§ 4. Краевая задача

1. Предварительные замечания. Непрерывная зависимость решения от краевых значений и от области. Перейдем теперь к *решению краевой задачи. Единственность решения* нами уже была доказана раньше, т. е. нами было доказано, что не существует двух различных регулярных в G гармонических функций, принимающих на границе Γ заданные непрерывные краевые значения f. Точно так же мы уже установили, что решение краевой задачи *непрерывно зависит от краевых значений.* Этот факт выражается следующей теоремой: *Если f_ν — последовательность непрерывных краевых функций распределения, равномерно сходящаяся на Γ к предельной функции f, то последовательность соответствующих решений u_ν сходится внутри G к гармонической функции u с краевой функцией f.*

Доказательство непосредственно получается из теории сходимости § 2, п. 3.

Таким образом, достаточно доказать разрешимость краевой задачи, например, для таких краевых значений, которые задаются значениями некоторого полинома от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на Γ. В самом деле, путем предельного перехода мы могли бы решить тогда краевую задачу для любых непрерывных краевых значений. Принимая во внимание наши рассуждения, проведенные в § 2, п. 1, мы заключаем отсюда, что для решения общей краевой задачи достаточно построить *функцию Грина K.*

Ограничимся при изложении процесса построения двухмерным и трехмерным пространствами.

Мы получим следующий результат:

В случае $n=2$ функцию Грина можно построить для любой области G, ограниченной конечным числом непрерывных кривых Γ, обладающих тем свойством, что через любую точку P кривой Γ можно провести прямолинейный отрезок, все точки которого, за исключением P, лежат вне G.

При $n=3$ функцию Грина можно построить для любой области G, ограниченной конечным числом непрерывных поверхностей Γ таких, что в любой точке P поверхности Γ можно построить тетраэдр, имеющий вершиной точку P и все остальные точки которого находятся вне области G.

В гл. VII мы снова вернемся к решению краевой задачи и рассмотрим ее при существенно более общих предположениях и с других точек зрения.

Наши дальнейшие рассуждения будут относиться только к ограниченным областям G. Для неограниченной области G мы сможем тогда получить функцию Грина, превращая G в ограниченную область G' с помощью зеркального отражения в выбранном подходящим образом круге или шаре. На основании теоремы § 1, стр. 250 мы тогда из функции Грина для G' сразу получим функцию Грина для области G.

Мы можем, далее, значительно упростить построение функции Грина для области более или менее общего вида, исследуя *непрерывную зависимость функции Грина от области* G и доказав соответствующую теорему непрерывности. Рассмотрим последовательность областей G_ν, монотонно сходящихся к области G и притом так, что каждая область G_ν содержит в себе предшествующую область $G_{\nu-1}$ в качестве своей подобласти, и любая фиксированная внутренняя точка области G, начиная с некоторого значения ν, содержится во всех G_ν. Тогда имеет место следующая теорема:

а) *Если для каждой из областей G_ν существует функция Грина K_ν, а для области G — функция Грина K, то последовательность K_ν сходится в $G+\Gamma$ равномерно к функции K* [1]).

Однако, более важной является другая, более общая теорема сходимости, относящаяся к тому случаю, когда заранее неизвестно, существует ли функция Грина для предельной области G, так что на основании этой теоремы мы можем построить функцию Грина для области G путем соответствующего перехода к пределу. Эта более сильная теорема формулируется так:

б) *Если последовательность областей G_ν, как и выше, монотонно сходится к области G и если для каждой области G_ν существует соответствующая функция Грина K_ν, то последовательность функций K_ν сходится внутри G к предельной функции*

$$K = \lim K_\nu.$$

Для того, чтобы предельная функция K была функцией Грина для области G, граница области G должна удовлетворять следующим условиям:

В случае двух измерений: *Для каждой точки P границы области G должен существовать прямолинейный отрезок, кончающийся в точке P, все остальные точки которого лежат вне области G* [2]).

В случае трех измерений:

Для каждой точки P границы области G должен существовать целиком лежащий вне G тетраэдр (который может быть сколь угодно острым), имеющий P одной из вершин.

Чтобы доказать обе эти теоремы, мы исходим из следующего замечания. Функции K_ν, равно как и регулярные в G гармонические функции $K_\nu - \gamma$, получающиеся вычитанием функции особенностей γ, образуют монотонную последовательность. В самом деле, если ν на-

---

[1]) В части области G, лежащей вне G_ν, мы полагаем $K_\nu \equiv 0$.

[2]) Заметим, что в случае $n=2$ наши последующие рассуждения легко распространяются на границы более общего вида, для которых через любую точку границы P можно, вместо прямолинейного отрезка, провести лежащую вне G ломаную линию, состоящую из конечного или счетного множества отрезков, т. е., другими словами, граница Γ области G может быть любой кривой Жордана. Мы опускаем здесь это обобщение, так как в гл. VII мы непосредственно проведем решение краевой задачи для случая границы такого общего вида, применяя совершенно другие методы.

столько велико, что выбранная особая точка Q лежит в области G_ν, то при $\mu > \nu$ краевые значения регулярной в G_ν гармонической функции $K_\mu - K_\nu$ на границе Γ_ν области G_ν не отрицательны.

Отсюда следует, что функция $K_\mu - K_\nu$ нигде не отрицательна в области G_ν. На том же основании мы получаем в случае а)

$$K_\nu \leqslant K, \text{ так что и } K_\nu - \gamma \leqslant K - \gamma.$$

В случае б) мы исходим из того, что при наших предположениях существует шар, целиком лежащий вне G.

Обозначим через K^* функцию Грина для внешней области этого шара, имеющую особой точкой заданную точку Q. Тогда

$$K_\nu \leqslant K^* \quad \text{и} \quad K_\nu - \gamma \leqslant K^* - \gamma.$$

Итак, в обоих случаях монотонная последовательность $K_\nu - \gamma$ ограничена и, следовательно, сходится в G.

На основании теорем сходимости § 2, п. 3 предельная функция $H = \lim K_\nu$ гармонична в G. Очевидно, имеет место неравенство $H \geqslant 0$, а в случае а) в силу того, что $K_\nu \leqslant K$, мы имеем, с другой стороны, $H \leqslant K$. Так как K имеет нулевые краевые значения, то в силу предыдущего этим же свойством обладает также функция H, откуда и следует в случае а), что $H = K$, т. е. H является функцией Грина для области G.

Чтобы доказать теорему б), мы воспользуемся результатом, который будет нами получен лишь в п. 2, согласно которому для внешней области прямолинейного отрезка на плоскости (т. е. области, состоящей из всех точек плоскости, не лежащих на данном прямолинейном отрезке) и внешней области тетраэдра в пространстве функция Грина может быть непосредственно построена. В силу условий теоремы б) для любой точки P_0 границы области G существует выходящий из точки P_0 и лежащий вне G прямолинейный отрезок в случае двух измерений и тетраэдр — в случае трех измерений. Обозначим через K^* функцию Грина для внешней области такого отрезка или тетраэдра. Тогда из наших предшествующих рассуждений непосредственно следует, что в каждой точке области G имеет место неравенство

$$0 \leqslant H(P) \leqslant K^*(P).$$

Так как $K^*(P_0) = 0$, то отсюда следует так же, как и раньше, что

$$H(P_0) = 0.$$

Таким образом, при выполнении формулированных выше условий функция $H(P)$ обращается в нуль во всех точках границы области G и является, следовательно, функцией Грина для предельной области G.

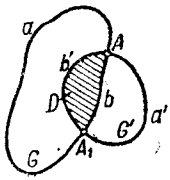
Подчеркнем особенно тот факт, что все полученные выше результаты и проведенные рассуждения ни в коем случае не предполагают односвязности области и переносятся без существенных изменений на *многосвязные области*.

В следующем пункте мы проведем построение функции Грина K для сравнительно узкого класса областей $G_\nu = G$, с помощью которых мы можем, однако, монотонно аппроксимировать достаточно широкий класс областей. Из полученных только что результатов следует поэтому существование функции Грина также и для аппроксимируемых областей.

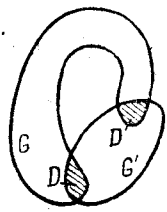
При построении функции Грина мы будем применять *альтернирующий процесс Шварца.*

2. Решение краевой задачи с помощью альтернирующего процесса. Альтернирующий процесс представляет собой простой сходящийся процесс, дающий возможность решить краевую задачу для областей B в том случае, когда эта область является соединением двух областей G и G' (или конечного числа таких областей), для каждой из которых краевая задача предполагается уже решенной при любых краевых значениях. При этом мы допускаем, что границы области G и G' состоят из конечного числа частей, имеющих непрерывную касательную или соответственно непрерывную касательную плоскость. Мы предполагаем далее, что границы областей G и G' взаимно пересекаются под углом, отличным от нуля, причем в случае двух измерений точки пересечения границ не должны совпадать с их вершинами, а в случае трех измерений линии пересечения поверхностей, ограничивающих области G и G', не должны совпадать с ребрами этих поверхностей.

Так как мы можем, например, решить краевую задачу для кругов и полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств с помощью интеграла Пуассона, то альтернирующий процесс дает нам возможность непосредственно решить краевую задачу для областей, являющихся соединением конечного числа частично перекрывающихся кругов и полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств.



Черт. 22.



Черт. 23.

Процесс образования из двух областей G и G' их соединения $B = G + G'$ поясняется на черт. 22 и 23, причем второй чертеж показывает, что путем соединения двух односвязных областей мы можем получить также и двусвязные области, так что альтенирующий процесс нам даст возможность решить краевую задачу также и для такого рода двусвязных областей.

Так как характер процесса не меняется существенно в том случае, когда перекрытие D областей G и G' состоит из нескольких отдельных областей, то мы предположим при описании процесса, что области G и G' имеют только одну общую часть D, как это изображено на черт. 22.

Пусть граница Γ области G состоит из частей a и b, из которых b лежит в G', а a обозначает остальную часть границы Γ; соответ-

ственно определяются дуги a' и b' для области G': b' обозначает часть границы G', лежащую внутри G, а a' — остальную часть границы G'.

Предположим теперь, что вдоль границы $\Delta = a + a'$ области $B = G + G'$ заданы непрерывные краевые значения, не превосходящие по абсолютной величине верхней границы M.

1. Альтернирующий процесс заключается тогда в последовательном применении следующей операции.

Мы пополняем заданные на дуге a краевые значения непрерывным образом с помощью произвольных непрерывных значений на дуге b, не превосходящих M, до полной краевой функции на границе $\Gamma = a + b$ области G.

С помощью построенной таким образом на Γ непрерывной краевой функции мы решаем соответствующую краевую задачу для области G.

Построенное решение u_1 принимает вдоль b' некоторые краевые значения, непрерывно примыкающие к значениям, первоначально заданным на дуге a', и образующие вместе с ними некоторую непрерывную краевую функцию на границе $\Gamma' = a' + b'$ области G'.

Мы решаем теперь с помощью этой краевой функции соответствующую краевую задачу для области G' и получаем функцию u_1'.

Функция u_1' в свою очередь принимает вдоль дуги b некоторые краевые значения, которые вместе со значениями, заданными вдоль a, образуют новую краевую функцию на границе Γ области G. Обозначим через u_2 решение соответствующей краевой задачи для области G. Краевые значения u_2 вдоль b' вместе с заданными значениями вдоль a' определяют тогда в свою очередь в области G' гармоническую функцию u_2', а значения u_2' вдоль b вместе с заданными значениями вдоль a определяют в G гармоническую функцию u_3 и т. д.

Решая, таким образом, краевую задачу попеременно для областей G и G' и повторяя неограниченное число раз эти чередующиеся операции, мы получим две последовательности гармонических функций

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

и

$$u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_n',\ \ldots,$$

из которых первая задана в области G, а вторая в области G'.

При этом имеют место следующие соотношения:

Вдоль дуги b': $u_\nu' = u_\nu$, так что $u_{\nu+1} - u_\nu = u_{\nu+1}' - u_\nu'$.

Вдоль дуги b: $u_\nu' = u_{\nu+1}$, так что $u_{\nu+1} - u_\nu = u_\nu' - u_{\nu-1}'$.

Мы утверждаем теперь следующее: функции u_ν в области G и функции u_ν' в области G' равномерно сходятся к гармоническим функциям u и u', которые совпадают между собой в общей части D областей G и G'. Таким образом, эти предельные функции u и u'

определяют во всей области $B = G + G'$ регулярную гармоническую функцию, которая принимает на границе

$$\Lambda = a + a'$$

заданные краевые значения и является, следовательно, решением краевой задачи для области B.

Доказательство этого утверждения основывается на следующей лемме:

Допустим, что при соблюдении наших перечисленных выше предположений относительно областей G и G' в области G задана некоторая регулярная гармоническая функция v, которая обращается в нуль вдоль дуги a, а вдоль дуги b удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant |v| \leqslant 1.$$

Тогда существует фиксированная положительная постоянная $q < 1$, зависящая только от конфигурации областей G и G' и не зависящая от специального выбора функции v, такая, что всюду вдоль дуги b' имеет место неравенство

$$|v| \leqslant q.$$

Аналогичный факт имеет, разумеется, место также и для области G', и мы можем в качестве величины q выбрать для обеих областей одну и ту же константу.

Относя доказательство этой леммы на конец настоящего номера, мы можем теперь легко довести до конца доказательство сходимости альтернирующего процесса.

Обозначим через M_ν максимум модуля $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_{\nu+1} - u'_\nu|$ вдоль b' и соответственно через M'_ν максимум модуля $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_\nu - u'_{\nu-1}|$ вдоль b. Применяя нашу лемму к области G и к функциям $v = \dfrac{u_{\nu+1} - u_\nu}{M'_\nu}$, мы получим непосредственно:

$$M_\nu \leqslant q M'_\nu.$$

Точно так же, применяя нашу лемму к области G' и функциям $v = \dfrac{u'_\nu - u'_{\nu-1}}{M_{\nu-1}}$, мы получим:

$$M'_\nu \leqslant q M_{\nu-1}.$$

Отсюда следует, что $M_\nu \leqslant q^2 M_{\nu-1}$.

Таким образом, величины M_ν и M'_ν стремятся к нулю, и притом быстрота их стремления к нулю не меньше быстроты стремления к нулю членов геометрической прогрессии с постоянным знаменателем $q^2 < 1$. Отсюда непосредственно следует равномерная сходимость ряда

$$u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_{\nu+1} - u_\nu) = \lim_{n \to \infty} u_n = u$$

в области $G+\Gamma$ и соответствующего ряда

$$u'_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u'_{\nu+1}-u'_\nu)=\lim_{n\to\infty}u'_n=u'$$

в области $G'+\Gamma'$.

Функции u и u' являются поэтому гармоническими функциями, определенными соответственно в областях G и G', и принимают на дугах a и соответственно a' заданные краевые значения. Что же касается общей части D областей G и G', ограниченной дугами b и b', то вдоль b' мы имеем всегда

$$u'_\nu-u_\nu=0,$$

а вдоль b эта разность $u'_\nu-u_\nu=u'_\nu-u'_{\nu-1}$ стремится равномерно к нулю.

Отсюда следует, что предельные функции u и u' совпадают между собой в области D и определяют вместе регулярную в $B=G+G'$ гармоническую функцию, являющуюся решением рассматриваемой краевой задачи.

Повторяя наш процесс конечное число раз, мы получим следующую теорему:

Если область G представляет собой соединение конечного числа областей $G_1,\ldots,G_n$, которые взаимно перекрываются и кусочно-гладкие границы которых нигде не касаются друг друга, то, умея решить краевую задачу для каждой из областей G_ν в отдельности, мы сможем ее решить для всей области G.

В частности, мы убеждаемся в разрешимости краевой задачи для всякой области, которая может быть образована путем соединения конечного числа кругов или полуплоскостей или соответственно шаров и полупространств. Пусть, например, G представляет собой всю плоскость за исключением отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ прямой $y=0$. Мы можем тогда рассматривать G как соединение четырех полуплоскостей $x<0$, $x>1$, $y<0$, $y>0$; так как для каждой из этих полуплоскостей краевая задача решается с помощью интеграла Пуассона, то альтернирующий процесс нам непосредственно дает решение краевой задачи для всей области G.

В трехмерном пространстве мы можем с помощью альтернирующего процесса решить краевую задачу для внешней области тетраэдра, которая может быть рассматриваема как соединение четырех полупространств.

Если мы примем теперь во внимание, что всякая область может быть получена как предельная область монотонно возрастающей последовательности областей G_ν, каждая из которых состоит из конечного числа кругов или соответственно шаров, то в силу теоремы б) из п. 1 мы получаем следующий результат:

На плоскости функция Грина существует, и, следовательно, краевая задача разрешима для всякой области G, любая граничная точка которой достижима извне вдоль прямолинейного

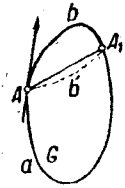
отрезка. В пространстве это имеет место для всех областей G, для которых всякая граничная точка является вершиной тетраэдра, все остальные точки которого лежат вне G[1]).

2. Доказательство леммы. Рассмотрим сначала случай двух измерений (черт. 24).

Составим потенциал двойного слоя, распределенного вдоль дуги b с плотностью 1, т. е. функцию

$$w(P) = w(x, y) = \int_b \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds,$$

выражающую величину угла, под которым дуга b видна из точки P. Эта регулярная внутри G гармоническая функция имеет во внутренних точках частей a и b границы области G непрерывные краевые значения. Когда граничная точка приближается к точке A вдоль дуги a, то соответствующие краевые значения w стремятся к пределу R_A-, равному углу, образуемому хордой AA_1 с касательной в точке A, направленной в сторону дуги b. Соответствующий же предел R_A+ краевых значений вдоль дуги b равняется углу между AA_1 и противоположным направлением касательной в точке A, т. е. с касательной, направленной в сторону дуги a. Отсюда следует, что имеет место соотношение



Черт. 24.

$$R_A+ - R_A- = \pi.$$

Когда внутренняя точка области приближается к граничной точке A по какому-нибудь лучу, образующему угол α с касательной в A, направленной в сторону дуги b, то предельное значение функции w равняется линейной комбинации:

$$\frac{\alpha}{\pi} R_A- + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) R_A+.$$

Отсюда следует, что для любой последовательности точек P_ν области G, сходящихся к точке A, соответствующие значения функции $w(P_\nu)$ образуют множество, все точки сгущения которого заключаются между числами R_A- и R_A+. То же самое имеет, разумеется, место и для другого конца A_1 дуги b.

Рассмотрим теперь распределение массы вдоль границы области G с плотностью ρ, равной π вдоль дуги b и нулю — вдоль дуги a.

---

[1]) Заметим, между прочим, что если мы будем применять альтернирующий процесс сразу к заданному конечному числу областей, пробегая их каждый раз при повторном применении процесса в циклическом порядке, то этот процесс будет по существу совпадать *с методом выметания*, принадлежащим Пуанкаре. Отличие от метода выметания состоит только в том, что Пуанкаре сразу кладет в основу счетное множество кругов или шаров, которые пробегаются в определенной последовательности, постоянно повторяясь. Однако, приводимое здесь доказательство существенно отличается от доказательства, обычно принятого при методе выметания.

Если мы обозначим через $\overline{w}$ краевые значения функции w, то разность $\overline{w}-\rho$ является непрерывной краевой функцией вдоль всей границы $\Gamma=a+b$ области G, к которой по предположению принадлежит определенная регулярная в G гармоническая функция Ω. Отсюда следует, что функция

$$S(P)=\frac{w-\Omega}{\pi}$$

представляет собой ограниченную в G и регулярную внутри G гармоническую функцию, краевые значения которой во всех внутренних точках дуги a равны нулю, а во всех внутренних точках дуги b — единице. Из наших предыдущих рассмотрений относительно поведения функции w следует, что при приближении изнутри области G к точкам A или A_1 все точки сгущения множества значений функции S лежат между нулем и единицей. При приближении к точке A под углом α с направлением касательной*) получается краевое значение $\frac{\alpha}{\pi}$, строго меньшее единицы.

Если теперь b' обозначает часть границы области G', содержащую точки A и A_1 и пересекающую границу Γ под углами α и α_1, то вдоль дуги b' всюду имеет место неравенство

$$S\leqslant q<1.$$

В самом деле, в противном случае на b' существовала бы такая последовательность точек P_ν, для которой выполнялось бы условие

$$S(P_\nu)\to 1.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы о максимуме и минимуме, мы убедимся в том, что последовательность P_ν не может иметь ни одной точки сгущения, лежащей внутри дуги b'; но точки A и A_1 также не могут быть точками сгущения последовательности P_ν, ибо при приближении к этим точкам функция S стремится согласно предыдущему к пределам

$$\frac{\alpha}{\pi}<1 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_1}{\pi}<1.$$

Отсюда следует, что должна существовать постоянная $q<1$, для которой всюду вдоль дуги b' имеет место неравенство $S\leqslant q$. Если v есть функция, рассматриваемая в нашей лемме, то мы составляем функцию

$$S-v=\Delta,$$

краевые значения которой вдоль a обращаются в нуль, а вдоль b нигде не отрицательны. Отсюда следует, что эта регулярная в G гармоническая функция нигде внутри G не отрицательна; точно так же при приближении к какой-нибудь внутренней точке дуги a или b эта

*) α — угол, образуемый направлением приближения к точке A с касательной, направленной в сторону дуги a. *(Прим. перев.)*.

функция не может принимать отрицательных краевых значений. При приближении к одному из концов A или A_1 дуги b функция Δ имеет те же самые точки сгущения множества своих значений, что и функция S, которые все заключаются между нулем и единицей. Таким образом, во всей замкнутой области G имеет место неравенство

$$S - v \geqslant 0$$

и, в частности, вдоль дуги b' получаем:

$$v \leqslant S \leqslant q.$$

Рассматривая таким же образом функцию $S + v$, мы получим, что всюду в G выполняется условие $S + v \geqslant 0$, а вдоль дуги b'

$$-v \leqslant S \leqslant q.$$

Окончательно мы получаем отсюда, что вдоль дуги b' имеет место неравенство

$$|v| \leqslant S \leqslant q < 1,$$

что и доказывает нашу лемму.

Это доказательство обладает тем преимуществом, что оно непосредственно переносится на случай трех или большего числа измерений, если в качестве функции w взять потенциал двойного слоя поверхностного распределения массы на границе с плотностью, равной единице на одной части и нулю на другой.

3. Метод интегральных уравнений для областей с достаточно гладкой границей. Другим методом решения краевой задачи, применимым к областям специального типа, является метод *интегральных уравнений Фредгольма*.

Этот метод существенно отличается от альтернирующего процесса и метода выметания и представляет собой углубление и обобщение более старого метода Неймана, применимого только к выпуклым областям. Краевая задача приводится при этом к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Не ставя себе целью развить этот метод при возможно более общих предположениях, мы допустим, сначала для случая плоскости, что граничная кривая Γ может быть представлена с помощью функций $x(t)$ и $y(t)$, имеющих непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

Будем искать гармоническую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую данным краевым условиям, в форме

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dt, \quad \text{где} \quad \gamma = \log \frac{1}{r}, \tag{1}$$

т. е. в виде потенциала двойного слоя, распределенного вдоль границы Γ с плотностью $\sigma(s)$. В силу сделанного предположения относительно Γ этот интеграл имеет смысл также и в том случае, когда точка $P(x, y)$ является точкой границы Γ. В самом деле, если мы примем на Γ в качестве параметра длину дуги s, то вдоль дуги Γ

мы получаем:

$$u(s)=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}dt. \tag{2}$$

В этом интеграле выражение

$$K(s,t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial\gamma(s,t)}{\partial\nu}=\frac{\cos\alpha}{\pi r}=\frac{1}{\pi}\frac{d\varphi}{dt} \tag{3}$$

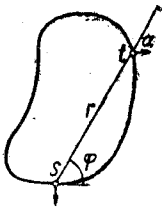
(черт. 25) стремится при $t\to s$ к пределу $\frac{1}{2\pi}k(s)$, где $k(s)$ обозначает кривизну граничной кривой в точке s и является по условию дважды непрерывно дифференцируемой функцией от s. Таким образом, ядро $K(s,t)$ само имеет непрерывные производные до второго порядка.

Мы предполагаем, что $\sigma(s)$ является непрерывно дифференцируемой функцией длины дуги s. Когда точка P приближается изнутри области к граничной точке P_0, то согласно выведенной в § 1, п. 4 теореме о скачках потенциала двойного слоя, потенциал $u(P)$ стремится к пределу

$$u_i(P_0)=u(P_0)-\pi\sigma(P_0)$$

или на основании формулы (2) к пределу

$$u_i(P_0)=-\pi\int_{\Gamma}K(s,t)\sigma(t)\,dt-\pi\sigma(s). \tag{4}$$



Черт. 25.

Это обстоятельство наводит на мысль обратить этот ход рассуждения и при заданных краевых значениях $u_i(P_0)=f(s)$ определять плотность $\sigma(s)$ из интегрального уравнения

$$\sigma(s)=-\int_{\Gamma}K(s,t)\sigma(t)\,dt-\frac{1}{\pi}f(s). \tag{5}$$

Не ограничивая общности, мы можем согласно п. 1 предположить, что краевая функция $f(s)$ непрерывно дифференцируема. Если $\sigma(s)$ — решение интегрального уравнения (5), то потенциал

$$u=\int_{\Gamma}\sigma(t)\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}dt$$

удовлетворяет внутри G уравнению Лапласа. В силу дифференцируемости функций $f(s)$ и $K(s,t)$ функция распределения $\sigma(s)$ также непрерывно дифференцируема, так что выполняются условия теоремы о скачках потенциала двойного слоя для случая плоскости из § 1, п. 4. В силу этого потенциал u принимает при приближении к границе Γ краевые значения

$$-\pi\int_{\Gamma}K(s,t)\sigma(t)\,dt-\pi\sigma(s)=f(s)$$

и является, таким образом, решением поставленной краевой задачи.

Для интегрального уравнения (5) имеют место доказанные в т. I, гл. 3 *теоремы Фредгольма*. Согласно этим теоремам при любой непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$ существует однозначно определенная непрерывно дифференцируемая функция $\sigma(s)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (5), если только соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\sigma(s) = -\int_{\Gamma} K(s, t)\sigma(t)\,dt \tag{6}$$

не имеет никакого другого решения, кроме тривиального ($\sigma \equiv 0$).

Другими словами, теорема существования для рассматриваемых специальных областей будет доказана, если нам удастся показать, что среди собственных значений однородного уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t)v(t)\,dt \tag{7}$$

никогда не встречается собственное значение $\lambda = -1$.

В случае *выпуклой границы с непрерывной кривизной* это является непосредственным следствием соотношения

$$\int_{\Gamma} K(s, t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt = 1$$

и вытекающего из условия выпуклости неравенства

$$K(s, t) = \frac{\cos\alpha}{\pi r} \geqslant 0.$$

В самом деле, если M — максимум $|v|$ на Γ, то имеем:

$$|\lambda|\,|v| \leqslant M\int K(s, t)\,dt = M$$

и поэтому при $|v| = M$ мы получаем $|\lambda|M \leqslant M$. Знак равенства может иметь место только тогда, когда v — постоянная. Если $v \not\equiv 0$, то $M \neq 0$ и, следовательно, $|\lambda| \leqslant 1$, причем равенство $|\lambda| = 1$ может иметь место только в случае постоянного v. Однако, к собственной функции $v = \text{const}$. принадлежит собственное значение $\lambda = +1$, откуда мы получаем неравенство $-1 < \lambda \leqslant +1$, исключающее собственное значение $\lambda = -1$.

В случае невыпуклой границы мы заметим, что в силу наших предположений ядро $K(s, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, откуда следует, что этим же свойством обладает также всякая собственная функция интегрального уравнения

$$\lambda v(s) = \int K(s, t)v(t)\,dt.$$

Пусть $\sigma(s)$ решение уравнения

$$-\sigma(s) = \int K(s, t)\sigma(t)\,dt. \tag{6}$$

Тогда в силу теоремы о скачках потенциала двойного слоя из § 1, п. 4 потенциал

$$u(x, y) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dt \tag{8}$$

имеет на Г внутренние краевые значения

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt - \pi\sigma(s) = 0.$$

Отсюда следует в силу теоремы единственности, что $u(x, y)$ тождественно обращается в нуль всюду внутри G. Поэтому внутренняя нормальная производная функции $u(x, y)$ также обращается в нуль во всех точках границы Г.

Рассмотрим теперь потенциал (8) вне области G. Согласно той же теореме о скачках потенциала двойного слоя из § 1, п. 4, условия которой в нашем случае выполняются, мы получаем на Г внешние краевые значения

$$u_a(s) = \int \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt + \pi\sigma = 2\pi\sigma(s),$$

а внешние нормальные производные $\frac{\partial u_a}{\partial \nu} = 0$. В бесконечности u обращается в нуль порядка $\frac{1}{r}$.

Отсюда следует, что функция u тождественно равна нулю также и вне области G, так что, в частности, равны нулю и внешние краевые значения u:

$$u_a(s) = 2\pi\sigma(s) = 0.$$

Итак, доказано, что всякое решение уравнения (6) тождественно равно нулю, и, следовательно, значение $\lambda = -1$ не может быть собственным значением однородного интегрального уравнения

$$\lambda v(s) = \int_{\Gamma} K(s, t) v(t) dt.$$

Таким образом, теорема о существовании решения краевой задачи для рассматриваемых специальных типов областей G полностью доказана.

Аналогичное рассмотрение можно провести и в пространстве, причем, однако, для того, чтобы иметь возможность применить теорию Фредгольма, необходимо заменить ядро

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right),$$

квадрат которого не интегрируем, итерацией этого ядра, имеющей интегрируемый квадрат.

По поводу метода интегральных уравнений заметим, что, несмотря на изящество описанного процесса, этот метод значительно хуже

предыдущих методов решения, ибо уже при наличии одной обыкновенной вершины ядро K приобретает особенности, исключающие возможность применения теории Фредгольма.

4. Дальнейшие замечания по поводу краевой задачи. В случае плоскости изложенные выше методы дают возможность решить краевую задачу для всякой области, ограниченной какой угодно кривой Жордана. В случае трехмерного пространства дело обстоит значительно сложнее, поскольку имеются области, для которых краевая задача в строгом смысле слова является неразрешимой, т. е. не существует гармонической внутри области функции, которая на границе принимала бы заданные непрерывные краевые значения в смысле действительного достижения краевых значений в каждой отдельной точке границы.

Это обстоятельство иллюстрируется следующим *примером, принадлежащим Лебегу.*

Подсчитаем потенциал распределения массы вдоль отрезка оси x, заключенного между нулем и единицей, с линейной плотностью $\tau(x) = x$. Положим $\rho^2 = y^2 + z^2$. Тогда

$$u(x, y, z) = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \rho^2}} = A(x, \rho) - 2x \log \rho,$$

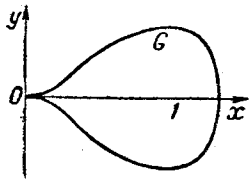
где для краткости положено

$$A(x, \rho) = \sqrt{(1-x)^2 + \rho^2} - \sqrt{x^2 + \rho^2} +$$
$$+ x \log [(1 - x + \sqrt{(1-x)^2 + \rho^2})(x + \sqrt{x^2 + \rho^2})].$$

Когда точка (x, y, z) приближается к началу координат по произвольному закону, но так, что x остается при этом все время положительным, то выражение $A(x, \rho)$ стремится непрерывно к пределу 1, тогда как предел выражения $-2x \log \rho$ существенно зависит от способа приближения. Если мы, например, будем приближаться к началу координат по поверхности $\rho = |x|^n$, то $-2x \log \rho$ будет стремиться к нулю при любом n, так что u будет тогда стремиться к единице. Если же мы будем приближаться по поверхности

$$\rho = e^{-\frac{c}{2x}} \quad (c > 0,\ x > 0),$$

имеющей в начале координат *«бесконечно острую»* вершину, то $-2x \log \rho$ будет стремиться к пределу c, а потенциал u — к пределу $1 + c$. Это значит, что все эквипотенциальные поверхности $u = 1 + c$ при $c > 0$ сходятся в начале координат и притом так, что все производные кривой $\rho = f(x)$, вращением которой вокруг оси x образуется поверхность $u = 1 + c$, обращаются в нуль в начале координат. На черт. 26 изображена форма такой поверхности $u = 1 + c$.



Черт. 26.

Если мы выберем в качестве основной области G область, ограниченную такой эквипотенциальной поверхностью $u = 1 + c$, где $c > 0$, и рассмотрим для такой области G внешнюю краевую задачу при краевых значениях $u = 1 + c$, то решением этой задачи будет служить приведенная выше функция $u(x, y, z)$. Однако, из наших предыдущих рассмотрений следует, что это решение при соответствующем способе приближения к началу координат может стремиться к любому значению, заключенному между 1 и $1 + c$.

С помощью зеркального отражения в сфере

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

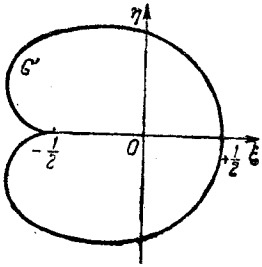
мы можем из этого примера получить соответствующий пример внутренней задачи, обладающей такой же особенностью.

При этом преобразовании область G переходит в область G' пространства ξ, η, ζ, имеющую в точке $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ бесконечно острую внутреннюю вершину [1]) (черт. 27). Краевые значения $1 + c$ переходят в непрерывные на Γ' краевые значения

$$v = \frac{1 + c}{2r}; \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Решением внутренней краевой задачи для области G' при этих краевых значениях является регулярная в G' гармоническая функция

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2r} u\left(\frac{\xi}{4r^2} + \frac{1}{2}, \frac{\eta}{4r^2}, \frac{\zeta}{4r^2}\right).$$



Черт. 27.

При соответствующем способе приближения к точке $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ мы опять можем получить в качестве предельного значения для v любое число, заключенное между 1 и $1 + c$.

Впоследствии, в гл. VII, § 4, мы покажем, что в случае трех или большего числа измерений требование, чтобы искомая функция принимала в каждой граничной точке заданные краевые значения в строгом смысле слова, является слишком сильным, которое по самому существу задачи в известных случаях может выходить за пределы действительно осуществимых краевых условий.

В связи с этим условие действительного достижения краевых значений в каждой точке границы должно быть заменено более слабым требованием *достижения краевых значений в среднем*, которое, однако, является достаточно сильным для того, чтобы обеспечить единственность решения.

---

[1]) Мы принимаем центр сферы за новое начало координат. (*Прим. перев.*)

Только в частном случае двух измерений достижение краевых значений в среднем влечет за собой действительное достижение краевых значений в каждой отдельной точке границы.

§ 5. Краевые задачи для более общих эллиптических дифференциальных уравнений; единственность решений

Хотя уравнение $\Delta u = 0$ является типичным примером эллиптического дифференциального уравнения, переход к общей теории эллиптических дифференциальных уравнений хотя бы только второго порядка потребовал бы от нас целого ряда новых рассмотрений, выходящих за пределы этой книги. Мы ограничимся поэтому здесь кратким изложением некоторых основных пунктов, относящихся к краевым задачам и к построению специальных частных решений. В сноске мы приводим перечень литературы по этому вопросу[1]). Сначала мы рассмотрим вопрос о единственности решения, т. е. выясним, при каких условиях решение краевой задачи однозначно определено.

1. Линейные дифференциальные уравнения. Пусть $L[u] = 0$ обозначает линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0, \tag{1}$$

где для краткости положено $u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$, b_i и c представляют собой непрерывные в некоторой ограниченной области G n-мерного пространства функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Квадратичная форма от параметров $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\sum a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\xi_i\xi_k$$

является по условию определенной положительной формой во всех точках $x_1, \ldots, x_n$ области G.

---

[1]) См. обзор Лихтенштейна (Lichtenstein), Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Энциклопедия математических наук, т. II, 3, вып. 8.

Теория эллиптических дифференциальных уравнений излагается с большой общностью в работах E. E. Levi и Georges Giraud; эти работы содержат далеко идущее распространение результатов теории потенциала на общие дифференциальные уравнения эллиптического типа. Levi E. E., *Palermo Rend.*, т. 24 (1907), стр. 275—317; Giraud G., Sur le problème de Dirichlet généralisé. Equations non linéaires à m variables, *Mém. École Normale*, т. 43 (1926), стр. 1—128; Sur le problème de Dirichlet général. 2, *Mém. École Normale*, т. 46 (1929), стр. 131—145; Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, *Mem. École Normale*, т. 49 (1932), стр. 1—103.

Далее укажем на новейшие работы Жиро (Giraud), Шаудера (Schauder) и Лерэ (Leray), которые реферирует *Zentralblatt für Mathematik*. [См. также цикл статей по уравнениям эллиптического типа в «*Успехах математических наук*», вып. VIII, 1941.]