящей* или *поступательной плоской волной* для однородного линейного дифференциального уравнения $L[u] = 0$ мы понимаем решение вида

$$u = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\right) = f(A - bt) = f(ax - bt) = f(B), \qquad (3)$$

где для сокращения положено

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x) = ax, \quad B = A - bt \text{ [1]}.$$

Такие плоские волны u имеют постоянные значения на каждой плоскости семейства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt = \text{const}.$$

в $n+1$-мерном пространстве x, t.

Для того, чтобы мотивировать термин «*проходящая* (*поступательная*) *волна*», будем рассматривать, вместо $n+1$-мерного пространства, n-мерное пространство $\mathfrak{R}_n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, а величину u как «функцию состояния» этого пространства $\mathfrak{R}_n$, изменяющуюся со временем t.

Тогда решение вида (3) представляет состояние, которое остается всегда одним и тем же вдоль всей плоскости, принадлежащей неко-

---

[1]) Ниже, в гл. VI, § 10 мы будем трактовать понятие проходящей волны значительно общее.

торой системе параллельных плоскостей (*плоскость равной фазы*), причем эта плоскость равной фазы, соответствующая определенному значению функции состояния, движется параллельно самой себе с постоянной скоростью в этом пространстве $\mathfrak{R}_n$.

Полагая для наших плоских волн

$$a_l = a\alpha_l, \qquad \sum \alpha_l^2 = 1, \qquad a^2 = \sum a_l^2, \qquad b = a\beta,$$

$$A - bt = a\left(\sum \alpha_i x_i - \beta t\right) = a(Q - \beta t),$$

мы приходим к следующей записи:

$$u = f(A - bt) = \varphi(Q - \beta t),$$

причем величины α_l — направляющие косинусы волновой нормали, а β — скорость распространения волны. Выражение $Q - \beta t$ называется *фазой волны*, функция φ и f соответственно — *формой волны*.

Например, простейшее волновое уравнение второго порядка

$$\Delta u - u_{tt} = 0$$

имеет плоские волны вида

$$u = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l x_l - t\right),$$

где коэффициенты α_l могут быть произвольные числа, удовлетворяющие равенству $\sum \alpha_l^2 = 1$, а форма волны φ может быть произвольной функцией.

Другими словами:

Волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ имеет плоские волны произвольного направления и произвольно заданной формы, причем все они распространяются со скоростью 1.

Напротив, совершенно иначе обстоит дело у дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + cu = 0 \tag{4}$$

с коэффициентом c, отличным от нуля. Если $f(B)$, где $B = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt$, есть соответствующая плоская волна, то для формы волны $f(B)$ легко получается следующее уравнение:

$$f''(B)(a^2 - b^2) + f(B)c = 0, \tag{5}$$

следовательно, — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для скорости $\beta = 1$, т. е. при $b^2 = a^2$, теперь, очевидно, уже не существует проходящих волн; однако же, для всякой другой скорости и для произвольного направления, из уравнения (5) определяются возможные формы волны как показательные функции. Таким образом, *в случае дифференциального уравнения* (4) *направление и скорость распространения волны, принадлежащей дифференциальному уравнению* (*отвлекаясь от исключительного значения* 1), *могут быть произвольно заданы; однако, для поступательных волн возможны лишь специальные формы волны.*

Первый случай, дифференциального уравнения второго порядка $\Delta u - u_{tt} = 0$, называется случаем, *свободным от искажения* или случаем *отсутствия дисперсии*, потому что в этом случае волны *произвольно* заданной формы распространяются без искажений, притом с определенной скоростью; второй случай, дифференциального уравнения (4), называется *случаем дисперсии* по следующей причине: если рассматриваемое решение u является суперпозицией ряда проходящих волн с одним и тем же направлением распространения, форма которых ограничена условием (5), то разные компоненты будут распространяться с различными скоростями. Таким образом, форма волны, существующая при $t = 0$, изменяется с изменением t.

В точности соответствующая ситуация и та же самая альтернатива имеются у любого линейного дифференциального уравнения порядка k вида (2). Возможные плоские волны находим, подставляя в дифференциальное уравнение (2) $u = f(A - bt)$; для того, чтобы получить наглядное соотношение, пишем: $-b = a_{n+1}$ и, следовательно, $A - bt = B = \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu x_\nu$, после чего имеем:

$$f^{(k)}(B)\,P_k(a_1, \ldots, a_{n+1}) + f^{(k-1)}(B)\,P_{k-1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) + \ldots + \\ + f(B)\,P_0 = 0. \tag{6}$$

Теперь имеет место следующая *альтернатива*: либо первоначальное дифференциальное уравнение (2) состоит из одной лишь главной части, т. е. полиномы P_j тождественно равны нулю при $j < k$; либо в дифференциальном уравнении встречаются производные порядка ниже k.

В первом случае форма $f(B)$ проходящей волны может быть произвольно выбрана; если только коэффициенты a_i подчинены характеристическому условию

$$C(a_1, \ldots, a_{n+1}) = P_k(a_i) = 0, \tag{7}$$

то функция $u = f(B)$ является решением дифференциального уравнения (1) [1]. Условие (7) есть однородное уравнение степени k для величин a_i и, следовательно, неоднородное уравнение степени k для отношений $\frac{a_i}{a_{n+1}} = -\frac{a_i}{b}$. Для заданных значений $a_1, \ldots, a_n$ или, что то же самое, для произвольно заданного $a = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ и произвольного направления $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует, следовательно, конечное число, не более, чем k, значений скорости β распространения волны. В нашем случае имеющаяся при $t = 0$ начальная произвольная форма плоской волны $u = f(\sum_1^n a_i x_i)$ распространяется во

[1]) Возможное решение — функция f равна любому полиному $(k-1)$-ой степени с произвольными коэффициентами a_i — не представляет интереса, ибо оно отнюдь не остается ограниченным в бесконечности.

всяком произвольно выбранном направлении абсолютно без искажения, причем, для скорости распространения в любом направлении возможно лишь конечное число k или меньше значений. Между величинами, характеризующими направление, и скоростью поступательной волны существует, независимо от формы волны, в качестве необходимого и достаточного условия, алгебраическое соотношение (7).

Второй случай нашей альтернативы имеет место, когда уравнение (2) содержит больше одного члена. В этом случае уравнение (6) при заданных значениях a_i имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами для формы волны $f(B)$, не считая разве таких особых систем значений $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, при которых уравнение (6) вырождается в том смысле, что все выражения P_j исчезают, за исключением, самое большее, коэффициента P_0. Если отвлечься от этих исключительных значений, то для всякого произвольного направления и скорости распространения существуют проходящие волны, однако только такие, форма которых ограничена обыкновенным дифференциальным уравнением (6); следовательно, эти волны могут быть представлены как суперпозиция, самое большее, k экспоненциальных выражений вида $f = e^B$.

Следовательно, дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ имеет решения

$$u = e^{a\left(\sum_1^n \alpha_i x_i - \beta t\right)} = e^{\sum_1^n a_i x_i - bt} = e^{\sum_1^{n+1} a_i x_i},$$

причем коэффициенты подчинены лишь условию

$$\sum_{j=0}^{k} P_j(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \tag{8}$$

и обратно. Это уравнение (8) при произвольных α_i и β представляет собой уравнение степени k для величины a.

Резюмируя, можно формулировать следующий общий результат: *Либо дифференциальное уравнение содержит лишь производные наивысшего, в нем встречающегося порядка; в этом случае существуют плоские волны произвольно заданной формы, распространяющиеся без искажения, если только выполняется алгебраическое соотношение* (7) *между направлением и скоростью, определяющее для заданного направления скорость распространения, самое большее, k-значно (случай без дисперсии). Либо в дифференциальном уравнении имеются производные различных порядков; в таком случае можно задать произвольно направление и скорость проходящих волн; однако, для каждой такой системы направляющих коэффициентов и скорости, возможная форма волны ограничивается обыкновенным дифференциальным уравнением* (6), *если отвлечься от исключительного случая, когда для специальной системы значений направления и скорости $P_j(a_i) = 0$ при $j > 0$, причем либо вообще невозможны проходящие волны, либо возможны волны произвольной формы (случай дисперсии).*

В приведенном выше примере (4) для дисперсионного случая такое исключение представляет всякое произвольное направление со скоростью 1, причем вообще невозможны поступательные волны. Пример дифференциального уравнения

$$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} - u_t = 0$$

также иллюстрирует дисперсионный случай. Исключительные значения для направления и скорости даются условиями

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - b^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i + b = 0.$$

Если эти условия выполнены, то существуют проходящие волны произвольной формы. Все они распространяются со скоростью 1, но отличаются той особенностью, что их направления должны принадлежать конусу

$$\sum_{i \neq k} a_i a_k = 0.$$

В случае дисперсии понятие волны ограничивают еще дополнительным требованием, чтобы волна u оставалась ограниченной для всякого времени t и всего n-мерного пространства $\mathfrak{R}_n$. Отсюда вытекает, что при вещественных значениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и β решение должно иметь вид

$$e^{i\omega(\sum \alpha_i x_i - \beta t)}, \tag{9}$$

т. е. величина $a = i\omega$ должна быть чисто мнимой. Следовательно, *в случае дисперсии эти плоские волны являются периодическими процессами во времени и в пространстве.* Решения, удовлетворяющие этому дополнительному требованию: быть всюду ограниченными, т. е. только решения вида (9) называются в дисперсионном случае плоскими волнами в собственном смысле. Для этих волн приняты следующие термины: β называется фазовой скоростью, ω — частотой, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ — длиной волны.

Наряду с этими волнами в собственном смысле слова встречаются еще *несобственные* (затухающие и нарастающие) *волны*, которые еще остаются, правда, ограниченными во всем n-мерном пространстве $\mathfrak{R}_n$ при фиксированном t и при бесконечном его возрастании в одном направлении, но уже не удовлетворяют условию ограниченности при бесконечном возрастании t в другом направлении. Это — волны, для которых $b = \left(p - i\frac{q}{\omega}\right) i\omega = pi\omega + q$ есть величина комплексная с $p \neq 0$, т. е. волны вида

$$e^{-qt} e^{i\omega(\sum \alpha_i x_i - pt)}.$$

Величина q называется *коэффициентом затухания*. Положительное q соответствует затухающему процессу, отрицательное q — экспонен-

циально нарастающему, *«раскачиваемому»* процессу. Такие несобственные волны, очевидно, уже не являются чисто периодическими во времени.

3. Примеры: телеграфное уравнение, отсутствие искажения у кабелей. Волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \Delta u$$

принадлежит к случаю, свободному от дисперсии. Поступательные плоские волны со скоростью c и произвольной формой $\varphi(\sum \alpha_i x_i - ct)$, $\sum \alpha_i^2 = 1$, возможны во всяком направлении.

Другой особенно важный пример представляет телеграфное уравнение

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (\alpha + \beta) u_t + \alpha\beta u = 0, \tag{10}$$

которому удовлетворяет напряжение или сила тока как функция времени t и положения x вдоль двойного кабеля, где x — длина кабеля, отсчитываемая от некоторой начальной точки [1]).

Это уравнение принадлежит (за исключением случая $\alpha = \beta = 0$) к дисперсионному случаю. С помощью подстановки

$$v = e^{\frac{\alpha+\beta}{2} t} u,$$

в согласии с общим принципом из § 3, п. 2, его можно привести к более простому уравнению для функции v:

$$v_{tt} - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 v - c^2 v_{xx} = 0.$$

Для этого нового уравнения, согласно ранее полученному результату, случай отсутствия дисперсии имеет место тогда и только тогда, если

$$\alpha = \beta. \tag{11}$$

---

[1]) Это дифференциальное уравнение получается из следующей системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для силы тока i и напряжения u как функций от x и t:

$$Cu_t + Gu + i_x = 0,$$
$$Li_t + Ri + u_x = 0$$

посредством исключения одной из неизвестных функций. При этом L есть самоиндукция кабеля, R — его сопротивление, C — емкость и, наконец, G — утечка кабеля (потеря тока, деленная на напряжение). Все эти величины L, R, C и G рассчитаны на единицу длины кабеля. Следовательно, в уравнении (10), получающемся после исключения, постоянные имеют следующие значения:

$$\frac{1}{c^2} = LC,$$

$$\alpha = \frac{G}{C}, \qquad \beta = \frac{R}{L}.$$

При этом c есть скорость света, α называется емкостным, β — индуктивным коэффициентом затухания.

В этом случае исходное телеграфное уравнение не имеет, правда, абсолютно свободных от искажений волновых решений произвольно заданной формы. Однако, при выполнении условия (11) телеграфное уравнение обладает затухающими, т. е. «относительно» свободными от искажений волновыми решениями вида

$$u = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} f(x \pm ct) \tag{12}$$

с произвольной функцией f, распространяющимися по обоим направлениям кабеля.

На этом результате, чрезвычайно важном для кабельной телеграфии, основывается тот факт, что при надлежащем подборе емкости и самоиндукции кабеля возможна передача сигналов в пропорционально неискаженной форме, хотя и с наличием множителя, затухающего со временем (ср. также дополнения).

4. Цилиндрические и сферические волны. С помощью принципа наложения, мы покажем на примерах, как из плоских волн получаются другие важные формы решений, именно так называемые *цилиндрические и сферические волны*.

а) Цилиндрические волны. Для волнового уравнения в двух пространственных измерениях

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{13}$$

функция $e^{i\omega(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)} e^{i\omega t}$ является решением при любом значении ϑ, причем ω — произвольно выбранное число. Это — плоская волна, распространяющаяся по направлению, определяемому полярным углом ϑ. Интегрируя эту «плоскую волну» по полярному углу ϑ, получим новое решение

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} e^{i\omega r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta = 2\pi e^{i\omega t} J_0(\omega r),$$

причем мы ввели полярную координату r с помощью формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Это решение имеет форму *стоячей волны*.

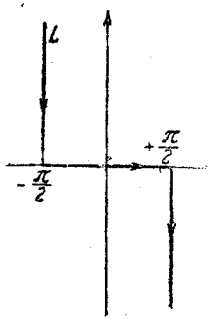
Следовательно, *функция Бесселя* $J_0(\omega r)$ *дает форму решения волнового уравнения* (13), *обладающую вращательной симметрией вокруг оси*, так называемую *цилиндрическую волну*. Это решение регулярно в нулевой точке $r = 0$. Однако, посредством суперпозиции плоских волн можно получить также решение, для которого начало является особой точкой; такое решение соответствует *процессу излучения* (ср. § 6) *с источником в начале координат*. Но для этого требуется суперпозиция также и несобственных волн. Действительно, пусть L (ср. т. I, гл. VII) обозначает путь интегрирования в комплексной плоскости ϑ, изображенный на черт. 4; интегрируя по

этому пути, получим, в качестве решения волнового уравнения, выражение

$$u = e^{i\omega t} \int_L e^{i\omega r \cos\vartheta} d\vartheta = \pi e^{i\omega t} H_0^1(\omega r),$$

где H_0^1 означает функцию Ганкеля.

И та и другая цилиндрическая волна являются, естественно, периодическими функциями времени t, в отношении же пространственной переменной r они являются осциллирующими, но не периодическими функциями.



Черт. 4.

б) Сферические волны. Несколько иначе обстоит дело в трех пространственных измерениях. Из решения $e^{i\omega t} e^{i\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = e^{i\omega t} w$ интегрированием функции w по единичной сфере пространства α, β, γ получим новую функцию

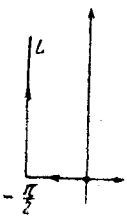
$$v = \int\int e^{i\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Так как эта функция, очевидно, инвариантна относительно вращений координатной системы, то для вычисления интеграла можно положить $x = y = 0$, $z = r$ и, введя в пространстве α, β, γ обычным образом полярные координаты r, ϑ, φ, имеем:

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i\omega r \cos\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta \quad \text{или} \quad v = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\sin \omega r}{r}.$$

Следовательно, $\frac{\sin \omega r}{r} e^{i\omega t}$ есть стоячая сферическая волна, регулярная, впрочем, в начале координат и полученная наложением регулярных проходящих плоских волн.

Для того, чтобы получить волны, для которых нулевая точка является особой и которые соответствуют процессам излучения, мы должны суперпонировать также и несобственные плоские волны. Пользуясь путем интегрирования L черт. 5, имеем:



Черт. 5.

$$v = 2\pi \int_L e^{i\omega r \cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}, \tag{14}$$

т. е., в вещественной записи, две формы волны

$$\frac{\cos \omega r}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \omega r}{r},$$

из которых вторая есть уже ранее найденная регулярная в нулевой точке.

Заметим, что одна и та же форма шаровой волны $2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}$ получается суперпозицией плоских волн $e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)}$ при любом положении точки x, y, z с $z>0$. Точнее: независимо от положения точки x, y, z с $z>0$ на сфере $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_L e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{15}$$

Для доказательства проще всего прямым рассуждением показать, что интеграл (15) зависит только от r. Непосредственно видно, что правая часть равенства (15) (обозначим ее через v) во всяком случае может зависеть лишь от z^2 и от $\rho^2=x^2+y^2$: $v=v(\rho, z)$. Затем легко проверить, что $zv_\rho-\rho v_z=0$ тождественно, т. е. что v зависит лишь от комбинации $r^2=\rho^2+z^2$ [1]).

Так как волновое уравнение принадлежит к типу, свободному от дисперсии, то, ограничиваясь опять волнами в собственном смысле, можно составить вращательно-симметричную волну

$$u=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(t-\alpha x-\beta y-\gamma z)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

с произвольной функцией $f(\lambda)$. Вследствие инвариантности этого выражения по отношению к ортогональным преобразованиям, можно и здесь для вычисления интеграла, без ограничения общности, положить $x=y=0$. Перейдя к полярным координатам, так же, как и раньше, получим:

$$u=2\pi\int_0^{\pi} f(t-r\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta=\frac{2\pi}{r}\left[F(t+r)-F(t-r)\right],$$

где F, как первообразная для f, есть произвольная функция. Итак, выражение

$$\frac{F(t+r)-F(t-r)}{r}$$

является решением при произвольной, дважды дифференцируемой функции F [2]). Но и функции

$$\frac{F(t+r)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{F(t-r)}{r},$$

---

[1]) Отождествление обоих интегралов (14) и (15) являет собой в известном смысле пример применения интегральной теоремы Коши для двух переменных, так как переход от $\rho=0$ к $\rho\neq 0$ означает изменение пути интегрирования в комплексной плоскости ϑ [ср. H. Weyl, *Ann. d. Physik*, т. 60, стр. 481 и следующие, где формула (15) получила важное применение к проблеме распространения волн в беспроволочной телеграфии].

[2]) В случае двух пространственных измерений аналогичное упрощение интеграла $u=\int_0^{2\pi} f(t-r\cos\vartheta)\, d\vartheta$ невозможно, что уже сейчас указывает

каждая в отдельности, являются решениями, в чем нетрудно убедиться с помощью непосредственной поверки. Найденные только что решения, очевидно, имеют особую точку в начале координат. Эти решения можно истолковать как поступательные сферические волны, пространственно затухающие по мере своего продвижения.

Заметим кстати, что эти решения можно охарактеризовать как единственные решения волнового уравнения в трех пространственных измерениях, которые зависят пространственно только от r. Это вытекает из того, что для функции $u(r, t)$ выражение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (ср. т. I, стр. 217) принимает вид

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr};$$

следовательно, волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr} - (ru)_{tt}] = 0,$$

откуда согласно гл. I, стр. 17 общее решение есть

$$ru = F(t + r) + G(t - r)$$

с произвольными функциями F и G.

§ 6. Задачи с начальными условиями (задачи Коши); проблемы излучения

Принцип наложения является во многих случаях ключом к решению задач фундаментального значения, относящихся к теории процессов распространения. В этих задачах вопрос всегда заключается в определении таких решений дифференциального уравнения для функций пространственных координат x_i и времени t в пространственной области G и при $t > 0$, которые удовлетворяют при $t = 0$ заданным начальным условиям и иногда еще заданным краевым условиям на границе области. Откладывая более систематическое рассмотрение таких задач на дальнейшее (ср. § 7 этой главы), мы здесь разберем несколько характерных примеров, имеющих и самостоятельное значение.

1. Задачи Коши в теории теплопроводности. Преобразование тета-функции. Рассмотрим сначала для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

следующую задачу Коши: найти решение, имеющее непрерывные производные до второго порядка при всех значениях абсциссы x и при $t > 0$, непрерывное при $t \geqslant 0$ и обращающееся при $t = 0$ в заданную функцию $u(x, 0) = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ мы при этом

на коренное различие между случаями четного и нечетного числа пространственных измерений. Это различие еще отчетливее проявится ниже в § 6 и гл. VI.