функции $\sigma(x, y, z)$ и притом так, чтобы производная по нормали $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}$ обращалась в нуль вдоль поверхности F. Применим теперь к функциям $u = \sigma$ и $v = \frac{1}{r}$ вторую формулу Грина (30′), которая принимает следующий вид:

$$p\sigma + \iint\limits_F \sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\nu} d\omega = -\iiint\limits_G \frac{\Delta\sigma}{r} dg.$$

Так как правая часть непрерывна, т. е. сравнима с нулем, то мы отсюда получаем, прежде всего, еще раз наше утверждение относительно поведения самого потенциала двойного слоя; но правая часть, сверх того, имеет непрерывные частные производные по x, y, z, откуда следует, что производные потенциала двойного слоя имеют на поверхности F такие же скачки, как и соответствующие производные функции — $p\sigma$, что и доказывает утверждение 2 и формулу (37).

Совершенно таким же образом получается наше утверждение относительно скачков производных потенциала простого слоя [формула (38)]. Мы снова применяем формулу Грина (30′), выбирая, однако, функцию u так, чтобы она сама тождественно обращалась в нуль вдоль поверхности F, а ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ равнялась плотности ρ поверхностного распределения массы.

Возможность продолжения наших краевых функций σ и ρ на трехмерную область G, примыкающую к поверхности F, с соблюдением указанных выше требований непрерывности вполне обеспечиваются теми ограничениями, которым мы подчинили поверхность F и функции распределения массы на поверхности.

Аналогичные теоремы и формулы для скачков имеют место для потенциала на плоскости с той только разницей, что в формулах (36) и (37) множитель 2π должен быть заменен множителем π, а в формуле (38) множитель 4π должен быть заменен множителем 2π.

§ 2. Интеграл Пуассона и его следствия.

1. Краевая задача и функция Грина. Мы уже исследовали в т. I, гл. V, § 14 вопрос о представлении решения краевой задачи с помощью так называемой *функции Грина*, не зависящей от краевых значений или соответственно от правой части дифференциального уравнения. Напомним еще раз основной ход рассуждений. Мы рассматриваем ограниченную область G пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющую кусочно-гладкую [1]) границу Г. Пусть заданные вдоль границы Г краевые значения искомой функции u совпадают со значениями, которые принимает на Г некоторая заданная в замкнутой об-

[1]) См. примечание к стр. 253.

ласти $G+\Gamma$ непрерывная и имеющая непрерывные производные третьего порядка функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Краевая задача теории потенциала состоит в том, что требуется найти непрерывное в $G+\Gamma$ и регулярное в G решение дифференциального уравнения $\Delta u=0$, совпадающее вдоль Γ с функцией f. Заметим сейчас же, что этот, на первый взгляд, специальный, характер формулированной таким образом краевой задачи не является существенным, ибо, как мы увидим в § 4, мы можем путем простого перехода к пределу легко освободиться от введенных ограничительных условий дифференцируемости для краевых значений искомой функции. Вводя теперь вместо функции u функцию $v=u-f$, мы можем привести нашу краевую задачу к несколько иному виду. Для функции v мы получаем на Γ нулевые краевые значения, так что краевое условие становится однородным, тогда как уравнение Лапласа для u переходит в неоднородное уравнение

$$\Delta v=-\Delta f$$

для функции v.

Обозначим через Q фиксированную внутреннюю точку области G с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а через $P-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — переменную точку, пробегающую всю область G, и пусть γ обозначает определенную на стр. 251 функцию.

Назовем теперь функцией Грина дифференциального выражения Δu, принадлежащей к области G, то основное решение уравнения

$$\Delta u=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,$$

т. е. решение вида

$$\left.\begin{aligned} u=K(P, Q)=K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)=\gamma(r)+w \\ \left(r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

регулярное в G всюду, кроме точки $P=Q$, которое обращается в нуль вдоль границы Γ. Эта функция $u=u(P)$ зависит от точки $Q=Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ как параметра.

Как функция двух точек P и Q функция Грина $u=K(P, Q)$ является симметрической функцией

$$K(P, Q)=K(Q, P)$$

(см. т. I, стр. 343).

Так как функция Грина обращается в нуль на границе Γ и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной из точки Q, то отсюда следует, что *функция Грина всюду положительна внутри G.*

Если допустить, что функция K во всех точках $G+\Gamma$, за исключением точки $P=Q$, не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема, а v является непрерывным и непрерывно дифферен-

цируемым в $G+\Gamma$ решением уравнения $\Delta v = -\Delta f$, то мы получим непосредственно на основании формулы (35) из § 1 следующее интегральное выражение для v:

$$v = \int\int\underset{G}{\ldots}\int K(x_1, \ldots, \xi_n)\,\Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n, \tag{2}$$

а для решения u первоначальной краевой задачи

$$u = f + \int\int\underset{G}{\ldots}\int K(x_1, \ldots, \xi_n)\,\Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) создают на первый взгляд такое впечатление, что решение u зависит от значений функции f внутри G. В том, что это не так, легко убедиться, применяя к правой части уравнения (3) формулу Грина. Мы получаем:

$$\int\int\underset{G}{\ldots}\int K\Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = -f - \int\underset{\Gamma}{\ldots}\int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do,$$

откуда следует, что формула (3) равносильна формуле

$$u = -\int\underset{\Gamma}{\ldots}\int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do, \tag{4}$$

правая часть которой зависит только от краевых значений f и не зависит от значений f внутри G.

Однако, во многих случаях является более целесообразным сохранить первоначальную форму (3) интегрального выражения для решения краевой задачи. Формула (3) обладает тем преимуществом, что, отбрасывая введенные раньше ограничения в отношении K и v, мы можем, обратно, доказать следующую теорему. *Если $K(P, Q)$ есть функция Грина для ограниченной области G, а g — произвольная кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, то выражение*

$$v = \int\int\underset{G}{\ldots}\int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

представляет решение дифференциального уравнения Пуассона $\Delta v = -g$, непрерывное в $G+\Gamma$ и обращающееся в нуль на границе Γ.

То, что v удовлетворяет в G дифференциальному уравнению, непосредственно следует из интегрального выражения функции v и из кусочно-непрерывной дифференцируемости функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 1, стр. 254).

Чтобы доказать, что функция v обращается в нуль на границе, недостаточно сослаться на то, что K обращается в нуль на границе, ибо K не стремится равномерно относительно Q к нулю, когда P приближается к границе.

Чтобы обойти эту трудность, мы воспользуемся следующей леммой, которую мы докажем ниже в п. 2.

Если B подобласть G, диаметр которой не превосходит h, то имеет место оценка

$$\iint\limits_{B} \ldots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1, \ldots, d\xi_n < \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(h)$ обозначает некоторую верхнюю границу, зависящую только от h и не зависящую от специального выбора подобласти B, которая вместе с h стремится к нулю.

Пусть теперь точка P области G неограниченно приближается к точке R границы Γ. Обозначим через B_h ту подобласть G, которая лежит внутри сферы радиуса h, описанной из точки R, а через G' — остальную часть области G. Тогда

$$v = \iint\limits_{G'} \ldots \int Kg\, d\xi_1 \ldots d\xi_n + \iint\limits_{B_h} \ldots \int Kg\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Когда точка P стремится к точке R, первый интеграл взятый в области G', очевидно, стремится к нулю. Для второго же интеграла

$$v_h = \iint\limits_{B_h} \ldots \int Kg\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

мы получаем непосредственно оценку:

$$|v_h| < M\varepsilon(h),$$

где M обозначает верхнюю границу для $|g|$. Отсюда следует, что когда точка P достаточно близка к точке R, то имеет место неравенство $|v| < M\varepsilon(h)$, а так как h может быть выбрано произвольно, то наша теорема доказана.

На основании этой теоремы интегральные формулы (2) и (3) нам дают непосредственно решение u краевой задачи, если известна функция K.

Итак, *общая краевая задача с произвольными заданными краевыми значениями, по существу своему, эквивалентна задаче нахождения функции Грина*, которой соответствует совершенно частная краевая задача, содержащая, правда, в качестве параметра точку Q.

2. Функция Грина для круга и шара. Интеграл Пуассона для шара и полупространства. В первом томе нами уже была построена функция Грина для круга и шара. Проведенные там рассуждения легко распространяются на лапласиан в n-мерном пространстве. Пусть $\gamma = \psi(r)$ обозначает основное решение дифференциального уравнения $\Delta u = 0$ в случае n измерений, так что

$$\left.\begin{aligned} &\psi(r) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} r^{2-n}, \quad \text{если } n > 2, \\ \text{и} \quad &\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда функция Грина для шара радиуса R непосредственно задается выражением:

$$K(x_1, \ldots, \xi_n) = \psi(r) - \psi\left(\frac{\rho}{R} r_1\right), \tag{6}$$

причем

$$\rho^2 = \sum \xi_\nu^2, \qquad r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2,$$

а

$$r_1 = \sqrt{\sum \left(x_\nu - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_\nu\right)^2}$$

обозначает расстояние точки $x_1, \ldots, x_n$ от зеркального отражения

$$\frac{R^2}{\rho^2} \xi_1, \qquad \frac{R^2}{\rho^2} \xi_2, \ldots, \qquad \frac{R^2}{\rho^2} \xi_n$$

точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в рассматриваемой сфере. Эта функция удовлетворяет, как легко убедиться, всем требованиям, характеризующим функцию Грина, и, в частности, обращается в нуль на поверхности сферы, ибо если точка P лежит на сфере, т. е. если $\sum x_\nu^2 = R^2$, то, как нетрудно видеть, $r = \frac{\rho}{R} r_1$. Мы можем следующим образом использовать функцию Грина для круга или шара в качестве *мажоранты для функций Грина, принадлежащих к произвольным ограниченным областям* G.

Пусть Q произвольная точка области G. Выберем число R настолько большим, чтобы сфера радиуса R, описанная из любой точки области G, целиком содержала внутри себя всю область $G + \Gamma$. Если через r обозначить расстояние от точки Q, то функция

$$\psi(r) - \psi(R) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{R}{r} & \text{при } n = 2, \\ \dfrac{1}{\omega_n (n-2)} (r^{2-n} - R^{2-n}) & \text{при } n > 2 \end{cases}$$

является функцией Грина для сферы радиуса R, описанной из точки Q, если особая точка функции Грина совпадает с центром Q рассматриваемой сферы. Обозначим через $K(P, Q)$ функцию Грина, которая принадлежит области G и особая точка которой также совпадает с точкой Q. Тогда разность

$$K - [\psi(r) - \psi(R)]$$

регулярна в области G. Так как эта функция на границе Γ нигде не положительна, то всюду в области G имеют место неравенства

$$0 \leqslant K \leqslant \psi(r) - \psi(R).$$

Из этой оценки для функции Грина K легко получается примененная в п. 1 оценка

$$\int\int \cdots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n < \varepsilon(h)$$

для областей, диаметр которых не превосходит h.

С помощью формулы (6) мы получаем решение краевой задачи уравнения $\Delta u = 0$ для шара с краевым условием $u = f$ на границе Γ в виде интеграла

$$u = -\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do.$$

Легко убедиться путем простого вычисления, что

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \psi'(r) \frac{R^2 - \rho^2}{rR}, \tag{7}$$

так что интегральное выражение для u принимает вид

$$u = -\frac{R^2 - \rho^2}{R} \iint \frac{\psi'(r)}{r} f\, do. \tag{8}$$

Представив себе f заданной в виде функции координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ на единичной сфере и заменяя $\psi(r)$ выражением (5), мы получим *интегральную формулу Пуассона*:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \iint \frac{f\, d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\vartheta)^{\frac{n}{2}}}. \tag{9}$$

При этом интеграл берется по поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а ϑ означает угол между радиусом-вектором ρ и радиусом, соединяющим центр шара с точкой $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

При $n = 2$ и $n = 3$ эта формула была получена нами уже раньше (см. т. I, стр. 489).

Из наших предыдущих рассмотрений следует, что решение краевой задачи дается формулой (9), если краевые значения f задаются значениями, которые принимает на поверхности Γ функция, непрерывная в G и имеющая в G непрерывные производные первого и второго порядков и кусочно-непрерывные производные третьего порядка. Так, например, все эти условия выполняются для функции $f \equiv 1$; интегральная формула Пуассона в соединении с теоремой единственности § 1 выражает в этом случае тот факт, что взятый по поверхности сферы радиуса R по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n$ интеграл от положительного внутри сферы ядра

$$H(P, Q) = \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R r^n} \quad (r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2}) \tag{10}$$

равняется единице:

$$\int \ldots \int H(P, Q)\, do = \\ = \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \iint \frac{d\omega_n}{(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\vartheta)^{n/2}} = 1. \tag{11}$$

Это ядро $H(P, Q)$ как функция точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при фиксированной точке $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет само уравнению

Лапласа, в чем мы убеждаемся непосредственно, представляя эту функцию в виде

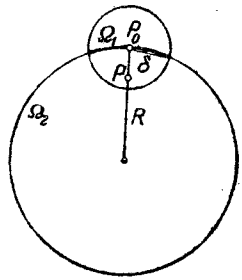
$$R\omega_n H = -\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{2}{n-2}\sum \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right),$$

причем

$$r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2.$$

На поверхности сферы H обращается в нуль во всех точках, за исключением точки $P = Q$, при приближении к которой изнутри сферы H неограниченно растет.

Мы можем теперь легко освободиться от тех слишком больших ограничений, которым мы подчинили краевые значения f, и доказать следующую теорему: *Интегральная формула Пуассона дает решение краевой задачи, если краевые значения удовлетворяют одному только требованию непрерывности на поверхности сферы.*



Черт. 19.

В самом деле, при этом предположении мы имеем право сколько угодно раз дифференцировать выражение (9) под знаком интеграла, если только точка P является внутренней точкой шара. Так как H удовлетворяет уравнению Лапласа, то отсюда следует, что определяемая формулой (9) функция u — гармоническая функция, регулярная всюду внутри шара. Остается еще доказать, что при приближении к границе u переходит в заданные краевые значения.

Пусть P_1 произвольная точка границы, а P достаточно близкая внутренняя точка шара (черт. 19). Обозначим через P_0 конечную точку радиуса, соединяющего центр шара с точкой P.

Тогда в силу неравенства

$$u(P) - f(P_1)| \leqslant |u(P) - f(P_0)| + |f(P_0) - f(P_1)|$$

и вследствие непрерывности краевой функции достаточно доказать, что u стремится к краевой функции f при радиальном приближении точки P к границе Г, т. е. доказать, что выражение

$$u(P) - f(P_0) = \iint H(P, Q)\,[f(Q) - f(P_0)]\,do_Q \qquad (12)$$

стремится к нулю, когда P неограниченно приближается к P_0 вдоль радиуса, соединяющего центр шара с точкой P_0.

Для доказательства разобьем поверхность шара с помощью сколь угодно малой сферы, описанной из точки P_0 радиусом δ, на две части Ω_1 и Ω_2 и допустим, что точка P уже лежит внутри этой сферы радиуса δ, т. е. что расстояние $h = (P, P_0)$ меньше δ. Пусть Ω_1 обозначает ту часть поверхности сферы, которой принадлежит точка P_0.

Если во всех точках сферы $|f| \leqslant M$, а во всех точках области Ω_1

$$|f(Q) - f(P_0)| \leqslant \sigma(\delta),$$

то мы получаем из уравнения (12) следующую оценку:

$$|u(P) - f(P_0)| \leqslant 2M \iint\limits_{\Omega_1} H\, do_Q + \\ + \sigma(\delta) \iint\limits_{\Omega_1} H\, do_Q < 2M \iint\limits_{\Omega_2} H\, do_Q + \sigma(\delta).$$

Но, как нетрудно убедиться, в области Ω_2 ядро H остается меньше выражения

$$\frac{R^2 - \rho^2}{R\omega_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n} < \frac{2Rh}{R\omega_n \left(\frac{\delta}{2}\right)^n}.$$

Таким образом,

$$|u(P) - f(P_0)| < \frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} h + \sigma(\delta).$$

Выбрав теперь δ так, чтобы во всех точках Q области Ω_1 имело место неравенство

$$|f(Q) - f(P_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

мы можем положить

$$\sigma(\delta) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируя δ и выбирая тогда h так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} h < \frac{\varepsilon}{2},$$

мы убеждаемся, что будет выполняться условие $|u(P) - f(P_0)| < \varepsilon$, и тем самым наша теорема доказана. Аналогичная интегральная формула и соответствующие результаты получаются, если взять в качестве области G вместо сферы полупространство.

Пусть, например, G обозначает полупространство $z > 0$, так что границей Γ будет плоскость $z = 0$. Тогда решение краевой задачи для области G при любых краевых значениях $f(x, y)$ дается *интегралом Пуассона для полупространства*

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}, \tag{9'}$$

если только функция $f(x, y)$ такова, что после зеркального отражения плоскости $z = 0$ в сфере, лежащей вне области G (см. п. 1, стр. 251), получается краевая задача с непрерывными краевыми зна-

чениями для ограниченной области G', являющейся зеркальным отражением области G.

В случае n измерений, взяв в качестве области G область $x_n > 0$, мы получим при выполнении соответствующих условий интегральную формулу:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{2x_n}{\omega_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{[(x_1-\xi_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}-\xi_{n-1})^2 + x_n^2]^{n/2}}. \qquad (9'')$$

3. Следствия из формулы Пуассона. Заметим прежде всего, что как теорема о максимуме и минимуме, так и теорема о среднем значении могут быть получены также как непосредственные следствия из формулы Пуассона. Ввиду очевидности доказательства мы можем подробнее на этом не останавливаться.

Всюду положительное ядро H заключается при $\rho < R$ между значениями

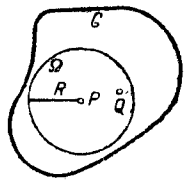
$$\frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R\omega_n}\left(\frac{1}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}.$$

Рассмотрим теперь регулярную и нигде не отрицательную в области G гармоническую функцию u. Опишем из какой-нибудь точки P области G сферу Ω радиуса R, целиком лежащую внутри области G, и обозначим через Q какую-нибудь другую точку, лежащую внутри сферы Ω (черт. 20). Тогда из интегральной формулы Пуассона и теоремы о среднем значении непосредственно получается так называемое *неравенство Гарнака*

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2}\frac{R-\rho}{R+\rho}\, u(P) \leqslant u(Q) \leqslant \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2}\frac{R+\rho}{R-\rho}\, u(P).$$

Если u регулярна в любой ограниченной области пространства, то для любых двух точек P и Q мы можем описать сферу сколь угодно большого радиуса R с центром P, содержащую точку Q. Переходя в неравенстве Гарнака к пределу при $R \to \infty$, мы получим:

$$u(P) = u(Q).$$



Черт. 20.

Таким образом, *гармоническая функция, регулярная и положительная в любой ограниченной области пространства, является постоянной.*

Очевидно, что то же самое имеет место также и для гармонических функций, нигде не положительных и регулярных в любой конечной области, и вообще для гармонических функций, регулярных в любой конечной области пространства и ограниченных с одной стороны.

Итак, если гармоническая функция регулярна в любой конечной области пространства и если она ограничена с одной стороны, то она является постоянной.

Дальнейшим чрезвычайно важным следствием из интегральной формулы Пуассона является *аналитический характер гармонических функций.*

Всякая гармоническая функция, регулярная в области G, может быть в окрестности любой внутренней точки P области G разложена в степенной ряд.

Примем заданную точку P области G за начало координат и докажем, что имеет место разложение в ряд

$$u = \sum Q_\nu(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

где Q_ν — однородные полиномы степени ν от переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Для этой цели представим функцию u с помощью интеграла Пуассона, взятого по сфере радиуса R, описанной из точки P и целиком лежащей внутри области регулярности, и разложим ядро

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}}$$

в ряд, расположенный по степеням $\frac{\rho}{R}$:

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{n/2}} = \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu \psi_\nu(\cos\vartheta). \tag{14}$$

Ряд (14) сходится для всех значений $\rho \leqslant R-\delta$, и его члены являются гармоническими функциями и однородными полиномами степени ν от $x_1, \ldots, x_n$[1]).

Подставляя этот ряд в формулу (9) и интегрируя почленно, мы получаем ряд вида (13), члены которого Q_ν задаются интегралами

$$Q_\nu = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu \int \ldots \int \psi_\nu(\cos\vartheta) f d\omega_n, \tag{15}$$

так что они, действительно, являются однородными полиномами ν-ой степени и удовлетворяют уравнению Лапласа.

Этот степенной ряд сходится абсолютно и равномерно внутри всякого шара $\rho \leqslant R-\delta$ при любом $\delta > 0$.

Дальнейшим следствием является *принцип зеркального отражения. Если гармоническая в некоторой области функция непрерывным образом принимает нулевые значения вдоль какой-нибудь плоской или сферической части границы, то такую функцию*

---

[1]) При $n = 2$

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2^\nu T_\nu(\cos\vartheta),$$

где $T_\nu(x)$ обозначает ν-ый *полином Чебышева* (см. т. I, стр. 81). Отсюда следует, что

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2\cos\nu\vartheta, \quad \psi_0(\cos\vartheta) = 1$$

можно с помощью зеркального отражения аналитически продолжить через эту часть границы.

Очевидно, что достаточно доказать теорему для случая плоской (или соответственно прямолинейной) части границы S, образующей часть границы полушара (или полукруга) H, в котором задана регулярная гармоническая функция u, обращающаяся в нуль на плоской части границы S. Отражая зеркально полушар H в плоскости S, мы получим шаровую (или круговую) область K. Припишем теперь точкам поверхности сферы K, симметричным к точкам поверхности полусферы H относительно плоскости S, значения, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку относительно значений функции u в соответствующих точках полусферы H. Таким путем мы определяем на всей поверхности сферы K непрерывную краевую функцию, которой соответствует единственная гармоническая функция U, регулярная всюду внутри K и совпадающая с построенной краевой функцией на поверхности сферы K. Отсюда следует, что на поверхности полусферы H функция U совпадает с функцией u. Далее, из интегральной формулы Пуассона следует, что так как краевая функция принимает в точках, симметричных относительно плоскости S, одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку значения, то функция U обращается в нуль во всех точках плоскости S. Таким образом, во всех точках полной границы полушара H функции U и u принимают одинаковые значения, а, следовательно, гармоническая функция U совпадает с функцией u также и всюду внутри полушара H и является, таким образом, аналитическим продолжением функции u на область K, что и требовалось доказать.

и

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}}=1+2\sum_0^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu\cos\nu\vartheta.$$

При $n=3$

$$\psi_\nu(\cos\vartheta)=(2\nu+1)P_\nu(\cos\vartheta),$$

где $P_\nu(x)$ обозначает ν-ый *полином Лежандра* (см. т. I, стр. 77).

В этом случае

$$\frac{1-\frac{\rho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos\vartheta+\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{3/2}}=\sum_0^\infty(2\nu+1)\left(\frac{\rho}{R}\right)^\nu P_\nu(\cos\vartheta).$$

Полагая $\cos\vartheta=\cos\beta\cos\beta'+\sin\beta\sin\beta'\cos(\varphi-\varphi')$ и вводя функции Лежандра высших порядков $P_{\nu,h}(x)$, мы можем $P_\nu(\cos\vartheta)$ представить в следующем виде:

$$(2\nu+1)P_\nu(\cos\vartheta)=P_\nu(\cos\beta)\,P_\nu(\cos\beta')+$$
$$+2\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!}\cos h(\varphi-\varphi')\,P_{\nu,h}(\cos\beta)\,P_{\nu,h}(\cos\beta').$$

Мы можем, дальше, доказать с помощью интегральной формулы Пуассона следующую *теорему сходимости Вейерштрасса*:

Бесконечная последовательность гармонических функций u_n, регулярных в G и непрерывных в $G+\Gamma$, краевые значения которых f_n сходятся равномерно на границе Γ, равномерно сходится также и внутри области G и притом к гармонической функции, имеющей краевые значения $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Равномерность сходимости непосредственно вытекает из теоремы о максимуме и минимуме. В самом деле, наряду с функциями u_n разности u_n-u_m двух каких-нибудь функций последовательности при любых n и m являются регулярными в G и непрерывными в $G+\Gamma$ гармоническими функциями; отсюда следует, что функции u_n-u_m достигают своего максимума и минимума на границе Γ, так что во всех точках замкнутой области $G+\Gamma$ имеет место неравенство

$$|u_n-u_m|\leqslant \text{Max.}\,|f_n-f_m|,$$

которое непосредственно показывает, что последовательность функций u_n равномерно сходится в замкнутой области $G+\Gamma$ к предельной функции u, имеющей краевые значения $f=\lim f_n$.

То, что эта предельная функция u удовлетворяет уравнению Лапласа, легко доказать, применяя интегральную формулу Пуассона. В самом деле, обозначим через K какой-нибудь шар радиуса R, целиком лежащий внутри области G, а через $\bar{u}_n$ и $\bar{u}$ — краевые значения функций u_n и u на поверхности сферы K. Так как каждая из функций u_n может быть во всех внутренних точках шара K выражена с помощью интеграла Пуассона через краевую функцию $\bar{u}_n$, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, мы получим, что и для предельной функции u имеет место во всех внутренних точках шара K интегральная формула

$$u=\frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi}\iint\limits_K \frac{\bar{u}\,d\omega}{(\rho^2+R^2-2\rho R\cos\vartheta)^{3/2}},$$

из которой непосредственно следует, что u — гармоническая в K функция.

Докажем, далее, *теорему сходимости Гарнака*, которая очень просто вытекает из предыдущих результатов. Эта теорема гласит:

Теорема Гарнака. *Если нигде не убывающая или нигде не возрастающая последовательность гармонических функций, регулярных в области G, сходится в одной единственной точке области G, то она сходится во всех точках G и притом равномерно во всякой внутренней замкнутой подобласти G' области G.*

Не ограничивая общности результатов, мы можем, ради краткости, рассматривать при доказательстве как этой теоремы, так и следующих теорем только случай двух или трех измерений. Пусть заданная последовательность функций нигде не убывает. Рассмотрим при

любом m и $n>m$ нигде не отрицательную по условию разность $\varphi=u_n-u_m$ и опишем из точки сходимости P сферу K_a радиуса a, целиком лежащую внутри области G. Если Q — какая-нибудь другая внутренняя точка шара K_a, а $\rho<a$ — расстояние точки Q от центра P, то, применяя неравенство Гарнака, мы получим (в случае двух измерений) неравенство

$$0\leqslant\varphi(Q)\leqslant\frac{a+\rho}{a-\rho}\varphi(P), \tag{16}$$

из которого непосредственно следует равномерная сходимость последовательности u_n внутри всякого шара радиуса $r\leqslant a-\delta$, имеющего центром точку P. Переходя теперь к какой-нибудь замкнутой подобласти G' области G, содержащей точку P, заметим, что подобласть G' может быть покрыта конечным числом шаров подходящим образом выбранного радиуса $r<a$, целиком лежащих внутри области G. Переходя последовательно от шара с центром P к смежным с ним шарам и продолжая этот процесс, мы докажем равномерную сходимость нашей последовательности во всех шарах, покрывающих подобласть G', и наша теорема будет доказана. В силу теоремы Вейерштрасса предельная функция представляет собой функцию, гармоническую во всей области G.

Принципиальное значение имеет следующая теорема:

Если $\{u(x)\}$ есть некоторое равностепенно ограниченное в G множество регулярных в G гармонических функций, т. е. *если для всех функций и одновременно имеет место неравенство $|u(x)|\leqslant M$, то и производные $\{u_x\}$ и $\{u_y\}$ равностепенно ограничены во всякой замкнутой внутренней подобласти G' области G.*

Для доказательства рассмотрим целиком лежащий внутри G шар K радиуса a с центром P и поверхностью O. Так как производная u_x гармонической функции u — также гармоническая функция, то имеет место теорема о среднем значении

$$u_x(P)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_O u_x\,do,$$

из которой непосредственно получается следующая теорема о среднем значении:

$$u_x(P)=\frac{3}{4\pi a^3}\iiint\limits_K u_x\,dg.$$

(Теорема о среднем значении для внутренности шара; см. § 3.) Интегрируя по x, мы получаем отсюда:

$$u_x(P)=\frac{3}{4\pi a^3}\iint\limits_O u\frac{\partial x}{\partial\nu}\,do.$$

Так как $\left|\frac{\partial x}{\partial\nu}\right|\leqslant 1$ и $|u|\leqslant M$, то мы получаем оценку:

$$|u_x(P)|\leqslant\frac{3M}{a}. \tag{17}$$

Очевидно, имеет место также и неравенство

$$|u_y(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{18}$$

Пусть G_a — некоторая замкнутая подобласть G, все точки которой находятся на расстоянии, превышающем a, от границы Γ области G; тогда для всех точек области G_a и всех функций u одновременно имеют место неравенства (17) и (18), что и доказывает нашу теорему.

Прямым следствием из доказанной теоремы является следующая *теорема выбора* (*теорема «компактности»*):

Из всякого равностепенно ограниченного множества регулярных в G гармонических функций всегда можно выбрать такую подпоследовательность $u_n(x)$, которая равномерно сходится к некоторой гармонической функции во всякой замкнутой подобласти G' области G.

В самом деле, вследствие того, что во всякой фиксированной замкнутой подобласти G' области G производные функций u также равностепенно ограничены, множество функций $\{u(x)\}$ равностепенно непрерывно в G', что и обеспечивает возможность выбора (см. т. I, гл. II, § 2, стр. 52). На основании теоремы сходимости Вейерштрасса предельная функция u является гармонической функцией в области G. Из наших рассмотрений получается, в частности, следующий результат:

Всякая сходящаяся последовательность равномерно ограниченных гармонических функций сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти, и поэтому предельная функция также является гармонической функцией.

§ 3. Теорема о среднем значении и ее применения

1. Однородное и неоднородное уравнения для среднего значения. Нам уже часто приходилось применять основную теорему о среднем значении для гармонических функций: *Если u регулярная в области G гармоническая функция, то среднее значение u на поверхности Ω_R любой сферы радиуса R, лежащей целиком в области G, равняется значению u_0 функции u в центре сферы, т. е.*

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R. \tag{1}$$

Из формулы (1), имеющей место для всех значений R, для которых соответствующие сферы лежат целиком внутри области G, непосредственно получается соответствующая *теорема о среднем значении для внутренности шара.*

Пусть шар радиуса a целиком содержится внутри области G. Умножая уравнение (1) на R^2 и интегрируя по R в пределах от нуля до a, мы получим:

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_{K_a} u \, dg, \tag{2}$$