Возбуждение в этой точке в момент t нисколько не зависит от начального состояния в точках, не лежащих на этой сфере.

В случае же двух пространственных измерений областью зависимости является вся внутренняя область вместе с периферией круга радиуса t с центром в точке x, y.

Физическое различие станет, пожалуй, еще яснее, если взглянуть на решения с излучением из п. 6. В случае трех пространственных измерений процесс, излученный из начала координат, воспринимается в точке $P(x, y, z)$ во время t таким образом, что в этой точке в момент t будет наблюдаться лишь то состояние, которое излучается из начала координат в момент $t-r$. В случае же двух пространственных измерений впечатление, воспринятое в точке P в момент t, зависит от всего процесса излучения, который разыгрался в промежутке от $t=0$ до момента $t-r$.

Таким образом, когда производятся наблюдения на основании физических явлений, подчиненных волновому уравнению, то пространственно-трехмерный мир дает возможность резко отобразить в воспринимающем приборе явления, передаваемые излучением. В двухмерном мире такая картина была бы размытой.

Ниже, в гл. VI мы увидим, что такого рода соображения не ограничены ни волновым уравнением, ни двумя или тремя пространственными измерениями.

Действительно, мы узнаем, что принцип Гюйгенса в вышеуказанном смысле справедлив для волнового уравнения при всяком нечетном числе n пространственных измерений (за исключением случая $n=1$), но не справедлив для четного числа пространственных измерений.

§ 7. Типичные задачи теории дифференциальных уравнений математической физики [1])

1. Предварительные замечания. Примеры типичных задач. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных, почти никогда не возникают в такой форме, чтобы искомым являлось «общее решение», т. е. многообразие *всех* решений дифференциального уравнения с частными производными; точно так же едва ли когда-нибудь целью задачи является отыскание специальных классов решений, как, например, плоских волн; напротив, вопрос всегда ставится так, что из многообразия всех решений требуется выделить весьма частное индивидуальное решение на основании дальнейших условий, присоединяемых к дифференциальному уравнению. Если имеется n независимых переменных, то эти дополнительные условия относятся большей частью к $(n-1)$-мерным многообра-

---

[1]) По поводу дальнейшего ср. соответствующее изложение у Адамара (Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, 1923), в особенности гл. I, а также обзорную статью Адамара в журнале L'enseignement mathématique, 1936, в которой рассматриваются также и другие типы задач.

зиям, которые появляются в качестве границ или иногда также как поверхности разрыва непрерывности у областей, внутри которых отыскивается решение («краевые, начальные условия» или «условия разрыва»). В § 6 мы рассматривали такие задачи, а именно задачи с начальными условиями — задачи Коши; в этих задачах была выделена одна переменная $x_{n+1}=t$ и отыскивался процесс, представляемый решением u для $t \geqslant 0$, коль скоро задано «начальное состояние», т. е. задана функция u при $t=0$ и, в некоторых случаях, ее производные по времени t в тот же начальный момент, как функции координат $x_1, \ldots, x_n$. Такие решения задачи Коши можно, впрочем, при случае также продолжить для значений $t<0$ так, чтобы многообразие $t=0$ лежало внутри области определения решения. У дифференциальных уравнений первого порядка, для которых мы в гл. II рассматривали задачу Коши как центральную задачу, такое продолжение по сути дела дается само собой. Для задач высшего порядка аналогичное продолжение проведено в гл. I в случае аналитических дифференциальных уравнений и аналитических начальных условий (§ 7). Однако, как аналитический характер дифференциального уравнения и начальных условий нельзя считать естественным предположением, так и аналитический характер решений, даже для аналитических дифференциальных уравнений, не является очевидным a priori. Для дальнейшего представляется поэтому вполне естественным, если в вопросе о дополнительных условиях мы будем довольствоваться действительно лишь условиями на начальных или краевых многообразиях, не вводя в рассмотрение продолжения этих решений за пределы этих многообразий.

Помимо задач Коши, рассмотренных в предшествующем параграфе, мы уже ранее рассматривали типичные *краевые задачи*, например, в случае уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Эта краевая задача, представляющая одну из центральных задач анализа, требует нахождения такого решения дифференциального уравнения

$$\Delta u = 0,$$

которое было бы внутри заданной области регулярно, т. е. непрерывно вместе со своими первыми и вторыми производными, и которое принимало бы на границе области заданные непрерывные краевые значения. В случае $n=2$ и $n=3$ мы с помощью интеграла Пуассона решили эту краевую задачу в явном виде для круговой и сферической области соответственно (ср. гл. I, § 3, п. 2, и т. I, гл. VII, стр. 489). Ниже, в гл. IV и VII мы построим и исследуем решение этой задачи для произвольных областей.

Встречаются и другие линейные краевые задачи уравнения Лапласа, например, такие, в которых на границе задается не сама функция, но какая-нибудь линейная комбинация функции и ее нормальной производной. Задачи этого типа были подробно рассмотрены в первом

томе, главным образом, с точки зрения вариационного исчисления; в гл. VII эти задачи будут полностью решены.

Краевая задача теории потенциала показывает особенно отчетливо, как мало дает нахождение «общего» решения для решения более глубокой задачи — краевой. Общее решение уравнения Лапласа при $n=2$, как известно, дается в виде

$$u=f(x+iy)+g(x-iy),$$

где f и g — произвольные аналитические функции одного переменного. Однако, фактически этот вид решения относительно бесполезен для решения краевой задачи.

Наконец, укажем здесь еще на простейшую нелинейную краевую задачу дифференциального уравнения с частными производными, именно — *краевую задачу уравнения минимальных поверхностей*:

$$(1+u_y^2)\,u_{xx}-2\,u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)\,u_{yy}=0. \qquad (1)$$

Если отыскивается минимальная поверхность, простирающаяся над областью $\mathfrak{G}$ плоскости x, y и ограниченная пространственной кривой Γ [аналитически эта поверхность представляется как функция $u=u(x, y)$], то вопрос сводится к следующей краевой задаче: требуется найти решение дифференциального уравнения (1), непрерывное вместе со своими производными до второго порядка в области $\mathfrak{G}$, ограниченной проекцией C кривой Γ, и принимающее на контуре C этой области заданные краевые значения [*краевая задача Плато* (Plateau) *в несимметричной форме*].

Другой в высшей степени важный тип задач с дифференциальными уравнениями образуют так называемые *смешанные задачи*. Рассмотрим определенную область $\mathfrak{G}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с границей Γ, о которой мы делаем все предположения непрерывности, которые представляются удобными. Ищется функция $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ или, короче, если опять пользоваться буквой x вместо системы $x_1, \ldots, x_n$, функция $u=u(x, t)$, определенная в области $\mathfrak{G}$ для $t\geqslant 0$, удовлетворяющая в этой области при $t>0$ заданному дифференциальному уравнению $L[u]=0$ и далее, на границе Γ, заданным (возможно, еще зависящим от t) краевым условиям, а в области $\mathfrak{G}$ при $t=0$ заданным начальным условиям.

Примером является задача о натянутой струне. Если струна закреплена в точках $x=0$ и $x=1$, то область $\mathfrak{G}$ есть интервал между 0 и 1. Краевые условия гласят: $u(0, t)=u(1, t)=0$, а в качестве начальных условий можно предписать значения функции u и ее производной u_t при $t=0$ как функции от x во всем интервале $\mathfrak{G}$. Можно было бы, впрочем, поставить и другие краевые условия на концах струны или исходить из неоднородного дифференциального уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x, t)$$

с заданной правой частью.

Все эти смешанные задачи в том случае, если дифференциальное выражение линейно и однородно, могут быть разбиты на следующие два типа.

1. В задачах первого типа краевые условия однородны, например, требуется исчезание функции u. Такие условия встречаются в *задачах о колебании ограниченной, простирающейся по области* $\mathfrak{G}$ *системы,* причем колеблющаяся система начинает свое движение с *заданным начальным состоянием* при $t=0$. Такие задачи колебательного типа мы уже рассмотрели подробно в первом томе, главным образом, на основе теории собственных функций.

2. В задачах второго типа однородны начальные условия, например, требуется исчезание при $t=0$ функции u и ее производных, входящих в рассмотрение. В то же время краевые условия неоднородны. Задачи этого типа играют крайне важную роль в многочисленных технических вопросах как *нестационарные задачи* [Ausgleichsprobleme—задачи (о процессах) выравнивания]. Принципиально, нестационарные задачи могут быть приведены к задачам первого типа. Для этого достаточно вычесть из искомой функции другую функцию, произвольно выбираемую и рассматриваемую как известная, но удовлетворяющую заданным начальным и краевым условиям. Для разности этих функций получается задача колебательного типа с неоднородным дифференциальным уравнением, следовательно, во всяком случае, задача, непосредственно доступная методу собственных функций, согласно гл. V первого тома. Несмотря на эту возможность приведения нестационарных задач к задачам колебательного типа, отдельное их рассмотрение вполне оправдано как с теоретической, так и с практической точки зрения. И действительно, для решения нестационарных задач разработаны далеко идущие методы, особенно целесообразные для приложений; основные идеи этих методов мы рассмотрим в дополнениях к этой главе.

К категории смешанных задач относятся также упомянутые в предыдущем параграфе проблемы излучения, которые мы трактовали в § 6 как предельные случаи неоднородных задач; их можно, впрочем, рассматривать и как предельные случаи нестационарных задач.

В заключение укажем несколько примеров других возможных типов. *Задача отображения Римана* состоит, выражаясь геометрически, в конформном отображении заданной области $\mathfrak{G}$ плоскости x, y на единичный круг $u^2+v^2<1$. Аналитически речь идет о следующей краевой задаче: требуется найти систему решений дифференциальных уравнений Коши-Римана

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x,$$

определенную в области $\mathfrak{G}$ и непрерывную в этой области вместе со своими первыми производными, и притом такую, чтобы функции u и v имели непрерывные граничные значения, удовлетворяющие краевому условию

$$u^2+v^2=1.$$

Непосредственно видно, что при этой формулировке речь идет уже не о простой краевой задаче теории потенциала, хотя решение этой задачи и приводится к обыкновенной краевой задаче, как мы уже видели в т. I, стр. 356 и еще раз увидим в следующей главе с других точек зрения.

Другой, более общей задачей является так называемая *задача Плато* в параметрической форме, которая уже отнюдь не так просто решается средствами теории функций; в этой задаче требуется построить минимальную поверхность, ограниченную заданной пространственной кривой Г. Согласно § 2, п. 2 эту задачу можно формулировать следующим образом: требуется определить в единичном круге $u^2+v^2<1$ три функции x, y, z от u, v, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

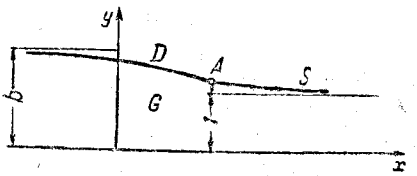
$$\Delta x=\Delta y=\Delta z=0 \tag{2}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2,\\ x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и принимающие на окружности единичного круга краевые значения $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, являющиеся непрерывными функциями длины дуги s этой окружности, причем эти краевые значения образуют параметрическое представление заданной пространственной кривой Г. Между тем как задача Плато в данной выше несимметричной форме не всегда имеет решение, эта задача в данной сейчас форме всегда допускает решение[1]).

Приведем еще один, последний, пример, относящийся к уравнению Лапласа, но существенно уклоняющийся от типа классической краевой задачи, а именно — проблему струи в плоской гидродинамике.



Черт. 6.

Дана бесконечная область $\mathfrak{G}$ плоскости x, y, ограниченная осью абсцисс, «краем сопла» D, простирающимся от точки A в сторону убывающих значений x в бесконечность, приближаясь асимптотически к прямой $y=b$, и «границей струи» S, простирающейся от точки A в сторону положительных значений x, асимптотически приближаясь к прямой $y=1$ при $x\to\infty$ (черт. 6). В этой области $\mathfrak{G}$, ограниченной контуром $D+S$ с одной стороны и осью абсцисс с другой, отыскивается функция потока $\psi(x, y)$, которая удовлетворяет в области $\mathfrak{G}$ дифференциальному уравнению $\Delta\psi=0$, а на границе — краевым условиям: $\psi=0$ на оси $y=0$, $\psi=1$ на контуре $D+S$, и для

[1]) Ср. гл. VII, § 10.

которой вдоль S направленная наружу нормальная произвольная $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ имеет заданное постоянное значение 1. Далее, требуется, чтобы $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ стремилась к 1, когда абсцисса x точки области $\mathfrak{G}$ стремится к положительной бесконечности, и чтобы предел $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ был $\frac{1}{b}$, когда $x \to -\infty$. Здесь речь идет о формулировке краевой задачи «свободного образования струи». Именно, из контура области $\mathfrak{G}$ часть S (контур струи) не задана заранее; напротив, S является «свободной» границей, которая подлежит определению при решении задачи. Для этого мы задали на S одним условием больше, чем было бы допустимо в обыкновенной краевой задаче, где могут быть заранее заданы краевые значения функции, но нельзя в то же время задавать заранее еще и краевые значения производных [1]).

2. Принципиальные соображения. Различные упомянутые выше типы задач с дифференциальными уравнениями естественно возникают в геометрии, математической физике или технических приложениях. Однако, эти постановки задач могут и должны быть мотивированы и оправданы и сами по себе, чисто математически. Вот важнейший результат, который получается при этом:

Краевые задачи принадлежат естественно эллиптическим дифференциальным уравнениям. Задачи с начальными условиями (задачи Коши), а также смешанные задачи и задачи с излучением относятся к гиперболическим и параболическим дифференциальным уравнениям.

Мы оправдаем этот тезис рассмотрением типичных примеров и ссылками на общие рассуждения, которые будут проведены впоследствии.

Будем исходить из следующей общей точки зрения. При постановке задачи математической физики, где требуется определить решение на основании заранее формулированных данных, естественны следующие три требования:

1. Решение должно существовать.

2. Решение должно быть однозначно определенным.

3. Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи.

Первое требование математически само собою разумеется: от решения не следует требовать «слишком много», т. е. противоречивых свойств.

Второе требование говорит, что задача должна быть поставлена с надлежащей полнотой.

---

[1]) Первым, кто работал над задачей свободного образования струи, был Гельмгольц; им и его последователями эта задача была решена для многих частных форм сопла, с помощью методов теории функций. Ср. обзорные статьи Jaffé (Яффе) в журнале *Zeitschr. angew. Math. u Mech.*, 1922 и A. Weinstein (Вайнштейн) в *L'enseignement mathématique*, 1936.

Третье требование оправдывается с точки зрения принципиальной применимости нашей аналитической задачи к явлениям природы; оно имеет коренное значение и отнюдь не является тривиальным. В приложениях мы всегда должны себе представлять данные из условия задачи не резко фиксированными. Например, заданные в приложениях длины или моменты времени всегда связаны с некоторыми небольшими пределами погрешности. Математическая задача лишь в том случае может считаться адэкватной для описания реальных явлений, если изменению предложенных данных в достаточно тесных пределах соответствует также малое, т. е. ограниченное заранее заданными пределами изменение решения. Это и есть наше третье требование. Оно выражает *физическую* определенность нашей задачи.

Задачу с дифференциальным уравнением, удовлетворяющую нашим требованиям, мы будем называть *корректно поставленной* (ein sachgemässes Problem).

Далее, оказывается, что решения часто зависят не от всей совокупности предложенных в задаче данных. Так появляется вопрос об *области или сфере влияния* и соответственно об *области зависимости решения*.

Для того, чтобы оправдать наш общий, сформулированный выше тезис, мы обратимся к примерам, имея, главным образом, в виду наше третье требование. Рассмотрим сначала эллиптическое дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в области $\mathfrak{G}$, с границей Γ. Существование решения обеспечено уже в силу наших прежних рассуждений (ср. т. I, гл. V), по крайней мере, в частных случаях круга, сферы, прямоугольника, и позднее будет доказано в общем виде. Далее, эта краевая задача при произвольной кусочно-гладкой границе удовлетворяет поставленному выше требованию однозначности. Эта однозначность вытекает непосредственно из того факта, что гармоническая функция, регулярная в некоторой области, принимает свое наибольшее и наименьшее значения на границе области и, следовательно, тождественно исчезает, если все ее краевые значения равны нулю. На этом основании разность двух решений, принадлежащих одним и тем же краевым значениям, представляет гармоническую функцию с краевыми значениями, равными нулю, а потому тождественно исчезает.

Требование непрерывной зависимости решений от краевых значений также выполнено, как это видно из теоремы о достижении экстремальных значений на границе (ср. гл. IV, § 3). Если два различных, заранее заданных краевых значения отличаются между собою всюду меньше, чем на ε, то соответствующие им гармонические функции во всей области не могут отличаться больше, чем на ε.

Следовательно, краевая задача для уравнения Лапласа, по данному выше определению, является корректно поставленной.

Далее устанавливаем, что для всякой внутренней точки области $\mathfrak{G}$ областью зависимости в отношении краевых значений является вся граница, т. е. значение решения u в какой-либо внутренней точке x, y

зависит от краевых значений на любой части границы. Действительно, если бы какая-либо часть C границы оставалась без влияния на значение решения u в некоторой части области $\mathfrak{G}$, то в этой подобласти мы получим то же самое решение u, если изменим краевые значения только на C. Но краевым значениям, тождественно равным единице, соответствует решение $u=1$, между тем как краевым значениям, не равным единице на C, а на всей остальной границе именно равным единице, соответствует другое решение u. Это дает противоречие; следовательно, вся граница является областью зависимости.

В противоположность краевой задаче, задача Коши для уравнения Лапласа была бы некорректной. Во-первых, в общем виде она вообще не имеет решения. Если, например, задать $u(x, 0)=0$, $u_y(x, 0)=g(x)$ и потребовать решения дифференциального уравнения $\Delta u=0$ с этими начальными условиями для верхней полуплоскости $y>0$, то на основании принципа отражения это решение должно быть возможно продолжить посредством отражения на нижнюю полуплоскость; следовательно, это решение должно быть аналитическим и на оси x. Следовательно, и $g(x)$ должна быть аналитической функцией от x и, таким образом, не может быть задана произвольно, как, например, лишь дважды непрерывно дифференцируемая функция. (В случае аналитических начальных значений решение построено в гл. I, § 7.)

Далее, решение такой задачи Коши не зависит непрерывно от начальных данных, как показывает нижеследующий пример, предложенный Адамаром. Рассмотрим упомянутую задачу Коши для последовательности аналитических начальных значений $g_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; при безграничном возрастании n функция $g_n(x)$ стремится равномерно к функции $g(x)=0$. Решение задачи Коши для начальной функции g_n имеет вид:

$$u(x, y)=\frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}.$$

С возрастанием n это решение не стремится к решению $u=0$, принадлежащему начальной функции $g(x)=0$. Это замечание тоже указывает на некорректность задачи Коши.

В противоположность этому *задача Коши*, скажем, для простейшего гиперболического уравнения, а именно — для волнового уравнения, удовлетворяет всем поставленным требованиям. Для решения $u(x, t)$ задачи Коши волнового уравнения $u_{xx}-u_{tt}=0$ с начальными условиями

$$u(x, 0)=\varphi(x), \qquad u_t(x, 0)=\psi(x)$$

мы имели решение

$$2u(x, t)=\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau.$$

Решение этой гиперболической задачи существует, оно является однозначно определенным и, очевидно, зависит непрерывно от заданных начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Легко указать для этого решения и область зависимости: $u(x, t)$ зависит лишь от значений $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ на отрезке $x-t \leqslant \xi \leqslant x+t$.

Напротив, *краевая* задача не имела бы смысла в случае нашего гиперболического дифференциального уравнения. Это станет ясно, если заменить наше дифференциальное уравнение эквивалентным уравнением $u_{xy}=0$ для функции $u(x, y)$; очевидно, что, например, для прямоугольника со сторонами, параллельными осям, уже невозможно задавать произвольно краевые значения, так как в соответствующих противолежащих точках сторон $x=\text{const}$. данного прямоугольника производная u_y должна принимать одинаковые значения, и аналогичное заключение справедливо для u_x. Следовательно, значения u можно задавать произвольно лишь на двух смежных сторонах прямоугольника, и тем самым исключена возможность постановки краевой задачи.

Для параболических дифференциальных уравнений справедливы соображения, совершенно аналогичные тем, которые мы изложили для гиперболических; в этом можно ориентироваться на примере уравнения теплопроводности.

Впрочем, сформулированный здесь и разъясненный на примерах общий тезис о корректности задач с дифференциальными уравнениями получит не раз в дальнейшем изложении подтверждение и углубление.

3. Общие замечания о линейных задачах. Уже в т. I, гл. V, § 1, п. 4 было указано на аналогию между задачами линейных дифференциальных уравнений и систем линейных уравнений с таким же числом неизвестных, например, при замене дифференциальных уравнений разностными. Эту мысль, строгое проведение которой требует предельного перехода, мы не можем здесь развить подробно [1]). Мы ограничимся замечанием, что у N линейных уравнений с N неизвестными существует *альтернатива*:

Либо соответствующая однородная задача имеет не тривиальное решение, либо общая неоднородная задача имеет однозначное решение при произвольно предписанных данных.

Так как многозначность при решении общей неоднородной задачи влечет за собой существование нетривиального решения однородной задачи, то альтернативу можно формулировать и в следующих выражениях: у N линейных уравнений с N неизвестными существование решения общей неоднородной задачи и его однозначность представляют факты эквивалентные.

Можно ожидать, что корректные линейные задачи математической физики ведут себя так же, как системы N линейных уравнений с N неизвестными, и получить, таким образом, следующий эвристический

---

[1]) Ср. статью Courant, Friedrichs, Lewy, Ueber die partiellen Differenzengleichungen der Physik, *Math. Ann.*, т. 100, стр. 32 и следующие.

принцип. Если оказывается, что у корректной линейной задачи с дифференциальным уравнением соответствующая однородная задача имеет только «тривиальное решение» нуль, то можно ожидать существования решения общей неоднородной задачи, которое в этом случае является однозначно определенным. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то существование решения неоднородной задачи связано с выполнением некоторых дополнительных условий.

В томе I этот «принцип альтернатив» нашел широкое подтверждение; добытые там сведения получат в следующих главах дальнейшее углубление.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Нестационарные задачи и операторное исчисление Хивисайда

Нестационарные задачи, упомянутые в гл. III, § 7, играют в приложениях, особенно в электротехнике, в высшей степени важную роль; им поэтому посвящена обширная литература, почти сплошь подчеркивающая точку зрения приложений, причем в центре рассмотрения большей частью стоит знаменитый *операторный метод*, развитый Хивисайдом (Heaviside). Этот операторный метод, дающий целесообразный и прямой путь к решению вопросов, представляется тем более заманчивым, что строгое оправдание его символической процедуры часто отнюдь не очевидно. Такое удовлетворительное обоснование исчисления было дано лишь впоследствии с различных сторон. Однако, эти обоснования отнюдь не делают методов Хивисайда излишними, так как символический метод часто формально проще и позволяет более непосредственно сосредоточить внимание на желательном пункте.

Конечно, полное рассмотрение этой обширной области вышло бы далеко за пределы этого труда. Мы ограничимся здесь теорией лишь простейших типов нестационарных задач и поясним ее на примерах.

§ 1. Нестационарные задачи и решение с помощью интегральных выражений

1. Пример. Волновое уравнение. Предпошлем сначала простой пример нестационарной задачи, легко допускающей явное решение. Мы рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = f(t), \qquad u(l, t) = 0 \tag{α}$$

или соответственно

$$u(0, t) = f(t), \qquad u_x(l, t) = 0, \tag{β}$$