§ 6. Решение эллиптических дифференциальных уравнений методом интегральных уравнений

В случае общих эллиптических дифференциальных уравнений можно также составить интегральные уравнения, решение которых эквивалентно решению краевой задачи для данного дифференциального уравнения. В частности, из этой связи между дифференциальной и интегральной задачами получаются на основании теорем Фредгольма соответствующие теоремы существования специальных частных решений и методы решения краевых задач. Мы ограничимся здесь только тем, что в общих чертах изложим наиболее характеристические особенности этих методов. В соответствии с этим мы рассмотрим только случай двух независимых переменных и притом только для линейных дифференциальных уравнений. На основании результатов гл. III, § 1 мы имеем право предположить, что дифференциальное уравнение приведено к виду

$$L[u] = \Delta u + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \tag{1}$$

причем a, b, c и f непрерывны и непрерывно дифференцируемы в заданной ограниченной области G.

1. **Построение решений. Основные решения.** Если коэффициенты a, b, c и правая часть f являются аналитическими функциями от x и y, то вопрос о том, имеет ли уравнение (1) вообще какие-нибудь решения, может быть просто разрешен путем разыскания решений, разлагающихся в степенные ряды (см. гл. I, § 7). Если же в отношении коэффициентов уравнения не сделаны никакие другие предположения, кроме условия непрерывности и непрерывной дифференцируемости, то уже вопрос о существовании хотя бы одного решения дифференциального уравнения (1) представляет собой задачу, решение которой требует введения новых методов. Одним из таких методов является *метод интегральных уравнений*, принадлежащий *Э. Леви*.

Положим для краткости

$$\psi(x, y; \xi, \eta) = -\log\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = -\log r \tag{2}$$

и назовем эту функцию функцией особенностей [1]) (Parametrix). Функция ψ обладает в точке $x=\xi$, $y=\eta$ характеристической особенностью, соответствующей дифференциальному выражению L (см. § 1, п. 1), но не удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Поэтому интеграл

$$u = \iint\limits_G \psi(x, y; \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{3}$$

---

[1]) Гильберт Д., *Göttinger Nachr.*, 1910, стр. 1—65, в особенности стр. 8—34; кроме того, отметим его работу: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Лейпциг, 1912 и в особенности стр. 219—242 и цитируемые там работы Э. Леви.

при произвольной функции $\rho(x, y)$ также не является решением уравнения (1).

Однако, мы можем всегда выбрать такую непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию $\rho(x, y)$, чтобы функция u или же более общее выражение вида

$$u = \omega(x, y) + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{4}$$

являлись решениями уравнения (1). При этом $\omega(x, y)$ обозначает здесь произвольную функцию, непрерывную в G и имеющую там непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Чтобы это доказать, подставим выражение (4) в уравнение $L[u] = f$; в силу условий дифференцируемости, которым мы подчинили функцию ρ, мы получаем на основании § 1, п. 2

$$\Delta u = \Delta\omega - 2\pi\rho,$$

откуда

$$L[u] = L[\omega] - 2\pi\rho + \iint_G (a\psi_x + b\psi_y + c\psi)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Положим для краткости

$$\begin{aligned} K(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi}(a\psi_x + b\psi_y + c\psi) = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left[a(x, y)\frac{x-\xi}{r^2} + b(x, y)\frac{y-\eta}{r^2} + \right. \\ &\qquad \left. + c(x, y)\log r\right] \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\{L[\omega] - f\}.$$

Мы получим тогда для ρ следующее *интегральное уравнение*:

$$\rho(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + g(x, y). \tag{6}$$

Однако, непосредственно к интегральному уравнению (6) теория Фредгольма не может быть применена, ибо в точке $x = \xi$, $y = \eta$ ядро K обращается в бесконечность порядка $\frac{1}{r}$ и не обладает поэтому интегрируемым квадратом. Но легко убедиться, что итерированное ядро

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_G K(x, y; s, t)K(s, t; \xi, \eta)\,ds\,dt$$

уже является квадратично интегрируемой функцией.

Мы рассматриваем поэтому сначала вместо уравнения (6) итерированное интегральное уравнение

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + h(x, y), \tag{7}$$

где

$$h = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\,g(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

К уравнению (7) теория Фредгольма уже может быть полностью применена.

Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7)

$$\rho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{8}$$

может иметь нетривиальное решение ρ только в том случае, если выполняется условие

$$\iint_G \iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta \geqslant 1. \tag{9}$$

Поэтому, если выбрать область G настолько малой, чтобы значение интеграла

$$\iint_G \iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta$$

было меньше единицы, то уравнение (8) будет иметь только тривиальное решение $\rho \equiv 0$. Функция $g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\{L[\omega] - f\}$ в силу наших предположений непрерывна и непрерывно дифференцируема в области G; отсюда следует на основании теоремы, доказанной в § 1, п. 2, что функция $h(x, y)$ также непрерывна и непрерывно дифференцируема в G.

Таким образом, применяя теоремы Фредгольма, мы можем теперь утверждать, *что для достаточно малых областей G и при любом h существует решение ρ интегрального уравнения* (7). Это решение является так же, как и h, непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет также первоначальному интегральному уравнению (6). В самом деле, положим

$$v = g + \iint_G K(x, y;\ \xi, \eta)\,\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Тогда уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\rho = \iint_G K(v - g)\,d\xi\,d\eta + h.$$

Умножая на K и интегрируя, мы получим:

$$v - g = \iint\limits_G K_2 (v - g)\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_G Kh\, d\xi\, d\eta$$

или

$$v = \iint\limits_G K_2 v\, d\xi\, d\eta + h,$$

т. е. v также удовлетворяет уравнению (7); но в силу единственности решения этого уравнения функция v должна совпадать с функцией ρ. Равенство же $v = \rho$ означает, что ρ удовлетворяет интегральному уравнению (6). Если мы теперь с помощью полученной функции $\rho(x, y)$ составим выражение

$$u = \omega + \iint\limits_G \psi(x, y;\ \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

то мы получим:

$$L[u] = L[\omega] + 2\pi \left\{ \iint\limits_G K\rho\, d\xi\, d\eta - \rho \right\} = f.$$

Таким образом, u является решением уравнения (1), имеющим в G непрерывные производные до второго порядка включительно и зависящим, сверх того, от произвольной функции ω. Итак, *нами доказано существование решений нашего дифференциального уравнения в достаточно малой области G.*

Положим, в частности,

$$\omega = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

и возьмем в качестве области G достаточно малую область G^*, содержащую точку x_0, y_0, из которой сама точка x_0, y_0 удалена вместе со сколь угодно малым кругом радиуса δ.

На основании предыдущего мы получаем в G^* решения вида

$$u^*(x, y) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\ + \iint\limits_{G^*} \psi(x, y;\ \xi, \eta)\, \rho^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Легко показать, что при предельном переходе $\delta \to 0$ функция ρ^* стремится к предельной функции ρ таким образом, что интеграл

$$\iint\limits_G \psi(x, y;\ \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

имеет во всей предельной области $G = \lim G^*$ непрерывные производные до второго порядка включительно. Функция

$$\gamma(x, y;\ x_0\, y_0) = -\log \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\ + \iint\limits_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

удовлетворяет тогда во всей области G, за исключением точки $x = x_0$, $y = y_0$, уравнению $L[u] = f$; так как, далее, разность

$$\gamma - \log \frac{1}{r}$$

всюду регулярна в области G, то функция $\gamma(x, y; x_0, y_0)$ является *основным решением уравнения* (1).

2. Краевая задача. С помощью построенного в предыдущем пункте основного решения мы можем теперь доказать разрешимость *краевой задачи* для дифференциального уравнения

$$L[u] = f, \tag{10}$$

проводя рассуждения, совершенно аналогичные рассмотрениям § 4, п. 3, с помощью которых мы обосновали метод интегральных уравнений для случая уравнения

$$\Delta u = 0.$$

Если же мы будем здесь предполагать уже доказанным, что для уравнения $\Delta u = 0$ краевая задача разрешима, так что существует функция Грина $K(P, Q)$ области G, то решение краевой задачи для уравнения (10) упрощается и может быть проведено с помощью таких же рассмотрений, как и в п. 1. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что вдоль границы Γ заданы нулевые краевые значения $u = 0$. Попытаемся представить решение уравнения (10) в виде интеграла

$$u = \iint\limits_G K(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{11}$$

где $K(x, y; \xi, \eta)$ обозначает функцию Грина уравнения $\Delta u = 0$ для области G, а ρ — некоторую непрерывную и непрерывно дифференцируемую в G функцию. Мы полагаем:

$$H(x, y; \xi, \eta) = aK_x + bK_y + cK \tag{12}$$

и допускаем далее, что H удовлетворяет в G неравенству вида

$$|H(x, y; \xi, \eta)| < \frac{\alpha}{r} \quad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right), \tag{13}$$

где α — некоторая не зависящая от x, y, ξ, η положительная константа. Мы получаем тогда

$$L[u] = \iint\limits_G H(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta - \rho(x, y),$$

так что функция ρ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\rho = -f + \iint\limits_G H(x, y; \xi, \eta)\rho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{14}$$

Мы снова рассматриваем уравнение, получающееся из интегрального уравнения (14) путем итерации, т. е. интегральное уравнение

$$\rho = -h + \iint\limits_G H_2(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{15}$$

где

$$h = f + \iint\limits_G H(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi, d\eta.$$

Из неравенства (13) очень легко получить неравенство

$$|H_2(x, y; \xi, \eta)| < \alpha_0 |\log r| + \beta_0, \tag{16}$$

где α_0, $\beta_0 > 0$ и не зависят от x, y, ξ, η. Отсюда следует квадратичная интегрируемость ядра H_2. Если мы выберем теперь область G настолько малой, чтобы выполнялось условие

$$\iint\limits_G \iint\limits_G H_2^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta < 1,$$

то теоремы Фредгольма обеспечивают существование решения $\rho(x, y)$ уравнения (15). Так же, как и раньше, мы доказываем, что это решение ρ удовлетворяет также и первоначальному интегральному уравнению (14). В силу условия (16) это решение непрерывно дифференцируемо в G, если этим свойством обладает функция $h(x, y)$. Непрерывная же дифференцируемость h является простым следствием дифференцируемости функции f и неравенства (13). Мы убеждаемся затем совершенно таким же образом, как и в п. 1, что функция

$$u(x, y) = \iint\limits_G K(x, y; \xi, \eta)\, \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

удовлетворяет уравнению $L[u] = f$ и так же, как и K, обращается в нуль на границе.

Таким образом $u(x, y)$ является решением данной краевой задачи. Допущение (13) легко можно привести к виду условия, непосредственно налагаемого на функцию Грина K.

Пусть G^* есть некоторая область, охватывающая область G и притом так, что кратчайшее расстояние между границами Γ^* и Γ областей G^* и G превосходит некоторое фиксированное число σ. Если K^* — функция Грина для области G^*, то в G всюду имеет место неравенство

$$0 < K < K^*. \tag{17}$$

Внутри области G имеем далее:

$$|2\pi K^* + 2\pi \log r| \leqslant 2\pi |\log M|,$$

где $|\log M|$ обозначает максимум выражения $|\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}|$, в котором точка (x, y) пробегает область G, а точка (ξ, η) — гра-

ницу Γ^*. Отсюда следует, что в области G имеет место неравенство вида

$$0 < K^* < p\,|\log r| + q.$$

В силу неравенства (17) тем более имеет место неравенство

$$0 < K < p\,|\log r| + q, \tag{18}$$

причем p и q являются некоторыми положительными константами, не зависящими от x, y, ξ, η. Если поэтому ядро K удовлетворяет, кроме того, всюду в области G дальнейшим неравенствам

$$|K_x(x, y;\ \xi, \eta)| < \frac{C}{r}\ ;\ |K_y(x, y;\ \xi, \eta)| < \frac{C}{r}, \tag{19}$$

где константа C не зависит от x, y, ξ, η, то из (12), (18) и (19) непосредственно получается условие (13).

Мы можем, таким образом, формулировать полученный нами результат так:

Если в достаточно малой области G соответствующая функция Грина $K(x, y;\ \xi, \eta)$ уравнения $\Delta u = 0$ удовлетворяет неравенству (19), *то уравнение*

$$L[u] = f(x, y)$$

всегда имеет решение $u(x, y)$, обращающееся в нуль на границе Γ области G.

Условие (19) входит в эту теорему в качестве условия, характеризующего вид области G. В отдельных частных случаях нетрудно его проверить.

Если, например, G представляет собой единичный круг, то согласно § 2, п. 2

$$K(x, y;\ \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi}\log\frac{(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2}{\rho^2\,[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]},$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Поэтому

$$K_x = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{x-\xi}{r^2} + \frac{\rho^2(\rho^2 x - \xi)}{2\pi\,[(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2]}.$$

Отсюда легко получается неравенство

$$|K_x| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{\rho^2}{\sqrt{(\rho^2 x - \xi)^2 + (\rho^2 y - \eta)^2}}\right)$$

или

$$|K_x| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{\xi}{\rho^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\rho^2}\right)^2}}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Но внутри единичного круга $r < \rho r_1$, а так как $\rho \leqslant 1$, то отсюда следует неравенство $r < r_1$, так что $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r}$.

Таким образом, мы получаем:

$$|K_x| \leqslant \frac{1}{\pi r}$$

и точно так же

$$|K_y| \leqslant \frac{1}{\pi r}.$$

Итак, функция Грина для единичного круга удовлетворяет внутри круга условию (19). Вообще можно доказать, что условие (19) выполняется для любой области G, *граница которой имеет всюду непрерывную кривизну* [1]).

Другой способ построения теории эллиптических дифференциальных уравнений дают *прямые методы вариационного исчисления*, как нами будет показано в гл. VII, однако, эти методы применимы только к тем дифференциальным уравнениям, к которым приводят вариационные задачи, т. е. только к *самосопряженным* дифференциальным уравнениям вида

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0. \tag{20}$$

Методы, бегло изложенные в этом параграфе, обладают прежде всего тем преимуществом, что они не связаны с этим ограничением и дают возможность распространить теорию также и на любые не самосопряженные уравнения, получающиеся путем присоединения к левой части уравнения (20) каких угодно членов первого порядка.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Обобщение краевой задачи. Теоремы Винера. Несмотря на то, что в случае трех или большего числа измерений краевая задача в строгом смысла слова, т. е. в смысле действительного достижения краевых значений, для произвольной ограниченной области является в общем случае неразрешимой, мы можем, однако, сделать задачу всегда разрешимой, если обобщим постановку вопроса и будем рассматривать с более глубокой точки зрения связь, существующую между заданной краевой функцией и искомой гармонической функцией.

Будем смотреть на краевую задачу, как на задачу сопоставления заданной на границе Γ непрерывной краевой функции f некоторой гармонической внутри G функции u.

Возможность такого сопоставления, не требующего обязательно непрерывного примыкания на границе значений функции u к значе-

---

[1]) См. обзорную статью Лихтенштейна в энциклопедии математических наук, т. II, 3, вып. 8. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.