Только в частном случае двух измерений достижение краевых значений в среднем влечет за собой действительное достижение краевых значений в каждой отдельной точке границы.

§ 5. Краевые задачи для более общих эллиптических дифференциальных уравнений; единственность решений

Хотя уравнение $\Delta u = 0$ является типичным примером эллиптического дифференциального уравнения, переход к общей теории эллиптических дифференциальных уравнений хотя бы только второго порядка потребовал бы от нас целого ряда новых рассмотрений, выходящих за пределы этой книги. Мы ограничимся поэтому здесь кратким изложением некоторых основных пунктов, относящихся к краевым задачам и к построению специальных частных решений. В сноске мы приводим перечень литературы по этому вопросу[1]). Сначала мы рассмотрим вопрос о единственности решения, т. е. выясним, при каких условиях решение краевой задачи однозначно определено.

1. Линейные дифференциальные уравнения. Пусть $L[u] = 0$ обозначает линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0, \tag{1}$$

где для краткости положено $u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$, b_i и c представляют собой непрерывные в некоторой ограниченной области G n-мерного пространства функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Квадратичная форма от параметров $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\sum a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\xi_i\xi_k$$

является по условию определенной положительной формой во всех точках $x_1, \ldots, x_n$ области G.

---

[1]) См. обзор Лихтенштейна (Lichtenstein), Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Энциклопедия математических наук, т. II, 3, вып. 8.

Теория эллиптических дифференциальных уравнений излагается с большой общностью в работах E. E. Levi и Georges Giraud; эти работы содержат далеко идущее распространение результатов теории потенциала на общие дифференциальные уравнения эллиптического типа. Levi E. E., *Palermo Rend.*, т. 24 (1907), стр. 275—317; Giraud G., Sur le problème de Dirichlet généralisé. Equations non linéaires à m variables, *Mém. École Normale*, т. 43 (1926), стр. 1—128; Sur le problème de Dirichlet général. 2, *Mém. École Normale*, т. 46 (1929), стр. 131—145; Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, *Mem. École Normale*, т. 49 (1932), стр. 1—103.

Далее укажем на новейшие работы Жиро (Giraud), Шаудера (Schauder) и Лерэ (Leray), которые реферирует *Zentralblatt für Mathematik*. [См. также цикл статей по уравнениям эллиптического типа в «*Успехах математических наук*», вып. VIII, 1941.]

Тогда имеет место следующая *теорема единственности*:

При условии $c \leqslant 0$ не существует двух различных решений уравнения (1), *имеющих в G непрерывные производные до второго порядка и непрерывных в $G+\Gamma$, которые принимали бы на границе Γ области G одинаковые краевые значения* [1]).

Другими словами, мы должны доказать, что решение уравнения $L[u]=0$, обращающееся в нуль на границе Γ, тождественно равно нулю всюду внутри области G.

Допустим сначала, что $c<0$, и докажем при этом предположении следующую теорему:

Всякое решение уравнения $L[u]=0$, обращающееся в нуль на границе Γ, не может иметь внутри G положительного максимума.

В самом деле, если u достигает положительного максимума в некоторой внутренней точке $P(x_1, \ldots, x_n)$ области G, то в этой точке обращаются в нуль все первые производные u_i и матрица вторых производных

$$u_{ik}(P)=b_{ik}$$

является матрицей коэффициентов нигде не положительной квадратичной формы.

В точке P дифференциальное выражение L принимает вид

$$L[u]=S+cu,$$

где $S=\sum a_{ik}b_{ik}$ представляет собой след (Spur) произведения матриц (a_{ik}) и (b_{ik}). Но след S этой матрицы не может быть положительным.

В самом деле, приведем матрицу (a_{ik}) с помощью ортогонального преобразования к виду диагональной матрицы (p_i). Тогда по условию все $p_i>0$. Если при этом ортогональном преобразовании матрица (b_{ik}) переходит в матрицу (β_{ik}), то, так как след S произведения обеих матриц инвариантен относительно любого ортогонального преобразования,

$$S=\sum_i p_i \beta_{ii}.$$

С другой стороны, матрица (β_{ik}) является так же, как и матрица (b_{ik}), матрицей коэффициентов нигде не положительной квадратичной формы, откуда следует, в частности, что $\beta_{ii} \leqslant 0$, так что $S \leqslant 0$, что и требовалось доказать.

Так как $c<0$ и $u(P)>0$, то в точке P имеет поэтому место неравенство

$$L[u]<0,$$

---

[1]) Если не ввести условия $c \leqslant 0$, то единственность решения может и не иметь места, как это показывает пример дифференциального уравнения

$$\Delta u+cu=0,$$

где c является одним из положительных собственных значений для краевого условия $u=0$.

и мы пришли к противоречию с нашим предположением, что u является решением уравнения $L[u]=0$. Таким образом, теорема доказана.

Применяя, наконец, тот же результат к функции $-u$, мы получаем, что u не может также достигать внутри G отрицательного минимума. Итак, из того, что $u=0$ на границе Γ следует, что *u обращается в нуль тождественно всюду внутри G.*

Случай $c\leqslant 0$ можно привести к случаю $c<0$ с помощью следующего приема, принадлежащего Пикару. Положим

$$u=z(x_1,\ldots,x_n)v(x_1,\ldots,x_n),$$

введя неопределенный множитель z. Мы получаем для функции v дифференциальное уравнение вида

$$z\sum a_{ik}v_{ik}+z\sum\beta_i v_i+v\left(cz+\sum a_{ik}z_{ik}+\sum b_i z_i\right)=0, \qquad (2)$$

где β_i — некоторые непрерывные в G функции точки*). Выберем в качестве z функцию

$$z=C-e^{\mu x_1}.$$

Тогда мы получаем:

$$\sum a_{ik}v_{ik}+\sum\beta_i v_i+c^* v=0, \qquad (3)$$

где

$$c^*=c-\frac{1}{z}(a_{11}\mu^2+b_1\mu)\,e^{\mu x_1}.$$

Так как $a_{11}>0$, то мы можем константы C и μ выбрать так, чтобы в области G всюду выполнялись условия $c^*<0$ и $z>1$. В силу полученного выше результата функция v, а, следовательно, и функция $u=zv$ обращается в нуль тождественно в области G. Таким образом, теорема единственности полностью доказана.

2. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Рассмотрения и результаты предыдущего номера могут быть с помощью простого и часто применявшегося в других случаях приема распространены и на более общие квазилинейные дифференциальные уравнения. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$L[u]=\sum a_{ik}u_{ik}+d=0, \qquad (4)$$

в котором коэффициенты a_{ik} и d являются непрерывно дифференцируемыми функциями от переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ и $u_1, u_2,\ldots,u_n$ и не содержат, таким образом, в явном виде самой неизвестной функции u. Докажем следующую теорему:

Не существует двух различных решений уравнения (4), *которые на границе Γ принимали бы одинаковые краевые значения и для которых квадратичная форма с матрицей (a_{ik}) была бы всюду внутри G определенной положительной формой.*

Для простоты мы проведем наши рассмотрения для случая $n=2$, т. е. для дифференциального уравнения

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+d=0, \qquad (5)$$

*) Предполагается, что z не обращается в нуль в области G.

причем функции a, b, c и d являются непрерывно дифференцируемыми функциями от величин x, y, u, u_x и u_y в некоторой области G. Допустим, что существуют два решения u и v, разность которых $\omega = u - v$ обращается в нуль на границе Γ. Положим для краткости

$$a[u] = a(x, y, u_x, u_y),$$
$$a[v] = a(x, y, v_x, v_y)$$

и т. д. Тогда

$$L[u] - L[v] = L[v+\omega] - L[v] = a[u]\,\omega_{xx} + 2b[u]\,\omega_{xy} + c[u]\,\omega_{yy} + \\ + \{a[v+\omega] - a[v]\}\,v_{xx} + 2\{b[v+\omega] - b[v]\}\,v_{xy} + \\ + \{c[v+\omega] - c[v]\}\,v_{yy} + d[v+\omega] - d[v] = 0.$$

Применяя к конечным разностям

$$a[v+\omega] - a[v] = a(x, y, v_x+\omega_x, v_y+\omega_y) - a(x, y, v_x, v_y)$$

и т. д. теорему о конечном приращении, т. е. представляя каждую такую разность в форме

$$\lambda\omega_x + \mu\omega_y,$$

где λ и μ — непрерывные функции точки, мы получим, что ω удовлетворяет в G соотношению вида

$$a\omega_{xx} + 2b\omega_{xy} + c\omega_{yy} + \alpha\omega_x + \beta\omega_y = 0, \tag{6}$$

причем a, b, c, α, β являются непрерывными в G функциями точки[1]), вид которых зависит, конечно, от вида функций u и v.

К уравнению (6) мы можем применить рассмотрения и результаты п. 1. Если выполняется условие $ac - b^2 > 0$, то функция ω, обращающаяся в нуль на границе Γ, должна тождественно равняться нулю во всей области G, что и доказывает нашу теорему.

3. Теорема Реллиха о дифференциальном уравнении Монжа-Ампера. В качестве примера неквазилинейного уравнения, для которого уже не имеет места теорема единственности в приведенной выше формулировке, рассмотрим краевую задачу для *дифференциального уравнения Монжа-Ампера*

$$L[u] = E(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + D = 0. \tag{7}$$

Пусть коэффициенты E, D, A, B, C являются в G непрерывными функциями от x и y, удовлетворяющими неравенству

$$AC - B^2 - ED > 0. \tag{8}$$

Тогда вместо теоремы единственности имеет место следующая теорема:

Не может существовать больше двух различных решений уравнения (7), *которые принимали бы одинаковые краевые значе-*

---

[1]) Указанный выше прием приведения исследования квазилинейного уравнения к линейному состоит в составлении такого линейного уравнения для функции ω, коэффициенты которого мы рассматриваем как заданные функции точки.

ния на границе Γ *области* G, причем два таких решения в общем случае действительно существуют[1]).

Доказательство. Если u какое-нибудь решение уравнения (7), то в силу уравнения (7) и неравенства (8) имеет место также следующее неравенство:

$$(Eu_{xx}+C)(Eu_{yy}+A)-(Eu_{xy}-B)^2>0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что произведение $(Eu_{xx}+C)(Eu_{yy}+A)$ всюду положительно в области G, так что ни один из сомножителей нигде не обращается в нуль в области G. Таким образом, оба множителя либо всюду в G положительны, либо всюду в G отрицательны. Докажем теперь, что не существует двух различных решений нашей краевой задачи, удовлетворяющих всюду в G условию

$$Eu_{xx}+C>0, \quad \text{так что и} \quad Eu_{yy}+A>0. \tag{10}$$

Точно так же не существует двух различных решений, для которых

$$Eu_{xx}+C<0, \quad \text{так что и} \quad Eu_{yy}+A<0. \tag{11}$$

Отсюда и будет следовать, что наша краевая задача не может иметь больше двух различных решений, причем одно из этих решений может удовлетворять условию (10), а другое условию (11).

Для доказательства нашего утверждения мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением случая (10).

Допустим, что существуют два решения u и v нашей краевой задачи, удовлетворяющие неравенству (10); тогда их разность

$$\omega = u - v$$

удовлетворяет одновременно следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned} 0 &= L[\omega+v]-L[v] = E(\omega_{xx}\omega_{yy}-\omega_{xy}^2)+(Ev_{xx}+C)\omega_{yy}+ \\ &\quad +(Ev_{yy}+A)\omega_{xx}-2(Ev_{yx}-B)\omega_{xy}, \\ 0 &= L[u]-L[u-\omega] = -E(\omega_{xx}\omega_{yy}-\omega_{xy}^2)+(Eu_{xx}+C)\omega_{yy}+ \\ &\quad +(Eu_{yy}+A)\omega_{xx}-2(Eu_{yx}-B)\omega_{xy}. \end{aligned}$$

Складывая эти два уравнения, мы получим, что функция ω удовлетворяет соотношению

$$P\omega_{xx}-2Q\omega_{xy}+R\omega_{yy}=0, \tag{12}$$

коэффициентами которого P, Q, R являются следующие выражения:

$$\begin{aligned} P &= (Ev_{yy}+A)+(Eu_{yy}+A), \\ Q &= (Ev_{xy}-B)+(Eu_{xy}-B), \\ R &= (Ev_{xx}+C)+(Eu_{xx}+C). \end{aligned}$$

Эти коэффициенты представляют собой, таким образом, непрерывные функции точки в области G, а квадратичная форма

$$P\xi^2-2Q\xi\eta+R\eta^2$$

---

[1]) Реллих (Rellich F.), *Math. Ann.*, т. 107 (1933), стр. 505 и следующие.

является в силу наших предположений суммой двух определенных положительных квадратичных форм и, следовательно, сама представляет собой так же определенную положительную квадратичную форму.

Поэтому из соотношения (12) следует совершенно так же, как и в п.п. 1 и 2, что при выполнении краевого условия $\omega = 0$ функция ω должна тождественно равняться нулю во всей области G, так что $u \equiv v$, и наша теорема, таким образом, доказана.

Покажем на простом примере, что в общем случае уравнения Монжа-Ампера мы можем ожидать *существования двух различных решений краевой задачи.*

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4$$

с краевым условием:

$$u = 0 \text{ вдоль единичной окружности.} \tag{13}$$

Эта задача имеет следующие два решения:

$$u = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{и} \quad v = 1 - x^2 - y^2.$$

Первое решение удовлетворяет условию $Eu_{xx} + C = 2$, а второе — условию $Ev_{xx} + C = -2$.

Если же функция E обращается в нуль в какой-нибудь точке P области G, то краевая задача не может иметь двух различных решений. В самом деле, в этом случае в точке P имеет место равенство

$$Eu_{xx} + C = C(P),$$

откуда следует в силу знакопостоянства функции $Eu_{xx} + C$ в области G, что всюду в G

$$\operatorname{sign}(Eu_{xx} + C) = \operatorname{sign} C(P).$$

Таким образом, выражение $Eu_{xx} + C$ имеет в области G для всех решений u один и тот же знак[1]).

---

[1]) В связи с этим обратим, между прочим, внимание читателя на тот замечательный факт, что дифференциальное уравнение Монжа-Ампера получается при решении *простой вариационной задачи*: опустим добавочную часть

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

и рассмотрим уравнение

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = p(x, y). \tag{14}$$

Легко проверить, что уравнение (14) является уравнением Эйлера для вариационного выражения

$$J[u] = \iint\limits_G (u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx} - 4pu)\, dx\, dy.$$