каждая в отдельности, являются решениями, в чем нетрудно убедиться с помощью непосредственной поверки. Найденные только что решения, очевидно, имеют особую точку в начале координат. Эти решения можно истолковать как поступательные сферические волны, пространственно затухающие по мере своего продвижения.

Заметим кстати, что эти решения можно охарактеризовать как единственные решения волнового уравнения в трех пространственных измерениях, которые зависят пространственно только от r. Это вытекает из того, что для функции $u(r, t)$ выражение $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (ср. т. I, стр. 217) принимает вид

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r}(ru)_{rr};$$

следовательно, волновое уравнение $\Delta u - u_{tt} = 0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r}[(ru)_{rr} - (ru)_{tt}] = 0,$$

откуда согласно гл. I, стр. 17 общее решение есть

$$ru = F(t + r) + G(t - r)$$

с произвольными функциями F и G.

§ 6. Задачи с начальными условиями (задачи Коши); проблемы излучения

Принцип наложения является во многих случаях ключом к решению задач фундаментального значения, относящихся к теории процессов распространения. В этих задачах вопрос всегда заключается в определении таких решений дифференциального уравнения для функций пространственных координат x_i и времени t в пространственной области G и при $t > 0$, которые удовлетворяют при $t = 0$ заданным начальным условиям и иногда еще заданным краевым условиям на границе области. Откладывая более систематическое рассмотрение таких задач на дальнейшее (ср. § 7 этой главы), мы здесь разберем несколько характерных примеров, имеющих и самостоятельное значение.

1. Задачи Коши в теории теплопроводности. Преобразование тета-функции. Рассмотрим сначала для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

следующую задачу Коши: найти решение, имеющее непрерывные производные до второго порядка при всех значениях абсциссы x и при $t > 0$, непрерывное при $t \geqslant 0$ и обращающееся при $t = 0$ в заданную функцию $u(x, 0) = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ мы при этом

на коренное различие между случаями четного и нечетного числа пространственных измерений. Это различие еще отчетливее проявится ниже в § 6 и гл. VI.

предполагаем всюду непрерывной и ограниченной: $|\varphi(x)|<M$. Мы утверждаем, что искомое решение дается формулой

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \tag{2}$$

Следовательно, наше решение получается посредством наложения из приведенного нами ранее (гл. I, § 3, п. 2, стр. 29) «основного решения» уравнения теплопроводности. Эта формула выражает тот факт, что процесс распространения тепла представляется суперпозицией элементарных процессов, причем отдельному элементарному процессу соответствует начальная температура нуль всюду, кроме точки $x=\xi$, а в этой точке в начальный момент сосредоточено количество тепла, пропорциональное выражению $\varphi(\xi)$. Доказательство мы проведем с помощью простой поверки. Дифференцированием под знаком интеграла непосредственно обнаруживается, что выражение (2) при $t>0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности. Остается, следовательно, проверить, удовлетворяется ли начальное условие. Для этой цели вводим вместо ξ новую переменную интеграции $\sigma=\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}$, откуда получаем:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})\,e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

Этот интеграл мы представим как сумму трех интегралов

$$J_1+J_2+J_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-T}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-T}^{T}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty}$$

путем разбиения промежутка интегрирования на три части, причем за промежуточное значение мы выберем $T=|t|^{-1/4}$. Если t достаточно мало, то в интервале $-T\leqslant\sigma\leqslant T$ справедливо соотношение $|\varphi(x+2\sigma\sqrt{t})-\varphi(x)|<\varepsilon$ при заданном сколь угодно малом ε, на основании предположенной непрерывности функции φ, так как в этом интервале $|\sigma|\sqrt{t}\leqslant|t|^{1/4}$. Из сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}$ тотчас заключаем, что при достаточно малом t интеграл J_2 сколь угодно мало отличается от $\varphi(x)$. Для обоих интегралов J_1 и J_3 получаем оценку

$$|J_1|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-T}e^{-\sigma^2}\,d\sigma,$$

$$|J_3|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{T}^{\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma.$$

Следовательно, в силу сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ эти интегралы сколь угодно малы при достаточно малом t. Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение.

Заметим, что аналогичная явная форма решения задачи Коши для уравнения теплопроводности имеется и в случае двух и более измерений. Пусть, например, требуется найти такое решение дифференциального уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0 \tag{3}$$

для $t > 0$, которое при $t = 0$ переходит в заданную непрерывную функцию точки $\varphi(x, y, z)$. Решение дается формулой

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{1}{4t}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{4}$$

которую нетрудно проверить.

Другая задача Коши уравнения теплопроводности, приводящая к интересному замечанию, относится к замкнутому линейно-протяженному проводнику тепла (скажем, проволоке) длины 1. Задача Коши уравнения $u_{xx} - u_t = 0$ формулируется здесь так же точно, как в первом примере. Здесь присоединяется только условие, что как функция $\varphi(x)$, так и решение $u(x, t)$ должны быть периодическими функциями от x с периодом 1. Такое периодическое решение, принимающее заданные начальные значения, можно сразу написать как суперпозицию решений

$$e^{-4\pi^2\nu^2 t}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

(ср. стр. 128), если предположить, что начальная функция $\varphi(x)$ допускает разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x).$$

Искомое решение задачи Коши получится в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}.$$

Если выразить коэффициенты Фурье с помощью интегралов и поменять местами суммирование и интеграцию, что при $t > 0$, наверно, дозволено, решение примет вид

$$u(x, t) = \int_0^1 \varphi(\xi) \left\{1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu(x-\xi)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t}\right\} d\xi. \tag{5}$$

С другой стороны, нашу задачу Коши можно решить в явном виде еще и совершенно иным способом, если заметить, что функция

$$W(x-\xi, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi-\nu)^2}{4t}} \tag{6}$$

есть периодическое решение уравнения теплопроводности с периодом 1. То же рассуждение, что и выше, показывает, что функция

$$u(x, t)=\int_0^1 \varphi(\xi)\, W(x-\xi, t)\, d\xi \tag{7}$$

является решением поставленной задачи.

В силу произвольности функции $\varphi(\xi)$, если принять во внимание «основную лемму вариационного исчисления» (см. т. I, стр. 174), сравнение обоих решений показывает, что должно существовать тождество

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\nu x\, e^{-\pi\nu^2 t}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi(x-\nu)^2}{t}}; \tag{8}$$

частный случай этой формулы при $x=0$ был выведен ранее (т. I, стр. 68) как *функциональное уравнение эллиптической тета-функции*. Здесь же эта формула иллюстрируется с помощью уравнения теплопроводности.

Однако в этом рассуждении молчаливо предполагалось, что оба решения (5) и (7) должны быть тождественны. Чтобы это оправдать, надо доказать, что наша задача Коши может иметь лишь одно единственное решение или что решение, соответствующее начальной функции нуль (следовательно, и разность двух решений, соответствующих одной и той же начальной функции), само обращается тождественно в нуль. Действительно, из уравнения $u_{xx}-u_t=0$ умножением на u и интегрированием от 0 до 1, получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\, dx+\int_0^1 u_x^2\, dx=0;$$

мы воспользовались при этом интегрированием по частям и приняли во внимание периодичность функции $u(x, t)$ относительно x. Отсюда вытекает:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\, dx\leqslant 0.$$

Поэтому, если при $t=0$ тождественно $u=0$, то функция u должна также исчезать тождественно и при $t>0$, что и требовалось доказать [1]).

---

[1]) Этот метод ведения доказательств однозначности будет в существенно более общей форме, играть важную роль впоследствии (гл. V, § 3 и VI, § 4)

2. Задачи Коши для волнового уравнения. Задачу Коши для волнового уравнения в одном пространственном измерении мы уже решили раньше (ср. гл. I, § 7, п. 1). Теперь мы рассмотрим особенно важное решение задачи Коши для волнового уравнения в трех измерениях

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{tt}. \tag{9}$$

И это решение получается посредством суперпозиции, причем надо исходить из найденного ранее решения волнового уравнения $\frac{F(r-t)}{r}$ с произвольной функцией F. При этом

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

с произвольной «параметрической точкой» ξ, η, ζ.

Пусть $F_\varepsilon(\lambda)$ — неотрицательная функция параметра λ, которая равна нулю вне интервала $-\varepsilon<\lambda<\varepsilon$ и для которой $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda=1$. Функция

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{F_\varepsilon(r-t)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

являющаяся суперпозицией сферических волн и полученная интегрированием по всем значениям ξ, η, ζ с помощью непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, без сомнения, удовлетворяет волновому уравнению. Если теперь заставить ε стремиться к нулю и выполнить предельный переход под знаком интервала, то придем к решению

$$u(x, y, z, t)=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi(x+t\alpha,\ y+t\beta,\ z+t\gamma)\,d\Omega=tM_t\{\varphi\}, \tag{10}$$

где M_t есть среднее значение функции φ на поверхности сферы радиуса t с центром в точке (x, y, z), а $d\Omega$ — элемент поверхности сферы: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Вместо выполнения предельного перехода удобнее непосредственной поверкой убедиться, что функция u является решением волнового уравнения. Эту поверку мы здесь опускаем, так как впоследствии она будет предпринята в более общих рамках (ср. гл. VI, § 5).

Нетрудно убедиться, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z, 0)=0, \qquad u_t(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z).$$

Заметив, что одновременно с функцией u ее производная u_t также является решением волнового уравнения, легко обнаружим, что *вообще функция*

$$u=tM_t\{\varphi\}+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t\{\psi\} \tag{11}$$

является решением задачи Коши для волнового уравнения с заданными начальными значениями

$$u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \qquad u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

3. Метод интеграла Фурье для решения задачи Коши. Существует общий метод решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью суперпозиции плоских волн. Для того, чтобы избежать рассуждений о законности некоторых процессов, например, изменения порядка интеграции и т. п., целесообразно и этим методом пользоваться лишь для эвристического получения предполагаемого решения, которое вслед за этим необходимо подвергнуть непосредственной проверке.

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[u] = 0 \tag{12}$$

для функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, или, короче, $u(x, t)$ с решениями

$$e^{i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - bt)}, \text{ или, короче, } e^{i(ax)}e^{-ibt}. \tag{13}$$

Мы предполагаем при этом, что для всякой системы вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ или, что то же самое, для всякого вектора a существует k различных значений (ср. § 5, стр. 172)

$$b = b_j(a_1, \ldots, a_n) \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

которые зависят алгебраически от a_i и для которых выражение (13) является решением уравнения (12). Обозначая через $W_1, W_2, \ldots, W_k$ k произвольных функций от $a_1, \ldots, a_n$, можно путем суперпозиции плоских волн построить чисто формально выражение

$$u = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int W_j(a_1, \ldots, a_n)\, e^{i(ax)} e^{-itb_j(a_1, \ldots, a_n)}\, da_1 \ldots da_n. \tag{14}$$

Это выражение, без сомнения, тоже представляет решение уравнения (12), если все процессы интегрирования сходятся и если дозволено выполнение операции L под знаком интеграла.

Мы воспользуемся этим замечанием для того, чтобы построить такое решение дифференциального уравнения (12), которое удовлетворяет k начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ u_t(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} u(x, 0) &= \varphi_{k-1}(x), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\varphi_\nu(x)$ — заданные функции.

Дифференцируя по t под знаком интеграла в выражении (14) и подставляя в полученные выражения $t=0$, из начальных условий (15) получим для функций $W_1, \ldots, W_k$ следующую систему интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n,\\
\varphi_1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{k-1} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^{k-1}\, W_j(a)\, e^{i(ax)}\, da_1 \ldots da_n.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Теорема обращения Фурье дает возможность получить решение этих уравнений с помощью следующих формул:

$$\sum_{j=1}^{k} (-ib_j)^l\, W_j(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi_l(\xi) e^{-i(a\xi)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{17}$$

$$(l=0, \ldots, k-1),$$

причем в правой части написаны известные выражения. Таким образом, для k неизвестных функций $W_1, \ldots, W_k$ получена система линейных уравнений, определитель которой $|(-ib_j)^l|$ не может равняться нулю, в силу предположения, что все b_j имеют различные значения. Следовательно, функции W_j определяются однозначно, и тем самым наша адача Коши решена.

В качестве примера рассмотрим снова волновое уравнение в трех пространственных измерениях:

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z, 0) = 0,$$

$$u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

В этом примере получаются для b два значения:

$$b = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm\rho, \tag{18}$$

и метод интеграла Фурье [см. формулу (14)], если с самого начала учесть начальное условие $u(x, y, z, 0) = 0$, дает для u следующее выражение:

$$u(x, y, z, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1x + a_2y + a_3z)} \sin \rho t\, da_1\, da_2\, da_3. \tag{19}$$

После дифференцирования под знаком интеграла получаем, подставляя значение $t=0$:

$$u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) =$$
$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1x+a_2y+a_3z)}\, da_1\, da_2\, da_3.$$

На основании теоремы обращения отсюда получается для W выражение

$$W(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 \rho} \iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (20)$$

Это выражение для W подставляем в (19):

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \sin \rho t \frac{da_1\, da_2\, da_3}{\rho} \iiint \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

и попытаемся привести это решение к более простому виду, изменяя порядок интегрирования по a_1, a_2, a_3 и по ξ, η, ζ. Правда, это изменение порядка интеграции невозможно непосредственно, ибо появляющийся внутренний интеграл

$$\iiint \frac{\sin \rho t}{\rho} e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, da_1\, da_2\, da_3 =$$
$$= \int\limits_0^{\infty} \rho \sin \rho t\, d\rho \iint\limits_{\Omega} e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\, d\Omega = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^{\infty} \sin \rho r \sin \rho t\, d\rho$$

не сходится; однако, простой прием, который мы будем применять не раз впоследствии (например, дополнения к этой главе, § 1 и § 3, а также гл. VI, § 5), делает возможным желаемое изменение. Для этой цели рассматриваем не самый интеграл (19), но интеграл

$$v(x, y, z, t) = -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(ax)} \frac{\sin \rho t}{\rho^2}\, da_1\, da_2\, da_3, \quad (21)$$

из которого можно получить искомую функцию двукратным дифференцированием по t:

$$u = v_{tt}.$$

Внеся выражение (20) в (21), после изменения порядка интегрирования [1]) получим:

$$v = -\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{ia(x-\xi)} \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, da_1\, da_2\, da_3,$$

---

[1]) Мы опять предпринимаем это изменение порядка интегрирования с некоторой беспечностью, потому что мы здесь имеем в виду эвристический метод для получения решения, проверка которого будет произведена впоследствии в гл. VI, § 5.

и теперь внутренний интеграл J уже сходится; после несложных выкладок имеем:

$$J = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\alpha(x-\xi)} \frac{\sin \rho t}{\rho^3} da_1\, da_2\, da_3 = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2} d\rho,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Для интеграла в правой части, пользуясь тождеством

$$\sin \rho r \sin \rho t = \sin^2 \frac{t+r}{2} \rho - \sin^2 \frac{t-r}{2} \rho,$$

имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \rho r \sin \rho t}{\rho^2} d\rho = \left\{ \frac{t+r}{2} - \left| \frac{t-r}{2} \right| \right\} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \rho}{\rho^2} d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t+r}{2} - \left| \frac{t-r}{2} \right| \right] \tag{22}$$

и, следовательно, окончательно

$$J = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} & \text{для} \quad r \leqslant t, \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{t}{r} & \text{для} \quad r \geqslant t. \end{cases} \tag{23}$$

В результате для v получается выражение

$$v = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta - \frac{t}{4\pi} \iiint\limits_{r \geqslant t} \frac{\varphi}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{24}$$

Когда дифференцируют по t интеграл вида

$$J_1 = \iiint\limits_{r \leqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где интеграция распространяется по внутренней области шара радиуса t с центром в точке (x, y, z), то получается интеграл по поверхности Ω этого шара:

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

Аналогично, интеграл

$$J_2 = \iiint\limits_{r \geqslant t} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

по внешней области той же сферы имеет производную

$$\frac{\partial J_2}{\partial t} = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\Omega.$$

На основании этого замечания из (24) вытекает:

$$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqslant t}\frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

откуда

$$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqslant t}\frac{\varphi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{25}$$

После вторичного дифференцирования получаем окончательно:

$$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega. \tag{26}$$

Пользуясь введенным ранее символом $M_t\{\varphi\}$, можно этот результат записать в следующем виде:

$$u = v_{tt} = tM_t\{\varphi\} \tag{27}$$

в полном согласии с п. 2.

4. Решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных. Запаздывающие потенциалы. Коль скоро решена задача Коши для однородного линейного дифференциального уравнения, как, например, волнового уравнения, можно с помощью простого и общего метода достигнуть полного решения соответствующего неоднородного дифференциального уравнения. Этот метод соответствует известному способу вариации постоянных или *принципу толчков* (Stossprinzip) у обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы дадим сперва общую формулировку, а затем применим ее к тому же волновому уравнению.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - L[u] = g(x, t) \tag{28}$$

для функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ или опять, короче, $u(x, t)$, обозначая символом x n пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Здесь L есть произвольное линейное дифференциальное выражение, содержащее, самое большее, производную u_t, но не содержащее высших производных по t. Задача Коши, которую мы должны решить, состоит в отыскании такого решения u этого дифференциального уравнения (28), которое удовлетворяло бы при $t = 0$ следующим начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

Функция $g(x, t)$, стоящая в правой части, предполагается известной и в приложениях представляет внешнюю силу, действующую на систему.

К надлежащему методу, соответствующему принципу толчков, приходят следующим образом: сначала предполагают, что заданная функция $g = g^*$ исчезает всюду, за исключением небольшого интервала $\tau - \varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$, для которого $\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g^*(x, t)\, dt = g(x, \tau)$. Если про-

интегрировать дифференциальное уравнение между пределами $\tau - \varepsilon$ и τ по t и затем выполнить формально предельный переход $\varepsilon \to 0$, то придем к рассмотрению следующей задачи Коши для однородного дифференциального уравнения. При заданном значении параметра τ найти для $t \geqslant \tau$ такое решение $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ однородного дифференциального уравнения

$$u_{tt} - L[u] = 0, \tag{29}$$

для которого при $t = \tau$

$$u(x, \tau) = 0, \qquad u_t(x, \tau) = g(x, \tau). \tag{29a}$$

Это решение, которое мы представляем себе продолженным как тождественный нуль для значений $t \leqslant \tau$, соответствует мгновенному толчку (удару) интенсивности $g(x, \tau)$, действующему на покоящуюся систему в момент $t = \tau$. Это решение, зависящее еще от параметра τ, обозначим через $\varphi(x, t; \tau)$. Независимо от своей эвристической мотивировки оно может быть определено как решение формулированной задачи Коши для однородного дифференциального уравнения. Представляя искомое решение неоднородного уравнения как суперпозицию действий этих толчков φ, мы утверждаем теперь следующее:

Функция

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau \tag{30}$$

является решением задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения (28) *с начальными условиями*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Доказательство получается при помощи непосредственной поверки. Действительно,

$$u_t = \int_0^t \varphi_t(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$u_{tt} = \varphi_t(x, t; t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x, t; \tau)\, d\tau,$$

$$L[u] = \int_0^t L[\varphi]\, d\tau,$$

а так как $\varphi_t(x, t; t) = g(x, t)$, то отсюда вытекает, что выражение (30) удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и начальным условиям.

Этот общий результат мы применим теперь к волновому уравнению в трех измерениях. Согласно результату, полученному в п. 2, здесь

$$\varphi(x, y, z, t; \tau) = (t - \tau)\, M_{t-\tau}\{g(x, y, z; \tau)\}.$$

Следовательно, для задачи Коши, относящейся к волновому уравнению

$$u_{tt} - \Delta u = g(x, y, z, t)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, z, 0) = 0, \qquad u_t(x, y, z, 0) = 0,$$

сразу получаем в качестве решения функцию

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t (t-\tau) M_{t-\tau}\{g(x, y, z, \tau)\}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \tau M_\tau\{g(x, y, z, t-\tau)\}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \tau\, d\tau \int_\Omega g(x+\tau\alpha,\ y+\tau\beta,\ z+\tau\gamma,\ t-\tau)\, d\Omega$$

или, введя опять вместо полярных прямоугольные координаты $\xi = x + \tau\alpha$, $\eta = y + \tau\beta$, $\zeta = z + \tau\gamma$,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{g(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{31}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Это выражение u называют *запаздывающим потенциалом*. Дело в том, что таков именно потенциал пространственно распределенных масс с плотностью g (ср. гл. IV, § 1). Однако, при выполнении интеграции надо брать эту плотность не в рассматриваемый момент, а в момент, предшествующий на такой промежуток времени, сколько требуется процессу, распространяющемуся со скоростью 1, для прохождения пути от точки — носителя массы плотности g до центра сферы.

5. Задача Коши для волнового уравнения в двух пространственных измерениях. Метод спуска (Absteigemethode). Решение задачи Коши для волнового уравнения в двух измерениях

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} \tag{32}$$

можно получить непосредственно из решения для трех измерений с помощью следующего простого, но весьма эффективного приема, который Адамар (Hadamard) назвал *методом спуска*. Волновое уравнение (32) трактуют как частный случай уравнения для трех измерений, причем начальные данные, а с ними и самое решение предполагаются не зависящими от третьей переменной z. Таким образом, мы как бы спускаемся с трех к двум измерениям. Эта идея дает

немедленно искомое решение, если в формулу (10) п. 2 ввести предположение, что $\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = u_t(x, y, z, 0)$ не зависит от z. В получающемся таким образом интеграле

$$u(x, y, t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2=t^2} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, dO$$

вводим в качестве независимых переменных величины $\xi = t\alpha$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t\gamma$, и интеграл по поверхности O сферы радиуса t, с помощью формул

$$\zeta = \sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}\,; \qquad dO = \frac{t}{\zeta}\, d\xi\, d\eta = \frac{t}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}}\, d\xi\, d\eta,$$

запишется в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} < t} \frac{\varphi(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{33}$$

Это выражение представляет, следовательно, решение задачи Коши для волнового уравнения в двух измерениях при начальных условиях $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

При сравнении формулы (33) с формулой (10) бросается в глаза весьма замечательное различие между двумя и тремя пространственными измерениями. Между тем как при трех пространственных измерениях решение в какой-либо точке зависит лишь от начальных значений на поверхности трехмерной сферы радиуса t с центром в рассматриваемой точке, в случае двух пространственных измерений соответствующая область зависимости состоит из границы и внутренней части соответствующей двухмерной сферы, т. е. круга радиуса t. Мы еще вернемся не раз к более глубокому смыслу этого факта (ср. § 7 и гл. VI, § 5, п. 3).

Общий принцип из п. 4 дает теперь возможность получить решение неоднородного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = g(x, y, t) \tag{34}$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad u_t(x, y, 0) = 0; \tag{34a}$$

это решение получается в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \iint \frac{g(\xi, \eta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta,$$

что можно записать и так:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_K \frac{g(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\tau, \tag{35}$$

где K есть область пространства ξ, η, τ, определенная неравенствами

$$\tau \leqslant t; \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leqslant (t-\tau)^2.$$

6. Проблема излучения. С точки зрения физики, по существу, еще важнее задачи Коши так называемые задачи с излучением, которые можно, впрочем, трактовать как предельные случаи задач с начальными условиями (задачи Коши). Метод для формулировки проблемы излучения независимо от такого предельного перехода будет дан лишь в гл. VI, § 10. В этих задачах с излучением в начальный момент $t=0$ функция u и ее производная по времени t имеют значения нуль (на языке физики — господствует состояние покоя), однако в определенной точке пространства, например, в начале координат $r=0$, для функции u предписана характеристическая особенность как функция времени.

В трехмерном пространстве нам уже известны решения волнового уравнения, обладающие особенностью в определенной точке пространства. Функции

$$\frac{F(t-r)}{r}, \qquad \frac{G(t+r)}{r}$$

дают такого рода волны излучения, если отвлечься от начальных условий, которые еще должны быть выполнены. Формально мы приходим к решению с излучением с помощью следующего предельного перехода. Рассматриваем неоднородное дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=f(x, y, z, t), \tag{36}$$

где f — «плотность внешней силы». Соответствующая задача Коши для $t>0$ с начальным состоянием покоя имеет решение [ср. формулу (31)]:

$$u=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqslant t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Допустим теперь, что $f=0$ при $\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant\varepsilon^2$, где ε — заданный малый параметр, и положим

$$\iiint\limits_{\rho\leqslant\varepsilon} f(\xi, \eta, \zeta, t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=4\pi g(t).$$

Если теперь положить $g(t)=0$ для $t<0$ и выполнить затем предельный переход $\varepsilon\to 0$, то наше решение перейдет в

$$u=\frac{g(t-r)}{r}, \tag{37}$$

где $r^2=x^2+y^2+z^2$. В этом решении с излучением функция $4\pi g(t)$ представляет, следовательно, возбуждающую силу, сосредоточенную в начале координат в момент t. Интересно отметить, что эта функ-

ция излучения u в какой-либо точке в момент t зависит только от одного единственного импульса, который произошел в момент $t-r$ и, распространяясь со скоростью единица из начала координат, как раз в момент t достигнет точки x, y, z.

Совершенно иначе обстоит дело у решения с излучением в двухмерном пространстве. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f(x,\ y,\ t), \tag{38}$$

полагаем $f=0$ при $r^2=x^2+y^2\geqslant\varepsilon^2$ и пишем:

$$\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leqslant\varepsilon} f(\xi,\ \eta,\ t)\,d\xi d\eta=2\pi g(t).$$

С помощью результата, полученного в п. 5, путем предельного перехода $\varepsilon\to 0$ получаем искомое решение:

$$u(x,\ y,\ t)\begin{cases}=\displaystyle\int\limits_0^{t-r}\frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\,d\tau & \text{для}\quad r\leqslant t,\\ =0 & \text{для}\quad r>t.\end{cases} \tag{39}$$

В противоположность случаю трех пространственных измерений, решение проблемы излучения в точке x, y в момент t зависит здесь, следовательно, не только от одного предшествовавшего импульса, но и от всей предыдущей истории процесса излучения до момента времени $t-r$.

Интересно исследовать характер особой точки нашего решения при $r=0$ и в этом, двухмерном случае. Интегрирование по частям с помощью формулы

$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}=-\frac{d}{d\tau}\lg\left|t-\tau+\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\right|$$

с последующим разложением по степеням r дает следующее представление решения вблизи особой точки:

$$u(x,y,t)=-g(t-r)\ln r+g(0)\ln 2t+\int\limits_0^t g'(\tau)\ln 2(t-\tau)\,d\tau+\varepsilon(t,r),$$

причем

$$\varepsilon(t,r)\to 0,\quad \text{когда}\quad r\to 0.$$

Отсюда, во всяком случае, видно, что в случае двух пространственных измерений функция излучения обнаруживает более сложную особенность, чем в случае трех пространственных измерений.

7. Процессы распространения и принцип Гюйгенса (Huyghens). В связи с результатами, полученными для волнового уравнения, изучим несколько ближе характер этих процессов распространения. Более подробно мы этим займемся в гл. VI. Рассмотрим сначала трехмерное однородное волновое уравнение и соответствую-

щую задачу Коши. Представим себе, что в момент $t=0$ начальное состояние отлично от нуля лишь в окрестности $\mathfrak{G}$ некоторой точки, скажем, начала координат. Для того, чтобы рассчитать состояние u в точке x, y, z во время t, надо вокруг этой точки x, y, z как центра описать сферу радиуса t и вычислить известные интегралы от начальных значений, распространенные по этой сфере. Следовательно, $u(x, y, z, t)$ будет отлично от нуля лишь в том случае, если поверхность этой сферы встречает начальную область $\mathfrak{G}$, т. е. в некоторый промежуток времени $t_1<t<t_2$, продолжительность которого равна разности наибольшего и наименьшего расстояния от начальной области $\mathfrak{G}$. Этот факт выражает характерные черты нашего дифференциального уравнения как уравнения для процесса распространения (со скоростью 1). Начальное состояние в области $\mathfrak{G}$ неощутимо в другой точке x, y, z до момента времени $t=t_1$, где величина t_1 равна кратчайшему расстоянию между областью $\mathfrak{G}$ и точкой x, y, z. По прошествии момента t_2, который соответствует наибольшему расстоянию, эффект, вызванный в точке x, y, z начальным состоянием в области $\mathfrak{G}$, закончен. Это явление называют *принципом Гюйгенса* для волнового уравнения. Он утверждает, что начальное состояние с резко очерченной локализацией в пространстве дает себя знать в другом месте, позднее, в виде эффекта, столь же резко ограниченного во времени. Для предельного случая, когда начальное состояние сосредоточено в одной точке, его эффект в другой точке концентрируется в определенный момент времени, соответствующий расстоянию обеих точек.

Однако, совершенно иначе обстоит дело в случае двух пространственных измерений. Рассмотрим снова область $\mathfrak{G}$ вокруг начала координат и предположим, что лишь в этой области отличны от нуля начальные значения u и u_t. Значение u в точке P, кратчайшее расстояние которой от области $\mathfrak{G}$ равно t_1, наверное, будет 0 при $t<t_1$. При $t>t_1$, в силу формулы 33 из п. 5, величина u уже не будет тождественно равна нулю и, если, например, начальная функция φ не отрицательна, u навсегда останется отлично от нуля. Другими словами, и для волнового уравнения в двух пространственных измерениях сохраняется интерпретация его как процесса распространения. Локализированному начальному состоянию требуется известное время для того, чтобы достигнуть некоторой точки в пространстве. Однако, гюйгенсовский характер движения уже не имеет здесь места. Эффект начального состояния не остается резко ограниченным во времени: напротив, после того, как он однажды появился, его отголосок продолжает постоянно отдаваться.

В процессах распространения мы будем называть ту область, которая заданными в ней начальными значениями влияет на состояние в точке x, y, z в момент времени t, *областью зависимости* для значений x, y, z, t. В случае волнового уравнения в трех пространственных измерениях такой областью зависимости является, следовательно, поверхность сферы радиуса t с центром в точке x, y, z.

Возбуждение в этой точке в момент t нисколько не зависит от начального состояния в точках, не лежащих на этой сфере.

В случае же двух пространственных измерений областью зависимости является вся внутренняя область вместе с периферией круга радиуса t с центром в точке x, y.

Физическое различие станет, пожалуй, еще яснее, если взглянуть на решения с излучением из п. 6. В случае трех пространственных измерений процесс, излученный из начала координат, воспринимается в точке $P(x, y, z)$ во время t таким образом, что в этой точке в момент t будет наблюдаться лишь то состояние, которое излучается из начала координат в момент $t-r$. В случае же двух пространственных измерений впечатление, воспринятое в точке P в момент t, зависит от всего процесса излучения, который разыгрался в промежутке от $t=0$ до момента $t-r$.

Таким образом, когда производятся наблюдения на основании физических явлений, подчиненных волновому уравнению, то пространственно-трехмерный мир дает возможность резко отобразить в воспринимающем приборе явления, передаваемые излучением. В двухмерном мире такая картина была бы размытой.

Ниже, в гл. VI мы увидим, что такого рода соображения не ограничены ни волновым уравнением, ни двумя или тремя пространственными измерениями.

Действительно, мы узнаем, что принцип Гюйгенса в вышеуказанном смысле справедлив для волнового уравнения при всяком нечетном числе n пространственных измерений (за исключением случая $n=1$), но не справедлив для четного числа пространственных измерений.

§ 7. Типичные задачи теории дифференциальных уравнений математической физики [1])

1. Предварительные замечания. Примеры типичных задач. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных, почти никогда не возникают в такой форме, чтобы искомым являлось «общее решение», т. е. многообразие *всех* решений дифференциального уравнения с частными производными; точно так же едва ли когда-нибудь целью задачи является отыскание специальных классов решений, как, например, плоских волн; напротив, вопрос всегда ставится так, что из многообразия всех решений требуется выделить весьма частное индивидуальное решение на основании дальнейших условий, присоединяемых к дифференциальному уравнению. Если имеется n независимых переменных, то эти дополнительные условия относятся большей частью к $(n-1)$-мерным многообра-

---

[1]) По поводу дальнейшего ср. соответствующее изложение у Адамара (Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, 1923), в особенности гл. I, а также обзорную статью Адамара в журнале L'enseignement mathématique, 1936, в которой рассматриваются также и другие типы задач.