ГЛАВА IV

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И, В ЧАСТНОСТИ, ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Мы не имеем возможности дать в пределах этой книги общую теорию эллиптических дифференциальных уравнений. Ограничиваясь дифференциальными уравнениями второго порядка, мы рассмотрим здесь, главным образом, теорию потенциала. Теория потенциала, являющаяся сама по себе очень важным отделом анализа, представляет собой в то же время типичный пример теории дифференциальных уравнений более общего вида.

В первом томе и предшествующих главах уже были рассмотрены многочисленные вопросы теории потенциала. Опираясь на предыдущие результаты, мы дополним их в настоящей главе и изложим в более систематической форме.

§ 1. Основы

1. Дифференциальные уравнения Лапласа, Пуассона и родственные им дифференциальные уравнения. Мы рассматриваем в некоторой области G пространства $x_1, \ldots, x_n$ с границей Γ функции $u(x_1 \ldots, x_n)$ от n переменных и так называемое *дифференциальное уравнение Лапласа* или *уравнение потенциала*

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0. \tag{1}$$

Решения этого уравнения мы называем *потенциальными* или *гармоническими функциями*. Соответствующее неоднородное уравнение, так называемое *уравнение Пуассона*, обыкновенно пишут, выделяя множитель

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{2}$$

выражающий величину поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, т. е. в виде

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная функция точки. Решения уравнения Лапласа, имеющие в области G непрерывные производные до второго порядка, называются *регулярными в G решениями*. Через G мы

обозначаем здесь и в дальнейшем открытую область. Далее, при отсутствии специальной оговорки, мы будем считать G *ограниченной* областью пространства. Через $G+\Gamma$ мы будем обозначать *замкнутую* область, получающуюся путем присоединения к G точек границы. Точно так же мы говорим о регулярных решениях уравнения Пуассона, предполагая при этом, что μ непрерывна в G. В дальнейшем мы будем рассматривать, главным образом, случаи $n=2$ и $n=3$ и будем в этих случаях вместо x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 писать x, y или x, y, z.

При $n=2$ «*общее решение*» уравнения Лапласа является вещественной частью произвольной аналитической функции от комплексного переменного $x+iy$. При $n=3$ можно также легко получить решения, зависящие от произвольных функций. Пусть, например, $f(\tilde{z}, t)$ представляет собой функцию от комплексного переменного $\tilde{z}$ и вещественного переменного t и пусть при постоянном t $f(\tilde{z}, t)$ является аналитической функцией от $\tilde{z}$. Обозначая теперь через x, y, z вещественные переменные, мы получим, что функция $u=f(z+ix\cos t+iy\sin t,\ t)$ при любых значениях вещественного параметра t удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u=0$. Путем суперпозиции таких решений, например, путем интеграции, мы можем получить другие решения вида

$$u=\int_a^b f(z+ix\cos t+iy\sin t,\ t)\,dt. \tag{4}$$

Так например, полагая

$$f(\tilde{z},\ t)=\tilde{z}^n e^{iht},$$

где n и h — целые числа, и интегрируя от $-\pi$ до π, мы получим однородные полиномы от x, y, z:

$$u=\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^n e^{iht}\,dt.$$

Введя сферические координаты

$$z=r\cos\vartheta,\qquad x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

мы преобразуем эти решения к виду

$$u=2r^n e^{ih\varphi}\int_0^{\pi}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos t)^n\cos ht\,dt.$$

Таким образом, мы получаем с точностью до постоянного множителя функции

$$u=r^n e^{ih\varphi}P_{n,\,h}(\cos\vartheta),$$

где $P_{n,\,h}(x)$ обозначают функции Лежандра высших порядков (см. т. I, стр. 486).

При переходе к полярным координатам r, φ в случае $n=2$ и к сферическим координатам r, ϑ, φ при $n=3$, т. е. с помощью преобразований $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ на плоскости и

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\qquad z=r\cos\vartheta$$

в пространстве, дифференциальное выражение Лапласа приводится к виду (см. т. I, стр. 217)

$$\Delta u=\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, & \text{если } n=2,\\ u_{rr}+\dfrac{2u_r}{r}+\dfrac{u_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta}+\dfrac{1}{r^2\sin\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta)_\vartheta, & \text{если } n=3.\end{cases}\tag{5}$$

Из этих формул вытекает следующая теорема, имеющая многочисленные применения:

Если $u(x, y)$ — регулярная гармоническая функция в плоской области G, то функция

$$v(x, y)=u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)\quad (r^2=x^2+y^2)\tag{6}$$

также удовлетворяет уравнению Лапласа и регулярна в области G', получающейся из G зеркальным отражением в единичном круге.

В трехмерном пространстве имеет место аналогичная теорема; мы должны только здесь положить

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)\quad (r^2=x^2+y^2+z^2).\tag{7}$$

При переходе к полярным координатам наша теорема сводится к утверждению, что наряду с функциями $u(r, \varphi)$ или $u(r, \vartheta, \varphi)$ функции $v(r, \varphi)=u\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$ и $v(r, \vartheta, \varphi)=\frac{1}{r}u\left(\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ также удовлетворяют уравнениям (5). Это получается непосредственно из тождеств:

$$r^4\left(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r\right)=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho,\quad \text{если } n=2,$$

и

$$r^5\left(v_{rr}+\frac{2}{r}v_r\right)=u_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}u_\rho,\quad \text{если } n=3, \text{ где } \rho=\frac{1}{r}.$$

Предлагаем в виде задачи доказать в общем случае n-мерного пространства аналогичную теорему для функции

$$v=\frac{1}{r^{n-2}}u\left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right).\tag{8}$$

Таким образом, если не считать множителя $\frac{1}{r^{n-2}}$, гармонический характер функции сохраняется при зеркальном отражении в какой-нибудь сфере. Так как при параллельном переносе, преобразовании подобия и обыкновенном отражении в плоскости гармонический характер функции также сохраняется и притом полностью, то мы можем наш результат формулировать следующим образом:

Преобразования, составленные из конечного числа параллельных переносов, преобразований подобия и зеркальных отражений в сферах или плоскостях, преобразуют всякую гармоническую функцию в новую гармоническую функцию, если не считать множителя, одинакового для всех гармонических функций (и зависящего только от рассматриваемого преобразования).

Если u — регулярная гармоническая функция в конечной области G, то, отражая G в сфере, центр которой лежит внутри G, мы преобразуем внутренность G в область G', составленную из точек, лежащих вне зеркального отражения Γ' границы Γ области G. Функция

$$v = r^{2-n} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

будет регулярной и гармонической в этой неограниченной области G', образующей внешность поверхности Γ'. Обратно, для того, чтобы определить регулярность гармонической функции в неограниченной области G, мы отражаем сначала область G в сфере, лежащей вне G, превращая таким путем G в ограниченную область G'. *Тогда мы называем функцию u регулярной в G, если указанная выше функция v будет регулярной в области G'.* В частности, гармоническая функция u называется регулярной в бесконечности, если G содержит бесконечно удаленную точку и если в этой точке можно приписать функции u такое значение, чтобы функция v была регулярной в G'. С этой точки зрения функция $u = \text{const}$. будет регулярной в бесконечности только в случае двух измерений; в трехмерном же пространстве или при $n > 3$ функция $u = c \neq 0$ нерегулярна в бесконечно удаленной точке. Функции $u = 1 - a + \frac{a}{r}$ (при произвольном a) в трехмерном пространстве гармоничны вне единичной сферы и принимают на этой сфере краевые значения $u = 1$; однако, из всего этого семейства функций только функция $u = \frac{1}{r}$ регулярна всюду вне единичной сферы.

Как мы видели раньше, единственными решениями уравнения Лапласа, зависящими исключительно от расстояния r точки (x) от фиксированной точки, например, начала координат, являются функции, имеющие с точностью до произвольной мультипликативной и произвольной аддитивной постоянной следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{\omega_n (n-2)} r^{2-n}, \quad \text{если } n > 2, \\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти функции обладают при $r = 0$ *характеристической особенностью*.

Всякое решение уравнения Лапласа в области G, имеющее вид

$$\psi(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \gamma(r) + w \left(r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}\right),$$

где w регулярна, называется *основным решением дифференциального уравнения* с особой точкой ξ, причем точка ξ должна лежать внутри G. Нетрудно получить такие же основные решения и для более общего дифференциального уравнения вида $\Delta u + cu = 0$ при постоянном c. Для этой цели перейдем к полярным координатам и будем искать решения вида $u = \psi(r)$, где $r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}$. Для ψ мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \frac{n-1}{r}\psi' + c\psi = 0. \tag{10}$$

Полагая $\psi(r) = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}}\varphi(\sqrt{c}r)$, мы приведем это уравнение к виду дифференциального уравнения Бесселя

$$\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' + \varphi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\varphi}{\rho^2} = 0 \qquad \left(\rho = \sqrt{c}\,r\right). \tag{11}$$

Мы определяем искомое основное решение ψ как решение уравнения (11), обращающееся в бесконечность при $r = 0$. Например, при нечетном n

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r), \tag{12}$$

а при четном n

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r), \tag{13}$$

где N_ν обозначает ν-ую функцию Неймана.

2. Потенциал распределения массы. При $n = 3$ потенциал

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

означает физически потенциал тяготения в точке x, y, z, производимый единичной массой, сосредоточенной в точке ξ, η, ζ[1]).

Если масса распределена в пространстве ξ, η, ζ с плотностью $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, то мы называем взятый по соответствующей области G пространства ξ, η, ζ интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{14}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

---

[1]) Слово потенциал мы здесь употребляем в физическом смысле, т. е. в смысле величины, градиент которой дает силовое поле. Поэтому для уточнения математической терминологии целесообразно называть решения

потенциалом объемного распределения массы с плотностью μ *в области* G.

Если точка P с координатами x, y, z лежит вне G, то u является гармонической функцией, в чем легко убедиться, дифференцируя u под знаком интеграла. Если же точка P лежит в области G и если μ кусочно-непрерывно дифференцируема[1]) в G, то функция u, как мы показали раньше, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\mu \tag{15}$$

(см. т. I, стр. 346).

Мы приведем здесь другой вывод уравнения Пуассона и осветим его в дальнейшем с разных сторон.

Для этой цели мы сформулируем и докажем следующую теорему: *Пусть* $\mu(x, y, z)$ — *ограниченная и интегрируемая в* G *функция. Тогда потенциал* (14) *и его производные всюду равномерно непрерывны; производные могут быть при этом получены путем дифференцирования под знаком интеграла. Если же, сверх того, функция* μ *непрерывно дифференцируема в* G, *то вторые производные функции* $u(x, y, z)$ *внутри* G *непрерывны и имеет место уравнение Пуассона*

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

Чтобы доказать первую часть этой теоремы, мы рассмотрим функцию

$$u_\delta(x, y, z) = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta) f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{16}$$

где $f_\delta(r)$ — вспомогательная функция, которая вне малой сферы, описанной из точки $r = 0$ радиусом δ, совпадает с основным решением $\frac{1}{r}$, а внутри этой сферы $f_\delta(r)$ остается в противоположность функции $\frac{1}{r}$ ограниченной; при этом предполагается, что $f_\delta(r)$ примы-

---

уравнения Лапласа не потенциальными функциями, а гармоническими функциями, несмотря на то, что понятие потенциала в физике большей частью связано с уравнением Лапласа.

[1]) Целесообразно придерживаться следующих определений: кривая или поверхность называются кусочно-гладкими, если они состоят из конечного числа частей, каждая из которых конгруэнтна кривой или поверхности, заданной функцией $z = f(x_1, \ldots)$, где f непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в соответствующей области, включая границу. Если f имеет также непрерывные производные второго порядка, то мы говорим, что кривая или поверхность имеют *кусочно-непрерывную кривизну*.

Функция называется кусочно-непрерывной в G, если она в этой области непрерывна, за исключением изолированных точек и кусочно-гладких кусков линий или поверхностей, причем число таких линий или поверхностей разрыва должно быть конечным во всякой замкнутой частичной области G' области G, и рассматриваемая функция может иметь вдоль этих линий или поверхностей только разрывы первого рода (скачки). Если первые производные кусочно-непрерывны в G, то функция называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой* в области G.

кает на поверхности сферы к функции $\frac{1}{r}$, оставаясь на сфере непрерывной и непрерывно дифференцируемой.

Мы полагаем, например,

$$\left.\begin{aligned} f_\delta(r) &= \frac{1}{2\delta}\left(3-\frac{r^2}{\delta^2}\right), \quad \text{если } r \leqslant \delta, \\ f_\delta(r) &= \frac{1}{r}, \quad \text{если } r > \delta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Из неравенства

$$|u_\delta - u| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2\, dr = \frac{18\pi}{5} M\delta^2, \tag{18}$$

где M обозначает верхнюю границу μ, следует сразу, что при $\delta \to 0$ последовательность u_δ сходится к потенциалу u равномерно относительно всех значений x, y, z. Но дифференцируемость функции $f_\delta(r) = g(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ непосредственно переносится на функцию u_δ, причем, например

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Пусть теперь функция $\chi(x, y, z)$ определена с помощью сходящегося интеграла

$$\chi = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{19}$$

получающегося из (14) путем формального дифференцирования под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(f_\delta - \frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi\right| \leqslant 4\pi M \int_0^\delta \left(\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial r}\right| + \frac{1}{r^2}\right) r^2\, dr = 5\pi M\delta. \tag{20}$$

Таким образом, последовательность $\frac{\partial u_\delta}{\partial x}$ сходится к функции $\chi(x, y, z)$ равномерно относительно x, y, z. Из известных теорем анализа следует поэтому, что χ непрерывна и что $u_x = \chi$. Аналогичным путем мы получим тот же результат для производных u_y и u_z.

Существование и непрерывность вторых производных функции u не могут быть обеспечены, если не наложить дополнительных ограничений на функцию μ. Если же μ в G непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, то мы можем интеграл

$$u_x = \int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = -\int\int_G\int \mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{21}$$

с помощью интегрирования по частям привести к виду

$$\iiint\limits_G \frac{\mu_\xi}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

и тогда мы получаем на основании предыдущей теоремы, что внутри G u имеет также непрерывные производные второго порядка. В частности, отсюда следует непрерывность выражения Δu, и, как было показано в первом томе,

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

При $n=2$ совершенно аналогичные теоремы имеют место для потенциала плоского распределения массы

$$u(x,y) = \iint\limits_G \mu(\xi,\eta) \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Кроме этих потенциалов объемного и плоскостного распределений массы мы встречаемся в случае $n=3$ еще с потенциалом двойного слоя на поверхности и с потенциалом линейного распределения массы; при $n=2$ мы получаем потенциалы простого и двойного линейного распределения массы. Потенциал массы, распределенной по поверхности F *с поверхностной плотностью* ρ, выражается интегралом вида

$$u = \iint\limits_F \frac{\rho}{r}\, do, \tag{22}$$

где do — элемент поверхности.

Линейный потенциал массы с линейной плотностью τ вдоль линии C с длиной дуги s определяется интегралом

$$u = \int\limits_C \frac{\tau\, ds}{r} \tag{23}$$

или соответственно интегралом

$$u = \int\limits_C \tau \log\frac{1}{r}\, ds \tag{23'}$$

при $n=2$.

Потенциал двойного слоя получается путем суперпозиции потенциалов биполей (см. т. I, гл. VII, стр. 490). *Потенциал точечного биполя* дается выражением

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\cos(\nu, r)}{r}$$

или соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{r} = -\frac{\cos(\nu, r)}{r^2},$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по некоторому направлению пространства ξ, η, ζ или плоскости ξ, η, а (ν, r) — угол между этим направлением и радиусом-вектором, идущим от точки $P(x, y, z)$ к точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$, или же соответствующий угол при $n=2$.

Потенциал двойного слоя с плотностью σ на поверхности F или вдоль кривой C задается тогда выражениями вида

$$u(x, y, z) = \iint\limits_F \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do \tag{24}$$

или же

$$u(x, y) = \int\limits_C \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r}\, ds, \tag{24'}$$

причем здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по принятому за положительное направлению нормали к поверхности или кривой.

3. Формулы Грина и их применения. Самым важным элементарным вспомогательным орудием в теории потенциала служат *формулы Грина*.

Если трехмерная область G с элементом объема dg ограничена кусочно-гладкой[1]) поверхностью Γ, то между двумя функциями u и v имеют место интегральные соотношения, выражающиеся следующими двумя формулами Грина:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, dg + \iiint\limits_G v\, \Delta u\, dg = \iint\limits_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do, \\ &\iiint\limits_G (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dg = \iint\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При этом в первой формуле предполагаются: непрерывность u и v в замкнутой области $G+\Gamma$, непрерывность первых производных u и v в G, а также непрерывность первых производных u вдоль поверхности Γ и вторых производных u в области G; во второй же формуле предполагается непрерывность первых производных u и v в $G+\Gamma$ и вторых производных как u, так и v в области G.

Совершенно аналогичные формулы имеют место при $n=2$.

При $v=1$ получается *интегральная теорема Гаусса*

$$\iint\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do = 0, \tag{26}$$

т. е. *поверхностный интеграл от нормальной производной гармонической функции, регулярной внутри G и непрерывно дифференцируемой в $G+\Gamma$, равен нулю.*

Непосредственным следствием из формулы (26) является следующая теорема относительно потенциала двойного слоя с постоянной плотностью диполей σ:

---

[1]) Ср. примечание 1 на стр. 253.

При постоянной плотности диполей $\sigma = 1$ потенциал диполей куска поверхности F по своей абсолютной величине равняется телесному углу, под которым граница поверхности видна из точки P. В частности, если F замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область G, и если $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали, то потенциал диполей имеет внутри поверхности постоянное значение -4π, а вне ее равняется нулю[1]).

Для доказательства построим конус Ω, образуемый лучами, соединяющими точку P с границей C поверхности F; допустим, для простоты, что поверхность F и часть боковой поверхности конуса Ω, заключенная между вершиной P и кривой C, ограничивают односвязную область G.

Отсекая от области G вершину P с помощью достаточно малой сферы K_ε, описанной из P радиусом ε, обозначим через G_ε остаточную область, ограниченную поверхностями F, Ω и K_ε. В области G_ε функция $u = \frac{1}{r}$ всюду регулярна. Применяя интегральную теорему Гаусса (26), мы получаем:

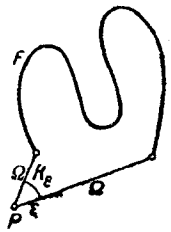
$$\iint\limits_F \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do + \iint\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do + \iint\limits_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = 0.$$

Но вдоль Ω выражение $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)$ обращается в нуль, а вдоль K_ε оно имеет постоянное значение $\pm\frac{1}{\varepsilon^2}$ *). Отсюда непосредственно вытекает наша теорема. (В самом деле, обозначая через $d\omega$ элемент поверхности единичной сферы K_1, описанной из точки P, мы получаем, что на K_ε

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = \pm d\omega,$$

откуда

$$\iint\limits_F \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do = \mp \iint\limits_{K_1} d\omega.$$



Черт. 17.

[1]) Если куску поверхности F приписать определенную положительную или отрицательную сторону, то знак телесного угла определяется однозначно следующим образом. Конус Ω образует с куском поверхности F замкнутую область. Допустим сначала, что эта область односвязна. Тогда телесный угол имеет отрицательный знак, если направленная в положительную сторону от F нормаль является внешней нормалью относительно этой области, и положительный знак — в противоположном случае. В общем же случае мы разбиваем поверхность F на конечное число частичных кусков, для каждого из которых наше допущение выполняется, и убеждаемся, что наш потенциал диполей равняется сумме соответствующих телесных углов, взятых с надлежащим знаком.

*) Верхний знак должен быть взят, если производная $\frac{\partial}{\partial \nu}$ берется по направлению, внешнему относительно области G, ограниченной F и Ω, а нижний знак — в противоположном случае. (*Прим. перев.*)

Интеграл, стоящий справа, равняется телесному углу, под которым из точки P видна граница поверхности F, причем этот телесный угол берется с отрицательным знаком, если положительное направление нормали, т. е. направление, по которому производится дифференцирование $\frac{\partial}{\partial \nu}$, является внешним относительно области G, ограниченной F и Ω, и с положительным знаком — в противоположном случае.) (*Прим. перев.*)

При $n=2$ аналогичная теорема гласит так:

Потенциал биполей

$$u(x, y)=\int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds$$

дуги кривой C с постоянной плотностью $\sigma=1$ равняется углу, под которым граничные точки дуги C видны из точки P. В частности, если C — замкнутая кривая, ограничивающая область G, то $u=-2\pi$ внутри G и $u=0$ вне этой области.

Полагая в первой из формул (25) $v=u$, мы получим тождество:

$$D[u]=\iiint_G (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,dg=\iint_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,do, \tag{27}$$

имеющее место для всякой гармонической функции u, регулярной в области G и имеющей непрерывные производные в области $G+\Gamma$. Формула (27) остается справедливой также и в том случае, когда область G содержит бесконечно удаленную точку, если только гармоническая функция u остается регулярной в бесконечности, т. е. если функция

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

регулярна в точке $r=0$.

Интеграл $D(u)$, так называемый *интеграл Дирихле*, играет в теории потенциала чрезвычайно важную роль. Как мы уже видели в первом томе (стр. 182), интеграл Дирихле является связующим звеном между теорией потенциала и вариационным исчислением.

Этот факт будет иметь для нас позже фундаментальное значение и будет положен в основу теории, излагаемой нами в гл. VII.

Мы можем уже теперь получить из формулы (27) следующее следствие:

Пусть u регулярная гармоническая функция в области G, непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$. Тогда, если u обращается в нуль на поверхности Γ, то u тождественно равно нулю всюду внутри области G; если же вдоль поверхности Γ обращается в нуль нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, то функция u постоянна в области G.

В самом деле, в обоих случаях $D[u]=0$, так что $u=\text{const.}=C$, всюду в G, причем в первом случае постоянная $C=0$, так как она должна совпадать с нулевыми краевыми значениями функции u.

Пусть G — шар радиуса R. Положим $v=\frac{1}{r}$, где r — расстояние от центра шара, и применим вторую из формул (25) к области, заключенной между произвольно выбранной концентрической сферой радиуса $R_0<R$ и заданной сферой радиуса R. Учитывая формулу (26), мы получим:

$$\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{\Gamma_0} u\,do=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,do. \tag{28}$$

Заставляя теперь R_0 стремиться к нулю, мы получим *теорему о среднем значении*

$$u_0=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Gamma} u\,do. \tag{29}$$

Другими словами, *значение гармонической функции в некоторой точке равняется среднему арифметическому значений этой функции на поверхности какой-нибудь сферы, описанной из данной точки, если внутри этой сферы функция всюду регулярна и имеет непрерывные краевые значения.*

Из этой теоремы о среднем значении мы можем сделать ряд важных выводов.

Максимум и минимум гармонической в области G функции u, регулярной внутри G и непрерывной на границе Γ, достигаются всегда на границе Γ и не достигаются внутри, если только u не является постоянной.

Для доказательства рассмотрим множество точек F замкнутой области $G+\Gamma$, в которых u равняется наибольшему из значений, принимаемых функцией u в $G+\Gamma$. Так как u непрерывна в $G+\Gamma$, то F — замкнутое множество. Допустим, что F содержит какую-нибудь внутреннюю точку P_0 области G; тогда существует семейство сфер, описанных из точки P_0 и целиком лежащих внутри G. Так как среднее арифметическое значений функции u на каждой такой сфере равняется также $u(P_0)=M$ и так как $u\leqslant M$ всюду в G, то отсюда следует, что внутри всякого шара с центром в P_0, целиком лежащего внутри G, всюду $u=M$.

Итак, наряду с любой внутренней точкой P_0 области G множество F должно содержать также и всякий шар с центром P_0, лежащий целиком внутри G, но это возможно только тогда, когда F совпадает с $G+\Gamma$, т. е. когда u постоянна в $G+\Gamma$. Если же u не является постоянной, то F может содержать только граничные точки. Точно таким же образом доказывается, что минимум функции u достигается на границе и не достигается внутри G, если только u не является постоянной.

Из этой теоремы о максимуме и минимуме непосредственно вытекает следующая теорема:

Если гармоническая функция u, регулярная в G и непрерывная в $G+\Gamma$, постоянна на границе Γ, то она постоянна также всюду внутри G.

В частности, получается *теорема о единственности.*

Если две гармонические функции, регулярные в G и непрерывные в $G+\Gamma$ совпадают на границе Γ, то они также совпадают между собой всюду в G.

В самом деле, разность обеих функций сама является также гармонической функцией, регулярной в G и непрерывной в $G+\Gamma$. Так как по условию эта функция обращается в нуль на границе Γ, то в силу предыдущего она должна тождественно обращаться в нуль также и всюду внутри G.

Формулы Грина (25) подвергаются существенному изменению, если мы подставим вместо v функцию, обладающую в точке P характеристической особенностью уравнения Лапласа. Пусть P — внутренняя точка G с координатами x, y, z. Положим:

$$v(\xi, \eta, \zeta)=\frac{1}{r}+w(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

а $w(\xi, \eta, \zeta)$ — произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в области G.

Применим формулы Грина (25) к частичной области $G-K_\varepsilon$ области G, получающейся путем удаления из области G достаточно малого шара K_ε, описанного из точки P радиусом ε. Переходя затем к пределу при $\varepsilon\to 0$, мы получим обычным элементарным путем следующие формулы:

$$\iiint\limits_G (u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z)\,dg+\iiint\limits_G u\,\Delta w\,dg=$$

$$=pu+\iint\limits_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,do, \tag{30}$$

$$\iiint\limits_G (u\,\Delta w-v\,\Delta u)\,dg=pu+\iint\limits_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)do. \tag{30'}$$

При этом $v=\frac{1}{r}+w$, а

$$p=\begin{cases} 4\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } G,\\ 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma,\\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G.\end{cases}$$

Если P лежит на Γ, то мы предполагаем, кроме того, что поверхность Γ имеет в точке P касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами [1]).

Далее, мы делаем в отношении функций u и w те же допущения, что и в формулах (25), а именно, мы предполагаем существование интегралов, взятых по области G, непрерывность u и w в $G+\Gamma$, непрерывность первых и вторых производных u и w в G; сверх того, мы в формуле (30) предполагаем непрерывность первых производных функции u в $G+\Gamma$, а в формуле (30′) — непрерывность первых производных как функции u, так и функции w в области $G+\Gamma$.

Для плоскости имеет место при тех же предположениях аналогичная система формул:

$$\iint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y)\, do + \iint\limits_G u\,\Delta w\, do = pu + \int\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds, \tag{31}$$

$$\iint\limits_G (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\, do = pu + \int\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds, \tag{31'}$$

где $v = \log \frac{1}{r} + w$, а

$$p = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } G, \\ \pi, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma, \\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G. \end{cases}$$

Если, в частности, положить $w = 0$, то мы получаем для всех точек P, лежащих внутри G, следующее интегральное выражение для функции u:

$$u = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_G \frac{\Delta u}{r}\, dg + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu}\, do. \tag{32}$$

Таким образом, всякая функция u, дважды непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$, может быть рассматриваема как потенциал распределения массы, состоящего из объемного распределения массы в области G с плотностью $-\frac{\Delta u}{4\pi}$, поверхностного распределения с плотностью $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu}$ и двойного слоя биполей плотности $-\frac{u}{4\pi}$, покрывающих поверхность Γ.

---

[1]) Если P является конической вершиной поверхности Γ, то коэффициент p равняется не 2π, а телесному углу, образуемому касательными к Γ в конической вершине P.

Для гармонической функции u мы получаем, в частности,

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} do - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \nu} do, \tag{33}$$

т. е. всякая гармоническая функция u, регулярная в G и непрерывно дифференцируемая в $G+\Gamma$, может быть представлена как сумма потенциала простого слоя плотности $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и потенциала двойного слоя диполей плотности $-\frac{1}{4\pi}u$.

Из формул (30′) мы можем снова получить теорему о среднем значении для гармонических функций. В самом деле, применим (30′) к шару радиуса R, полагая $w = -\frac{1}{R} = \text{const.}$, тогда v обратится в нуль на поверхности шара, и мы непосредственно получаем соотношение (29).

Предложим в виде задачи перенести все эти выводы на случай $n=2$ и на случай любого числа измерений. При любом n и совершенно аналогичных предположениях относительно функций u и v и области G имеют место формулы Грина

$$\left.\begin{aligned} \iint_G \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + v\,\Delta u\right) dg &= \int_\Gamma \cdots \int v \frac{\partial u}{\partial \nu} do, \\ \iint_G \cdots \int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dg &= \int_\Gamma \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

и формулы, аналогичные формулам (30):

$$\left.\begin{aligned} \iint_G \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + u\,\Delta w\right) dg &= pu + \int_G \cdots \int u \frac{\partial v}{\partial \nu} do, \\ \iint_G \cdots \int (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\, dg &= pu + \int_\Gamma \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

При этом, если $n>2$, мы должны положить

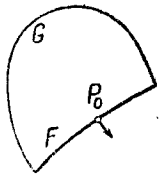
$$v = \frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}} + w,$$

$$p = \begin{cases} \omega_n, & \text{если } P \text{ лежит в } G, \\ \frac{\omega_n}{2}, & \text{если } P \text{ лежит на } \Gamma, \\ 0, & \text{если } P \text{ лежит вне } G. \end{cases}$$

do здесь обозначает элемент поверхности, а $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по внешней нормали к поверхности Γ.

4. Производные потенциала поверхностного распределения массы. В п. 2 мы доказали, что потенциал объемного распределения массы непрерывен и имеет непрерывные производные, если плотность массы ограничена и интегрируема.

Мы рассмотрим теперь *свойства непрерывности поверхностных потенциалов и потенциалов двойного слоя*, а также их производных при переходе точки $P(x, y, z)$ через поверхность F, причем мы здесь не будем стараться доказывать наши теоремы при возможно более общих предположениях. Мы применяем следующий метод [1]). Рассмотрим согласно черт. 18 точку P_0 на куске поверхности F, являющемся частью границы Γ трехмерной области G. На эту область G мы продолжаем с достаточной степенью непрерывности заданные на F функции ρ или σ, выражающие плотность распределения массы на поверхности F. Затем мы применяем к области G и подходящим образом выбранным функциям u и v формулы Грина (30) и (30′). Так как нашей целью является лишь изучение разрывов рассматриваемой функции, то целесообразно опускать в наших формулах все выражения, остающиеся непрерывными при переходе точки P через поверхность F; условимся писать символически, что такое выражение $\equiv 0$ («сравнимо с нулем»). Область G мы выбираем так, чтобы положительная нормаль к F была внешней нормалью относительно G.



Черт. 18.

Заметим, прежде всего, что потенциал простого поверхностного слоя, как нетрудно убедиться, изменяется непрерывно при переходе точки P через поверхность F. Таким образом, нам остается только исследовать поведение потенциала двойного слоя, его производных, а также производных потенциала простого слоя. Мы получим при этом следующий результат, который впрочем остается справедливым и при значительно более слабых предположениях (применяя при доказательстве тот же самый метод).

Мы допускаем, что поверхность F имеет в окрестности точки P_0 непрерывную кривизну (см. примечание 1, стр. 253) и что плотность массы на поверхности F дважды непрерывно дифференцируема. Тогда:

1. *Потенциал двойного слоя имеет в точке P_0 при переходе через поверхность F разрывы непрерывности, выражаемые следующими формулами:*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{P_+ \to P_0} u(P_+) - u(P_0) &= 2\pi\sigma(P_0), \\ \lim_{P_- \to P_0} u(P_-) - u(P_0) &= -2\pi\sigma(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

[1]) Наш метод имеет некоторое сходство с методом Эргарда Шмидта (Erhard Schmidt). См. математические работы, посвященные памяти Германа Амандуса Шварца, стр. 265, Берлин, 1914.

При этом символ $P_+ \to P_0$ обозначает приближение к P_0 с положительной стороны поверхности F, а $P_- \to P_0$ — приближение к P_0 с отрицательной стороны F.

2. *Производная потенциала двойного слоя и (P), взятая по направлению нормали к поверхности F, изменяется непрерывно, когда P переходит через поверхность вдоль нормали к поверхности в точке P_0. Тангенциальные же производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, т. е. производные по направлениям, перпендикулярным к нормали, имеют при этом разрывы, величина которых определяется следующими формулами:*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{P_+ \to P_0} \frac{\partial u(P_+)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t}, \\ &\lim_{P_- \to P_0} \frac{\partial u(P_-)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = -2\pi \frac{\partial \sigma(P)}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

3. *Потенциал простого слоя, а также его тангенциальные производные изменяются непрерывно при переходе через P_0; нормальные же производные потенциала простого слоя имеют разрыв, величина которого определяется формулой*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \frac{\partial u}{\partial \nu^+} + \frac{\partial u}{\partial \nu^-} = -4\pi\rho(P_0). \tag{38}$$

При этом $\frac{\partial u}{\partial \nu^+}$ обозначает дифференцирование по направлению положительной нормали к поверхности в точке P_0, а $\frac{\partial u}{\partial \nu^-}$ — дифференцирование по направлению отрицательной нормали.

Переходя к доказательству, рассмотрим сначала двойной слой плотности σ, продолжим функцию σ на область $G+F$ в качестве непрерывно дифференцируемой функции $\sigma(x, y, z)$ и напишем формулу Грина (30), полагая $u=\sigma$ и отбрасывая члены, остающиеся непрерывными при переходе через поверхность:

$$p\sigma + \iint\limits_F \sigma \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) do \equiv -\iiint\limits_G \left(\sigma_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \sigma_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \sigma_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dg$$

(поверхностные интегралы, не относящиеся к части поверхности F, очевидно, непрерывны относительно P и имеют непрерывные производные какого угодно порядка).

Так как правая часть этого равенства согласно нашим прежним рассмотрениям на стр. 254 непрерывна, то отсюда непосредственно получается наше утверждение относительно поведения потенциала двойного слоя.

Чтобы доказать наше утверждение относительно производной потенциала двойного слоя, мы предположим, что функция σ продолжена на область G в качестве дважды непрерывно дифференцируемой

функции $\sigma(x, y, z)$ и притом так, чтобы производная по нормали $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}$ обращалась в нуль вдоль поверхности F. Применим теперь к функциям $u = \sigma$ и $v = \frac{1}{r}$ вторую формулу Грина (30′), которая принимает следующий вид:

$$p\sigma + \iint\limits_F \sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\nu} d\omega = -\iiint\limits_G \frac{\Delta\sigma}{r} dg.$$

Так как правая часть непрерывна, т. е. сравнима с нулем, то мы отсюда получаем, прежде всего, еще раз наше утверждение относительно поведения самого потенциала двойного слоя; но правая часть, сверх того, имеет непрерывные частные производные по x, y, z, откуда следует, что производные потенциала двойного слоя имеют на поверхности F такие же скачки, как и соответствующие производные функции — $p\sigma$, что и доказывает утверждение 2 и формулу (37).

Совершенно таким же образом получается наше утверждение относительно скачков производных потенциала простого слоя [формула (38)]. Мы снова применяем формулу Грина (30′), выбирая, однако, функцию u так, чтобы она сама тождественно обращалась в нуль вдоль поверхности F, а ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ равнялась плотности ρ поверхностного распределения массы.

Возможность продолжения наших краевых функций σ и ρ на трехмерную область G, примыкающую к поверхности F, с соблюдением указанных выше требований непрерывности вполне обеспечиваются теми ограничениями, которым мы подчинили поверхность F и функции распределения массы на поверхности.

Аналогичные теоремы и формулы для скачков имеют место для потенциала на плоскости с той только разницей, что в формулах (36) и (37) множитель 2π должен быть заменен множителем π, а в формуле (38) множитель 4π должен быть заменен множителем 2π.

§ 2. Интеграл Пуассона и его следствия.

1. Краевая задача и функция Грина. Мы уже исследовали в т. I, гл. V, § 14 вопрос о представлении решения краевой задачи с помощью так называемой *функции Грина*, не зависящей от краевых значений или соответственно от правой части дифференциального уравнения. Напомним еще раз основной ход рассуждений. Мы рассматриваем ограниченную область G пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющую кусочно-гладкую [1]) границу Г. Пусть заданные вдоль границы Г краевые значения искомой функции u совпадают со значениями, которые принимает на Г некоторая заданная в замкнутой об-

[1]) См. примечание к стр. 253.