Очевидно, имеет место также и неравенство

$$|u_y(P)| \leqslant \frac{3M}{a}. \tag{18}$$

Пусть G_a — некоторая замкнутая подобласть G, все точки которой находятся на расстоянии, превышающем a, от границы Γ области G; тогда для всех точек области G_a и всех функций u одновременно имеют место неравенства (17) и (18), что и доказывает нашу теорему.

Прямым следствием из доказанной теоремы является следующая *теорема выбора* (*теорема «компактности»*):

Из всякого равностепенно ограниченного множества регулярных в G гармонических функций всегда можно выбрать такую подпоследовательность $u_n(x)$, которая равномерно сходится к некоторой гармонической функции во всякой замкнутой подобласти G' области G.

В самом деле, вследствие того, что во всякой фиксированной замкнутой подобласти G' области G производные функций u также равностепенно ограничены, множество функций $\{u(x)\}$ равностепенно непрерывно в G', что и обеспечивает возможность выбора (см. т. I, гл. II, § 2, стр. 52). На основании теоремы сходимости Вейерштрасса предельная функция u является гармонической функцией в области G. Из наших рассмотрений получается, в частности, следующий результат:

Всякая сходящаяся последовательность равномерно ограниченных гармонических функций сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти, и поэтому предельная функция также является гармонической функцией.

§ 3. Теорема о среднем значении и ее применения

1. Однородное и неоднородное уравнения для среднего значения. Нам уже часто приходилось применять основную теорему о среднем значении для гармонических функций: *Если u регулярная в области G гармоническая функция, то среднее значение u на поверхности Ω_R любой сферы радиуса R, лежащей целиком в области G, равняется значению u_0 функции u в центре сферы, т. е.*

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R. \tag{1}$$

Из формулы (1), имеющей место для всех значений R, для которых соответствующие сферы лежат целиком внутри области G, непосредственно получается соответствующая *теорема о среднем значении для внутренности шара.*

Пусть шар радиуса a целиком содержится внутри области G. Умножая уравнение (1) на R^2 и интегрируя по R в пределах от нуля до a, мы получим:

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_{K_a} u \, dg, \tag{2}$$

т. е. *среднее значение функции u внутри шаровой области K_a, целиком лежащей внутри G, равняется значению u_0 функции u в центре шара.*

Для решений неоднородного уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$ также имеет место соответствующая (неоднородная) формула для среднего значения. Она получается как частный случай формулы Грина (30′), выведенной в § 1, п. 3. Взяв в этой формуле в качестве основной области шар K_R радиуса R, имеющий центром точку P, и полагая

$$w = -\frac{1}{R}, \quad \text{так что} \quad v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

мы получаем следующее тождество:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\Delta u\, dg. \tag{3}$$

Тождество (3) имеет место для всякой непрерывной функции $u(x, y, z)$, имеющей непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка. Таким образом, для решений уравнения Пуассона имеет место следующая теорема о среднем значении:

Всякое регулярное в G решение уравнения $\Delta u = -4\pi\mu$ удовлетворяет для любого шара K_R, целиком лежащего внутри области G, неоднородному интегральному соотношению (неоднородному уравнению для среднего значения на поверхности сферы)

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R + \iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\mu\, dg. \tag{4}$$

Как и в частном случае $\mu \equiv 0$, мы можем отсюда получить формулу для среднего значения внутри трехмерной шаровой области K_R, умножая на R^2 и интегрируя по R. Путем простого вычисления мы получаем:

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{2R^3}\iiint\limits_{K_R}\frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\mu\, dg. \tag{5}$$

Аналогичные теоремы имеют место и на плоскости:

Всякое регулярное в G решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = -2\pi\mu$$

удовлетворяет для любого круга K_R, целиком лежащего внутри G, следующим неоднородным интегральным соотношениям (неоднородным уравнениям для средних значений):

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Gamma_R} u\, ds + \iint\limits_{K_R}\mu \log\frac{R}{r}\, dg, \tag{6}$$

$$u_0 = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{R^2}\iint\limits_{K_R}\left(R^2\log\frac{R}{r} - \frac{R^2 - r^2}{2}\right)\mu\, dg. \tag{7}$$

Для общего случая пространства n измерений имеем:

Всякое регулярное в G решение уравнения

$$\Delta u = -\omega_n \mu$$

удовлетворяет для любой сферы K_R, целиком лежащей внутри G, соотношениям

$$u_0 = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\Omega_R} \cdots \int u \, d\Omega_R + \frac{1}{n-2} \iint\limits_{K_R} \cdots \int \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \mu \, dg, \quad (6')$$

$$u_0 = \frac{n}{\omega_n R^n} \iint\limits_{K_R} \cdots \int u \, dg - \omega_n \iint\limits_{K_R} \cdots \int \psi(r, R) \mu \, dg, \quad (7')$$

причем в последнем уравнении

$$\psi(r, R) = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) + \frac{1}{2R^{n-2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]. \quad (7'')$$

Заметим, что уравнения (5), (7) и (7′) могут быть также получены непосредственно из формул Грина (31), (34), (35) § 1, если положить

$$v = \gamma(r) - \gamma(R) + \frac{1}{2R^n}(r^2 - R^2),$$

где

$$\gamma(r) = \frac{1}{(n-2) r^{n-2}}.$$

Легко убедиться, что функция v обращается на поверхности сферы Ω_R в нуль вместе со своей нормальной производной, а внутри шара K_R удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \frac{n}{R^n}.$$

2. Обращение теорем о среднем значении. Замечательным является то обстоятельство, что формулированные выше теоремы о среднем значении полностью характеризуют решения соответствующих дифференциальных уравнений. Докажем сначала следующее *обращение теоремы о среднем значении для гармонических функций*:

Если непрерывная в области G функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет для любого шара K_R, целиком лежащего в G, однородному уравнению для среднего значения

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R,$$

то u является гармонической функцией.

1. Проще всего эта теорема доказывается с помощью интегральной формулы Пуассона [см. § 2, п. 2, формула (9)], дающей нам решение краевой задачи уравнения $\Delta u = 0$ для шара. В самом деле, если функция u удовлетворяет в области G уравнению для среднего значения (1), то во всякой замкнутой подобласти G' области G функция u достигает максимума и минимума относительно G' на гра-

нице этой области, что доказывается с помощью совершенно такого же рассуждения, как и в § 1, п. 3. Отсюда снова следует так же, как и там, что существует только одна единственная функция u, принимающая на границе Γ' подобласти G' заданные краевые значения и удовлетворяющая внутри G' уравнению для среднего значения (1). Возьмем теперь в качестве подобласти G' шар, целиком содержащийся в G, и построим с помощью интеграла Пуассона гармоническую в G' функцию v, совпадающую с u на границе Γ' шара G'. Функция v как гармоническая функция удовлетворяет уравнению для среднего значения (1). Поэтому в силу сделанного выше замечания функция v должна тождественно равняться функции u всюду внутри шара G'. Таким образом доказано, что внутри любого шара, целиком лежащего в области G, а, следовательно, и всюду в G функция u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

2. Однако, мы можем также легко доказать интересующее нас обращение теоремы о среднем значении непосредственно, не пользуясь интегралом Пуассона. Если допустить, что функция u в G дважды непрерывно дифференцируема, то наша теорема непосредственно вытекает из тождества:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega - u_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,dg.$$

В самом деле, если разделить обе части этого равенства на R^2 и заставить R стремиться к нулю, то в силу непрерывности Δu правая часть будет стремиться к пределу

$$\Delta u_0 \lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)dg = \frac{1}{6}\Delta u_0,$$

тогда как левая часть по предположению равна нулю для всех значений R. Таким образом, $\Delta u_0 = 0$. Итак, наша теорема будет доказана, если мы сможем доказать, что u в G дважды непрерывно дифференцируема.

Пусть K — шар радиуса a, а G_a — подобласть G, обладающая тем свойством, что любой шар K радиуса a, имеющий центром какую угодно точку подобласти G_a, целиком содержится в области G. В области G_a формула (1) имеет тогда место для всех шаров радиуса $R \leqslant a$; умножим теперь уравнение (1) при фиксированном центре на $R^2 f(R)$, где $f(R)$ — интегрируемая, а в остальном совершенно произвольная функция. Интегрируя по R от нуля до a, мы получим:

$$Cu_0 = \iiint\limits_{K} f(r)\,u\,dg, \tag{8}$$

где

$$C = 4\pi\int\limits_0^a r^2 f(r)\,dr.$$

Выберем теперь в качестве функции f четную функцию, отличную от нуля только в промежутке $-a \leqslant R \leqslant a$ и имеющую для всех значений R непрерывные производные до N-го порядка. Положим:

$$K(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Мы можем тогда формулу (8) записать в следующем виде:

$$Cu(x, y, z) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad (9)$$

т. е. в виде интеграла с бесконечными пределами.

В силу того, что ядро K можно выбрать так, чтобы оно было какое угодно число раз дифференцируемо, то из формулы (9) следует, что непрерывная функция u, удовлетворяющая уравнению для среднего значения (1), имеет в G непрерывные производные какого угодно порядка. Поэтому в силу сделанного выше замечания u является гармонической функцией.

В доказанной таким образом теореме мы требовали, чтобы уравнение для среднего значения (1) имело место для *любого* шара, целиком содержащегося в G, причем G может быть любой конечной или бесконечной областью. Если же область G является конечной и замкнутой, то это требование может быть существенным образом ослаблено.

Именно, имеет место следующая теорема:

Если область G обладает тем свойством, что краевая задача уравнения $\Delta u = 0$ разрешима для этой области при любых непрерывных краевых значениях и если непрерывная в $G + \Gamma$ функция и удовлетворяет для любой внутренней точки P области G уравнению для среднего значения

$$u_0 = \frac{1}{4\pi h^2} \iint\limits_{\Omega_h} u\, d\Omega \qquad (10)$$

хотя бы для какого-нибудь одного шара K_h, описанного из точки P радиусом $h(P) > 0$ и целиком лежащего в области $G + \Gamma$, то u — гармоническая в G функция.

Подчеркнем при этом, что $h(P)$ может быть совершенно произвольной функцией от x, y, z; например, $h(P)$ может быть какой угодно разрывной функцией. Доказательство проводится с помощью рассуждения, несколько отличного от рассуждения, примененного нами при первом доказательстве предыдущей теоремы. Рассмотрим замкнутое множество F, образуемое теми точками области G, в которых u равняется максимуму M. Пусть в точке P_0 множества F расстояние точек F от границы Γ достигает своего минимума. Если точка P_0 является внутренней точкой области G, то существует шар радиуса $h(P_0) > 0$, имеющий центром точку P_0 и целиком содержащийся в G, для которого имеет место уравнение для среднего значения, откуда следует, что на поверхности этого шара всюду $u = M$.

Поэтому вопреки предположению множество F должно было бы содержать точки, более близкие к границе Γ, чем точка P_0. Это противоречие доказывает, что P_0 лежит на границе Γ области G. Точно таким же образом мы убедимся, что функция u достигает и своего минимума на границе Γ, откуда следует, что функция u однозначно определяется своими краевыми значениями на границе Γ. Так как по условию существует гармоническая в G функция v, совпадающая с u на границе Γ, и так как v, будучи гармонической функцией, разумеется, удовлетворяет условию (10), то отсюда следует, что $u \equiv v$ всюду внутри G.

Условие непрерывности функции u, содержащееся в наших теоремах, является существенным условием как для проведенных доказательств, так и для справедливости самих теорем; в самом деле, мы не можем ожидать, что уравнение для среднего значения само содержит в себе свойство непрерывности функции даже тогда, когда это уравнение имеет место для любого шара. И, действительно, можно, например, при $n=1$ построить нелинейные разрывные функции u, удовлетворяющие уравнению

$$u(x)=\frac{1}{2}[u(x+h)+u(x-h)] \tag{11}$$

при любых x и h, т. е. уравнению для среднего значения для любого промежутка[1]).

Заметим далее, что когда мы в более общей теореме предполагаем, что уравнение для среднего значения имеет место только для одного определенного радиуса $h(P)$, то требование, чтобы область $G+\Gamma$ была конечной и замкнутой, является существенным требованием и не может быть отброшено. В самом деле, для бесконечной области можно построить примеры непрерывных негармонических функций, для которых при $h=\text{const.}=l$, где l — произвольная постоянная, всюду имеет место уравнение

$$u_0=\frac{1}{4\pi l^2}\iint\limits_{\Omega_l} u\,d\Omega_l. \tag{12}$$

Если, например, u зависит только от x, то, как легко убедиться, уравнение (12) переходит в интегральное уравнение

$$u(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{x-l}^{x+l} u(\xi)\,d\xi. \tag{13}$$

Полагая $u(x)=e^{i\gamma x}$, мы получим частные решения этого уравнения, если γ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\frac{\sin\gamma l}{\gamma l}=1. \tag{14}$$

---

[1]) Гамель (Hamel), Базис множества всех чисел и разрывные решения функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.*, т. 60 (1905), стр. 459—462.

Кроме решения $\gamma = 0$, уравнение (14) имеет бесконечное число комплексных корней $\gamma = \alpha + i\beta$, изображаемых точками пересечения кривых

$$\frac{\sin \alpha l}{\alpha l} = \frac{1}{ch\beta l}; \qquad \cos \alpha l = \frac{\beta l}{sh\beta l},$$

проведенных на плоскости α, β. Тогда вещественные функции

$$u = e^{-\beta x} \cos \alpha x \quad \text{и} \quad u = e^{-\beta x} \sin \alpha x$$

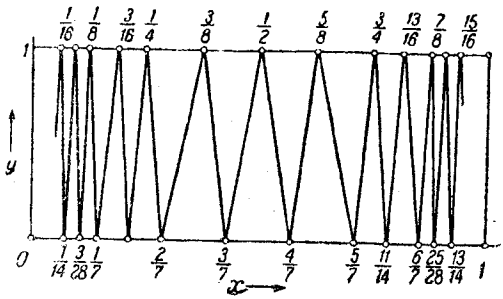
удовлетворяют уравнению (13); но только при $\alpha = \beta = 0$ эти функции являются гармоническими. Условие, что u должна быть непрерывной в *замкнутой* области G, является существенным даже в случае конечной области G.

На черт. 21 приводится пример нелинейной функции $u(x)$, непрерывной только в открытом промежутке $0 < x < 1$, которая для каждой точки x этого промежутка удовлетворяет одномерному уравнению для среднего значения

$$u(x) = \frac{1}{2}[u(x+h) + u(x-h)] \tag{15}$$

для некоторого $h = h(x) > 0$ [1]).

Эта кривая непрерывна и кусочно-линейна в промежутке $0 < x < 1$ и зигзагообразно колеблется между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.



Черт. 21.

Обозначим через a_ν абсциссы вершин, лежащих на прямой $y = 1$, а через b_ν—абсциссы вершин, лежащих на прямой $y = 0$. Обе последовательности имеют точками сгущения точки $x = 0$ и $x = 1$. В окрестности всякой точки промежутка $0 < x < 1$, не совпадающей ни с одной из точек a_ν и b_ν, функция $u(x)$ линейна и поэтому удовлетворяет уравнению (15) для среднего значения при бесконечном числе значений h. Если же мы выберем последовательность a_ν так, чтобы для каждого a_ν существовали две точки $a_\alpha < a_\nu$ и $a_\beta > a_\nu$, для которых выполняется условие

$$a_\nu = \frac{1}{2}(a_\alpha + a_\beta),$$

то функция $u(x)$ будет удовлетворять соотношению (15) также и в верхних вершинах нашей линии, а именно при $h(a_\nu) = a_\beta - a_\nu = a_\nu - a_\alpha$. Последовательность b_ν выберем таким же образом,

[1]) Этот пример мне сообщил словесно Макс Шифман (Max Shiffman).

но притом еще так, чтобы ни при каких значениях ν и μ b_ν не совпадало с a_μ и чтобы всякий интервал, заключенный между двумя соседними точками a_ν, содержал одну и только одну точку b_μ. Мы получаем, таким образом, непрерывную в промежутке $0 < x < 1$ функцию $u(x)$, график которой имеет вид, показанный на черт. 21. Функция $u(x)$ удовлетворяет условию (15) и тем не менее не является линейной.

Построение двух последовательностей a_ν и b_ν, удовлетворяющих указанному выше условию, может быть произведено бесчисленным множеством способов. На черт. 21 в качестве точек a_ν и b_ν берутся: на прямой $y = 1$ симметрично расположенные относительно $x = \frac{1}{2}$ точки, имеющие абсциссы:

$$a = \begin{cases} \frac{1}{2^\nu}, & \frac{3}{2^{\nu+2}} \\ 1 - \frac{1}{2^\nu}, & 1 - \frac{3}{2^{\nu+2}} \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

а на прямой $y = 0$ — точки, также симметрично расположенные относительно $x = \frac{1}{2}$, с абсциссами

$$b = \begin{cases} \frac{1}{7 \cdot 2^{\nu-1}}, & \frac{3}{7 \cdot 2^\nu}, \\ 1 - \frac{1}{7 \cdot 2^{\nu-1}}, & 1 - \frac{3}{7 \cdot 2^\nu}, \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Перейдем теперь к обращению общей теоремы о среднем значении для неоднородного уравнения Пуассона. Обратная теорема гласит:

Пусть в области G заданы непрерывная функция u и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция μ. Тогда, если для любого шара K, лежащего целиком в области G, имеет место уравнение

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega} u \, d\Omega + \iiint\limits_{K} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \mu \, dg \tag{16}$$

или же эквивалентное ему уравнение (5), *то и удовлетворяет в G уравнению Пуассона*

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

Заметим прежде всего, что если μ удовлетворяет одному только требованию непрерывности, то умноженный на $\frac{4\pi}{R^2}$ объемный интеграл, входящий в формулу (16), при $R \to 0$ стремится к пределу

$$\mu_0 \lim_{R \to 0} \frac{4\pi}{R^2} \int\limits_0^R \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) r^2 \, dr = \frac{4\pi}{6} \mu_0.$$

Отсюда следует, что всюду в G существует также предел:

$$\theta(u_0) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega - u_0\right\} \tag{17}$$

и при этом

$$\theta(u_0) = -4\pi\mu_0. \tag{18}$$

Если u дважды непрерывно дифференцируема, то, как мы уже доказали выше на стр. 281,

$$\theta(u) = \Delta u. \tag{19}$$

Таким образом, для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно убедиться в том, что u дважды непрерывно дифференцируема. *Итак, докажем, что если u непрерывна, а μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G и если для всякого шара K, целиком лежащего в G, имеет место одно из уравнений для среднего значения* (4) *или* (5), *то u дважды непрерывно дифференцируема в области G.*

Доказательство проводится точно таким же образом, как и в частном случае $\mu = 0$. Мы снова берем какую-нибудь функцию $f(R)$, имеющую непрерывные производные достаточно высокого порядка, умножаем на $4\pi R^2 f(R)$ уравнение (16), составленное для некоторой фиксированной точки P области G_a, и интегрируем по R в пределах от нуля до a. После простого вычисления мы получаем:

$$Cu = \iiint\limits_{K_a} uf(r)\, dg + \iiint\limits_{K_a} \mu F(r)\, dg, \tag{20}$$

где

$$C = 4\pi \int_0^a r^2 f(r)\, dr,$$

а

$$F(r) = 4\pi \int_r^a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) R^2 f(R)\, dR =$$

$$= \frac{C}{r} - \frac{4\pi}{r}\int_0^r R^2 f(R)\, dR - 4\pi \int_r^a R f(R)\, dR.$$

Положим снова

$$K(x, y, z) = \begin{cases} f(r), & \text{если } r \leqslant a, \\ 0 & \text{если } r \geqslant a, \end{cases}$$

и далее

$$H(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{r}\displaystyle\int_0^r R^2 f(R)\, dR + 4\pi \int_r^a R f(R)\, dR, & \text{если } r \leqslant a, \\ \dfrac{C}{r}, & \text{если } r \geqslant a. \end{cases}$$

Выбирая подходящим образом функцию $f(R)$, мы можем добиться, чтобы функции K и H имели всюду непрерывные производные до N-го порядка. Формула (20) может быть теперь представлена в следующем виде:

$$Cu = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta -$$

$$- \iiint\limits_{G} H(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)\, \mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ C \iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{21}$$

Первые два интеграла в правой части этого равенства обладают производными до N-го порядка; третий же интеграл представляет собой потенциал непрерывного объемного распределения массы с плотностью μ и, следовательно, на основании результата § 1, п. 2, дважды непрерывно дифференцируем в области G. Отсюда следует, что и функция u сама дважды непрерывно дифференцируема в G_a и удовлетворяет в силу сделанного выше замечания уравнению $\Delta u = -4\pi\mu$. Так как мы можем выбрать a сколь угодно малым, то это имеет место всюду внутри области G.

Такие же обратные теоремы имеют место и в *n-мерном пространстве* и непосредственно получаются из следующей леммы, которая доказывается совершенно так же, как и в случае $n = 3$: *Если u непрерывна в G, а μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G, и если u удовлетворяет уравнениям* (6′) *или* (7′) *и соответственно* (6) *или* (7) *для всякого шара K, лежащего в области G, то u дважды непрерывно дифференцируема в G.*

3. Уравнение Пуассона для потенциала объемного распределения массы. Мы можем использовать доказанную в предыдущем номере обратную теорему для того, чтобы получить новый вывод уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\mu$ для потенциала u объемного распределения массы с плотностью μ, глубже освещающий смысл уравнения Пуассона и приводящий к существенно более общему результату.

Пусть $\mu(x, y, z)$ — кусочно-непрерывная в G функция и

$$u = \iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r}\, dg \tag{22}$$

— потенциал объемного распределения массы плотности μ. Представим себе функцию μ продолженной за пределы области G с помощью условия: $\mu = 0$ вне G.

Пусть, далее, P_0 — произвольная точка пространства, а K — какой-нибудь шар радиуса R, имеющий центром точку P_0. Так как u всюду непрерывна, то мы можем u проинтегрировать по внутренности

шара и притом произвести это интегрирование под знаком интеграла в формуле (22). Мы получим:

$$\iiint\limits_K u\,dg = \iiint\limits_G \mu(\xi, \eta, \zeta)\,F(r)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где $F(r) = \iiint\limits_K \frac{dg}{r}$ есть потенциал шара K, равномерно заполненного массой единичной плотности.

Поэтому

$$F(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\,\frac{R^3}{r}, & \text{если } r \geqslant R, \\ 2\pi\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right), & \text{если } r \leqslant R. \end{cases} \tag{23}$$

Подставляя эти значения функции $F(r)$, мы получим:

$$\iiint\limits_K u\,dg = \frac{4\pi}{3}R^3 \iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg + 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\mu\,dg, \tag{24}$$

где G^* обозначает часть области G, лежащую вне шара K. В силу того, что $\iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg = u - \iiint\limits_K \frac{\mu}{r}\,dg$, мы можем формулу (24) представить в виде

$$\frac{4\pi}{3}R^3 u = \iiint\limits_K u\,dg - 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{R^3}{r}\right)\mu\,dg$$

или

$$u = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_K u\,dg + \frac{1}{2R^3}\iiint\limits_K \frac{(R-r)^2(2R+r)}{r}\,\mu\,dg;$$

мы получаем, таким образом, что u удовлетворяет уравнению для среднего значения (5).

Итак, *потенциал кусочно-непрерывного распределения массы удовлетворяет для любого шара уравнению для среднего значения* (5), *а, следовательно, также и эквивалентному ему уравнению* (4).

Принимая во внимание результат, полученный нами в конце п. 2, мы отсюда заключаем:

Если μ непрерывна в G, то для потенциала (22) *всюду в G существует предел:*

$$\theta(u) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega - u_0\right\}$$

и при этом

$$\theta(u) = -4\pi\mu. \tag{25}$$

Если μ кусочно-непрерывно дифференцируема в G, то $\theta(u) = \Delta u$, так что $\Delta u = -4\pi\mu$.

4. Теоремы о среднем значении для других эллиптических дифференциальных уравнений. Теоремы о среднем значении для уравнений Лапласа и Пуассона были нами непосредственно получены из тождества

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega = u_0 + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,dg, \tag{26}$$

имеющего место для любой непрерывной функции u, имеющей непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка.

Вместо тождества (26) мы можем легко получить тождество более общего характера, из которого получается далее разложение в ряд Тэйлора среднего значения:

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega,$$

рассматриваемого как функция радиуса R при фиксированном центре P_0. Мы исходим из формулы Грина

$$Cu_0 = \iiint\limits_{K}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dg, \tag{27}$$

где K — произвольный шар радиуса R, имеющий центром точку P_0, а v имеет вид

$$v(r) = \frac{C}{4\pi r} + w(r), \tag{27'}$$

причем $w(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, если $r \leqslant R$, и, наконец, на поверхности Ω_R шара выполняются условия

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \tag{27''}$$

В качестве функции u мы можем взять любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию. Допустим теперь, что в области $K + \Omega_R$ u имеет непрерывные производные до порядка $2m+2$ включительно, и обозначим через $\Delta^\nu u$ ν-ую итерацию лапласиана, так что $\Delta^1 u = \Delta u$, $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$, $\Delta^3 u = \Delta\Delta\Delta u$ и т. д.

Тогда для всех значений $\nu \leqslant m$ имеет место тождество

$$C\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_{K}(\Delta^\nu u\,\Delta v - v\,\Delta^{\nu+1} u)\,dg. \tag{28}$$

Составим теперь последовательность функций

$$v_1,\ v_2, \ldots$$

типа (27′), определяемых дифференциальными уравнениями

$$\Delta v_{\nu+1} = v''_{\nu+1} + \frac{2}{r}v'_{\nu+1} = v_\nu, \tag{29}$$

краевыми условиями (27″) и начальной функцией

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{R-r}{Rr}. \tag{30}$$

Легко убедиться, что решениями этой рекуррентной системы дифференциальных уравнений являются функции

$$v_\nu = \frac{1}{4\pi(2\nu+1)!}\,\frac{(R-r)^{2\nu+1}}{Rr}, \tag{31}$$

имеющие вид (27′) при

$$C_\nu = \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}.$$

Заменяя в формуле (28) функцию v функциями v_ν, мы получим:

$$C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_{\nu-1}\Delta^\nu u - v_\nu \Delta^{\nu+1} v)\, dg. \tag{32}$$

Полагая последовательно $\nu = 1, 2, \ldots, m$, мы получим, сложив эти уравнения,

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_0 \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u)\, dg.$$

Принимая во внимание формулы (26) и (31), мы можем записать полученный результат в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\,\Delta^\nu u_0 + \\ + \frac{1}{4\pi(2m+1)!}\iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\,\Delta^{m+1} u\, dg. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Это тождество имеет место для всякой функции u, имеющей в G непрерывные производные до порядка $2m+2$ включительно, и притом для всякого шара K, целиком лежащего в области G[1]).

Если u имеет производные сколь угодно высокого порядка и если остаточный член стремится к нулю при возрастании m, то мы получаем из (33) бесконечный ряд:

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\,\Delta^\nu u_0. \tag{34}$$

Это имеет, например, место в том случае, когда при некотором определенном значении m $\Delta^m u$ обращается в G тождественно в нуль. *Таким образом, всякое регулярное в G решение дифференциального уравнения $\Delta^m u = 0$, т. е. решение, имеющее непрерывные*

---

[1]) См. Пицетти (P. Pizetti), Sulla media die valori che una funzioni dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera (О среднем арифметическом значении функции на поверхности сферы), *Rendiconti Lincei*, (5), т. 18 (1909), стр. 309—316.

производные до порядка $2m$ включительно, удовлетворяет во всяком шаре, целиком лежащем в области G, следующему уравнению для среднего значения

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = \sum_{0}^{m-1}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{(2\nu+1)!}R^{2\nu}. \tag{35}$$

Так, например, для решений уравнения $\Delta\Delta u = 0$ теорема о среднем значении выглядит так:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = u_0 + \frac{R^2}{6}\Delta u_0. \tag{36}$$

В качестве другого применения рассмотрим теорему о среднем значении для решений дифференциального уравнения

$$\Delta u + cu = 0.$$

В этом случае

$$\Delta^{\nu}u = (-1)^{\nu}c^{\nu}u,$$

и так как

$$\Delta^{m+1}u = (-1)^{m+1}c^{m+1}u,$$

то остаточный член стремится к нулю, и мы получаем:

$$M(R) = u_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}c^{\nu}}{(2\nu+1)!}R^{2\nu} = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}.$$

Таким образом, для всякого регулярного в G решения уравнения $\Delta u + cu = 0$ и для всякого шара K, целиком содержащегося в G, имеет место следующая формула для среднего значения:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega} u\,d\Omega = u_0\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}. \tag{37}$$

Совершенно аналогичные рассмотрения можно провести на плоскости и вообще для n-мерного пространства.

На плоскости мы получаем таким путем тождество

$$M(R) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Omega} u\,ds = \sum_{0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta_{\nu}u_0}{(\nu!)^2} + \iint\limits_{K} v_m\Delta^{m+1}u\,dg, \tag{38}$$

где функции v_m определяются с помощью рекуррентной формулы

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1} &= \int\limits_{r}^{R}\rho v_{\nu}(\rho)\log\frac{\rho}{r}\,d\rho,\\ v_0 &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{38'}$$

В n-мерном пространстве имеет место тождество

$$M(R)=\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\cdots\int u\,d\Omega=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}+$$

$$+\iint\limits_{K}\cdots\int v_m\Delta^{m+1}u\,dg \tag{39}$$

со следующей системой рекуррентных формул для $v_m(r)$:

$$\left.\begin{aligned} v_{\nu+1}&=\frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}}\int\limits_{r}^{R}\rho v_{\nu}(\rho)(\rho^{n-2}-r^{n-2})\,d\rho,\\ v_0&=\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{39'}$$

Из этих формул получается так же, как и выше, следующая теорема:

Всякое регулярное в G решение дифференциального уравнения

$$\Delta u+cu=0$$

удовлетворяет для всякого шара, целиком лежащего в области G, следующему уравнению для среднего значения:

$$\frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega}\cdots\int u\,d\Omega=u_0\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n-2}{2}}(R\sqrt{c})}{\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=$$

$$=u_0\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}. \tag{40}$$

При этом $J_{\nu}(x)$ обозначает ν-ую бесселеву функцию.

На плоскости имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Omega}u\,ds=u_0J_0(R\sqrt{c}). \tag{41}$$

При нечетном n стоящий при u_0 множитель, который мы обозначим через $p(R)$, может быть выражен через производные функции $\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$, а именно:

$$p(R)=\frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}\,2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d^{\frac{n-3}{2}}}{d\,(R^2c)^{\frac{n-3}{2}}}\left(\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}\right).$$

(См. т. I, гл. VII, стр. 465.)