ГЛАВА V

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В то время как эллиптическим дифференциальным уравнениям в физике соответствуют, вообще говоря, состояния равновесия, гиперболические дифференциальные уравнения, содержащие в качестве одного из независимых переменных время t, применяются прежде всего для описания колебательных и волновых процессов. (Предельным случаем является параболическое уравнение. Мы этот случай оставляем в стороне.) Ср. гл. III, § 7.

В теории гиперболических уравнений решающую роль играет понятие *характеристик*. Теория характеристик будет нами изложена в настоящей главе, а также в гл. VI. Для рассматриваемых здесь уравнений высших порядков мы построим теорию характеристик в форме, аналогичной рассмотрениям, проведенным в гл. II (дополнения, § 1) в отношении дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае двух независимых переменных мы введем понятие *характеристической кривой* и соответствующей одномерной *характеристической полоски* первого или более высокого порядка. В случае $n > 2$ мы будем рассматривать точечные *характеристические многообразия* и *характеристические полоски* $n-1$ *измерений*, а внутри этих многообразий мы будем в свою очередь выделять *характеристические лучи* так же, как мы это делали в гл. II для дифференциальных уравнений первого порядка.

Существование и построение решения задачи Коши в самом общем случае обеспечиваются *методом итерации Пикара* и вместе с этим решается также *вопрос о единственности решения* и о соответствующей *области зависимости*.

Правда, в отличие от дифференциальных уравнений первого порядка мы не получаем здесь приведения уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тем не менее, мы можем считать этот метод решения принципиально столь же простым, как и метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, поскольку и для обыкновенных дифференциальных уравнений доказательство существования и построение решения проще всего проводятся с помощью того же метода итераций Пикара.

Прежде чем провести в общем виде этот метод решения, мы осветим в первой части настоящей главы понятие характеристики с различных сторон.

§ 1. Характеристики квазилинейных дифференциальных уравнений

1. Определение характеристик. Рассмотрим для функции $u(x, y)$ с производными

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t$$

дифференциальное выражение

$$L[u] = ar + bs + ct \tag{1}$$

и соответственно дифференциальное уравнение

$$L[u] + d = ar + bs + ct + d = 0, \tag{2}$$

где a, b, c, d — заданные в некоторой области функции пяти величин x, y, u, p, q. Здесь, как и в дальнейшем, мы будем, вообще говоря, предполагать непрерывность всех входящих в рассмотрение функций и их производных; нарушение условия непрерывности или существования какой-нибудь производной мы будем каждый раз, когда понадобится, специально оговаривать.

Покажем теперь значение характеристических параметров ξ и η, введенных нами в гл. III, § 2 при приведении дифференциального уравнения к нормальному виду, причем мы это сделаем независимо от данного там вывода, исходя исключительно, как и в гл. II, из задачи Коши.

Пусть $u(x, y)$ — функция, рассматриваемая нами только вдоль кривой C или вдоль полоски первого порядка C_1. Зададим полоску C_1 в параметрической форме с помощью параметра λ, т. е. зададим кривую C уравнениями

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda), \qquad u = u(\lambda),$$

а вдоль этой кривой зададим угловые коэффициенты касательной плоскости $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, которые должны удовлетворять условию

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}, \tag{3}$$

где точкой обозначено дифференцирование по параметру λ.

Пусть $u(x, y)$ — какая-нибудь заданная функция, содержащая эту полоску первого порядка C_1. Мы предполагаем, что вдоль кривой C имеет место условие

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Иногда является целесообразным определять полоску C_1 с помощью ее проекции C_0 на плоскость x, y, заданной уравнением $\varphi(x, y) = 0$, так что полоска C_1 определяется кривой C_0 плоскости x, y, вдоль которой заданы три функции u, p, q, связанные между собой

соотношением (3) (если задать кривую C_0 в параметрической форме). Мы допускаем при этом, что кривая C_0 на плоскости x, y так же, как и кривая C на поверхности $u=u(x, y)$, отделяет область $\varphi<0$ от области $\varphi>0$.

Нашим исходным пунктом является следующий вопрос: *Что дает дифференциальное уравнение* (2) *вдоль полоски* C_1 *в отношении производных высших порядков функции* u? В частности, *можно ли определить вдоль полоски* C_1 *частные производные второго и высших порядков функции* u, *задавая полоску первого порядка* C_1 *и дифференциальное уравнение* (2)?

Заметив, что вдоль полоски C_1 производные p, q должны удовлетворять уравнениям $\dot{p}=r\dot{x}+s\dot{y}$, $\dot{q}=s\dot{x}+t\dot{y}$, мы получим для r, s, t вдоль C_1 систему трех линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} ar+bs+ct &= -d, \\ \dot{x}r+\dot{y}s &= \dot{p}, \\ \dot{x}s+\dot{y}t &= \dot{q}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда следует, что имеются следующие две возможности:

1. Пусть в каждой точке P кривой C выполняется условие

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & o \\ o & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}=a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2\neq 0.$$

Мы называем в этом случае полоску C_1 *обыкновенной полоской*. Вдоль обыкновенной полоски C_1 вторые производные r, s, t однозначно определены.

2. В противном случае на полоске C_1 имеется по крайней мере одна точка P, в которой имеет место уравнение

$$\Delta=a\dot{y}^2-b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0. \tag{5}$$

Условие (5) мы называем *характеристическим условием*, а точки P полоски, в которых имеет место это условие, — *характеристическими точками* полоски.

В дальнейшем мы будем предполагать, что полоска C_1 либо является обыкновенной, либо вся целиком состоит из характеристических точек. Во втором случае вдоль всей полоски C_1 между левыми частями системы уравнений (4), а, следовательно и между правыми частями существует линейная зависимость с коэффициентами, зависящими только от x, y, u, p и q. Эта линейная зависимость вдоль C_1 дает новое условие, которому должны удовлетворять величины p, q в случае совместности системы уравнений (4). Только при выполнении этого условия существуют значения r, s и t, удовлетворяющие системе уравнений (4). Присоединив к системе пяти функций x, y, u, p, q параметра λ три функции r, s и t, удовлетворяющие уравнениям (4), мы дополним полоску первого порядка C_1 до «интеграль-

ной полоски» второго порядка C_2 уравнения (2). Мы называем такую интегральную полоску второго порядка C_2, т. е. полоску второго порядка, удовлетворяющую характеристическому условию (5) и дифференциальному уравнению (2), *характеристической полоской второго порядка*; соответствующую полоску первого порядка C_1 мы называем *характеристической полоской первого порядка* или просто *характеристической полоской*; носительница характеристической полоски — кривая C — называется *характеристической кривой*, а ее проекция C_0 — *характеристической проекцией*.

Вдоль такой характеристической полоски C_1 производные второго порядка r, s и t уже не определяются однозначно, а лишь с точностью до общего решения системы однородных уравнений, соответствующей системе (4).

В противоположность этой особенности характеристических полосок, вдоль обыкновенных полосок определяются однозначно не только производные второго порядка, но и все следующие производные какого угодно порядка функции u. Чтобы убедиться в этом, заметим, что всякая функция $f(x, y)$ вдоль полоски удовлетворяет условию $\dot{f} = \dot{x}f_x + \dot{y}f_y$.

Мы назовем это условие — *условием полоски* для функции f. Дифференцируя по x дифференциальное уравнение (2) и применяя условие полоски к уже определенным вдоль полоски производным второго порядка r и s, мы получим для производных третьего порядка r_x, s_x и t_x систему трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} ar_x + bs_x + ct_x &= \ldots, \\ \dot{x}r_x + \dot{y}s_x \qquad &= \dot{r}, \\ \dot{x}s_x + \dot{y}t_x &= \dot{s}, \end{aligned}$$

в которой правые части известны, а детерминант Δ отличен от нуля.

Таким же образом, мы однозначно определим r_y, s_y, t_y, r_{xx}, s_{xx}, t_{xx}, ... и т. д.

Резюмируем полученный результат:

Для исходной полоски C_1 имеет место следующая альтернатива: C_1 либо обыкновенная полоска, либо содержит характеристические точки. В первом случае заданное дифференциальное уравнение однозначно определяет вдоль полоски вторые и высшие производные u. Если же C_1 состоит целиком из характеристических точек, то полоска C_1 может быть дополнена до интегральной полоски второго порядка C_2 только в том случае, если вдоль C_1 выполняется еще одно дополнительное условие — условие совместности системы уравнений (4).

В этом случае C_1 называется характеристической полоской. Характеристическая полоска C_1 может быть дополнена до интегральной полоски C_2 бесчисленным множеством способов.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение $u_{xy}=0$ и зададим исходную полоску C_1 уравнениями $x=\lambda$, $y=0$, $u=0$, $p=0$, $q=f(\lambda)$. Эта полоска состоит исключительно из характеристических точек, а из дифференциального уравнения следует, что вдоль полоски должно выполняться условие $q_x=\dot{q}=0$. Таким образом, для того, чтобы полоску C_1 можно было бы дополнить до интегральной полоски дифференциального уравнения $u_{xy}=0$, необходимо подчинить эту полоску еще дальнейшему ограничению: $q=\text{const}$. Это значит, что из всех этих полосок характеристическими являются только плоские полоски.

Характеристическое условие $\Delta=0$ может быть получено также и другим способом, легче поддающимся обобщению на случай n независимых переменных (см. гл. I и III). Зададим полоску C_1 уравнением $\varphi(x, y)=0$ ее проекции на плоскость x, y. Мы будем называть заданное вдоль C_1 дифференциальное выражение второго порядка *внутренним дифференциальным выражением* или выражением, *лежащим внутри* C_1, если оно может быть вычислено исключительно с помощью величин, заданных вдоль C_1, и дифференциальных процессов, внутренних относительно C_1. Так, например, вдоль только что рассмотренной полоски $x=\lambda$, $y=0$, $u=0$, $p=0$, $q=f(\lambda)$ дифференциальное выражение u_{xy} является внутренним дифференциальным выражением, ибо вдоль этой полоски $u_{xy}=\dot{q}$.

Решим предварительно следующий вопрос: *каким условиям должно удовлетворять наше квазилинейное дифференциальное выражение* (1) *для того, чтобы оно было вдоль полоски* C_1 *внутренним дифференциальным выражением?*

Ответ гласит: *Для этого необходимо и достаточно, чтобы вдоль* C_1 *выполнялось характеристическое условие*

$$a\varphi_x^2+b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=Q(\varphi, \varphi)=0. \tag{6}$$

[Выражение $Q(\varphi, \varphi)$ называется *характеристической формой*.]

Доказательство. Введем вместо x и y новые координаты $\eta=\varphi(x, y)$ и $\lambda=\psi(x, y)$; таким образом, λ совпадает вдоль C_1 с введенным выше параметром, тогда как φ является переменной, выводящей за пределы полоски C_1.

Тогда для любой функции $u(x, y)$ имеем:

$$u_{xx}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x+u_{\psi\psi}\psi_x^2+u_\varphi\varphi_{xx}+u_\psi\psi_{xx},$$

$$u_{xy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y+u_{\varphi\psi}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y+u_\varphi\varphi_{xy}+u_\psi\psi_{xy},$$

$$u_{yy}=u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2+2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y+u_{\psi\psi}\psi_y^2+u_\varphi\varphi_{yy}+u_\psi\psi_{yy}.$$

Обозначая через $Q(\varphi, \psi)$ полярную форму квадратичной формы Q, мы получаем отсюда:

$$L[u]=u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi)+2u_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi)+u_{\psi\psi}Q(\psi, \psi)+u_\varphi L[\varphi]+u_\psi L[\psi]. \tag{7}$$

Вдоль C_1 дифференцирование по $\psi = \lambda$ является внутренним дифференцированием, тогда как дифференцирование по φ представляет собой внешний дифференциальный процесс, выводящий за пределы многообразия C_1. (Ср. гл. II, дополнения, § 1.)

Вдоль C_1 известными являются функция u, ее первые производные, а также все те производные второго порядка, которые могут быть получены из производных первого порядка дифференцированием по $\lambda = \psi$. Отсюда следует, что единственным членом в выражении $L[u]$, содержащим не лежащие в C_1 производные второго порядка, является $u_{\varphi\varphi} Q(\varphi, \varphi)$.

Таким образом, условие $Q(\varphi, \varphi) = 0$ вдоль кривой $\varphi = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $L[u]$ было внутренним выражением вдоль C_1, что и требовалось доказать.

Переходя теперь к дифференциальному уравнению

$$L[u] + d = 0,$$

мы видим, что имеет место следующая *альтернатива*: либо во всех точках кривой C выражение $Q(\varphi, \varphi)$ отлично от нуля и тогда внешняя производная $u_{\varphi\varphi}$ однозначно определена вдоль C, а вместе с ней и все производные высших порядков, либо $Q = 0$ в некоторой точке P кривой C, и тогда дифференциальное уравнение $L + d = 0$ дает в точке P дополнительное условие, которому должны удовлетворять внутренние величины полоски C_1. Если условие $Q = 0$ имеет место вдоль всей полоски C_1 и если считать первые производные u заданными вдоль такой полоски, то вышеупомянутое дополнительное условие имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения для величины $u_\varphi = \varkappa$, рассматриваемой как функция от $\psi = \lambda$, а именно:

$$2\varkappa_\lambda Q(\varphi, \psi) + \varkappa L[\varphi] + \ldots = 0, \tag{8}$$

где многоточие обозначает выражения, значения которых вдоль полоски полностью определяются заданием величин u, p и q с помощью процессов дифференцирования по λ.

Разумеется, характеристическое условие в форме (6) эквивалентно характеристическому условию в форме (5).

В самом деле, $\varphi(x, y) = 0$ есть уравнение проекции кривой C на плоскость x, y, откуда

$$\varphi_x \dot{x} + \varphi_y \dot{y} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_x : \varphi_y = -\dot{y} : \dot{x}.$$

Таким образом, левая часть уравнения (6) совпадает с левой частью уравнения (5) с точностью до множителя $\frac{\varphi_x^2}{\dot{y}^2}$. Заметим, между прочим, что величины φ_x и φ_y, так называемые тангенциальные координаты на кривой $\varphi = 0$, пропорциональны направляющим косинусам нормали к кривой, т. е. величинам $\frac{\partial x}{\partial \nu}$ и $\frac{\partial y}{\partial \nu}$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по направлению нормали ν:

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}; \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}.$$

Подчеркнем еще следующее: полоска C_1 может быть характеристической в том случае, если вдоль этой полоски выполняется условие

$$4ac - b^2 \leqslant 0,$$

так как в противном случае не существует вещественных значений отношений $\dot{x} : \dot{y}$ или $\varphi_x : \varphi_y$, которые удовлетворяли бы уравнениям (5) или соответственно (6).

Введем следующие определения: дифференциальное выражение $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy}$ называется *гиперболическим в точке* x, y, u, p, q пятимерного пространства (x, y, u, p, q), если в этой точке

$$4ac - b^2 < 0; \tag{9}$$

точно так же оно называется *гиперболическим вдоль полоски или на поверхности* $u = u(x, y)$ при $p = u_x$, $q = u_y$, если условие (9) выполняется во всех точках полоски или поверхности.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что дифференциальные выражения гиперболичны в рассматриваемых точках.

Если дифференциальное выражение линейно, то гиперболический характер выражения зависит только от x и y и не зависит от u, p и q; в частности, проекции характеристических кривых на плоскость x, y определяются в этом случае дифференциальным выражением независимо от u, p и q.

Сделаем еще одно важное замечание. *Характеристические условия дифференциального уравнения* (2) *инвариантны относительно любых преобразований независимых переменных* x, y.

Это непосредственно следует из того, что характеристическое условие является необходимым и достаточным признаком внутреннего относительно C_1 характера выражения $L[u]$.

С помощью вычислений мы в этом убеждаемся так:

Перейдем от переменных x, y к переменным ξ, η и пусть

$$u(x, y) = u(\xi, \eta), \quad \varphi(x, y) = \varphi(\xi, \eta),$$

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \delta,$$

где коэффициенты правой части α, β, γ и δ являются функциями от ξ, η, u, u_ξ и u_η. Тогда путем простого вычисления мы получим:

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = \alpha\varphi_\xi^2 + \beta\varphi_\xi\varphi_\eta + \gamma\varphi_\eta^2,$$

откуда и следует наше утверждение.

2. Характеристики на интегральных поверхностях. До сих пор мы ограничивались, в целях точного определения употребляемых понятий, исследованием поведения рассматриваемых величин вдоль одной полоски.

Перейдем теперь от полоски к поверхности J: $u = u(x, y)$ и допустим, что эта поверхность является интегральной поверхностью дифференциального уравнения (2). На такой поверхности не только u, но также и $p = u_x$, $q = u_y$ и коэффициенты a, b, c, d являются заданными функциями от x и y. Мы предполагаем, что во всех точ-

ках поверхности $u = u(x, y)$ имеет место условие $4ac - b^2 < 0$, т. е. что $u = u(x, y)$ — интегральная поверхность гиперболического типа.

В этом случае характеристическое условие

$$a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0$$

определяет два различных вещественных значения $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ и $-\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ отношения $\dot{y} : \dot{x}$ и дает на интегральной поверхности два различных семейства характеристических кривых, зависящих от одного параметра и являющихся решениями соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

В эллиптическом случае $4ac - b^2 > 0$ таких характеристик не существует. В предельном параболическом случае $4ac - b^2 = 0$ оба характеристических семейства сливаются в одно единственное семейство.

Из сказанного в п. 1 относительно значения характеристических полосок следует, что только характеристические полоски могут быть *полосками ветвления* интегральной поверхности, т. е. такими полосками, вдоль которых касаются две различные интегральные поверхности, так что от одной интегральной поверхности можно перейти на другую интегральную поверхность, переходя через полоску ветвления, сохраняя при этом непрерывность функции u и ее первых производных. Так как вдоль нехарактеристической интегральной полоски производные высших порядков также однозначно определены, то и все полоски ветвления высших порядков, вдоль которых имеет место соприкосновение высшего порядка различных интегральных поверхностей, должны быть обязательно характеристическими полосками. Отсюда следует, что если некоторая интегральная поверхность данного дифференциального уравнения является интегральной поверхностью эллиптического типа, то на такой поверхности не существует полосок ветвления. Если допустить, сверх того, что дифференциальное уравнение аналитично, в силу чего вдоль всякой полоски интегральной поверхности все производные однозначно определены, то можно ожидать, что такое эллиптическое решение дифференциального уравнения должно быть *аналитической функцией*. Доказательство будет нами дано в дополнениях. Здесь мы только отметим, что при наличии полосок ветвления должны существовать неаналитические решения, ибо аналитический характер решения исключает многозначность продолжения интегральной поверхности через интегральную полоску.

В заключение рассмотрим еще характеристическое условие на интегральной поверхности J в форме

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

Это условие имеет вид дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Однако, так как условие (6) должно

иметь место только вдоль линии $\varphi=0$, так что оно не является тождеством относительно x и y, то по существу уравнение (6) не является уравнением в частных производных; если рассматривать y как неявную функцию от x, определенную уравнением $\varphi=0$, и заменить в уравнении (6) отношение частных производных $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ равным ему отношением $-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, то уравнение (6) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение (5). Но если мы будем рассматривать уравнение (6) как уравнение в частных производных относительно φ и если $\varphi(x, y)$ какое-нибудь его решение, то не только кривая $\varphi(x, y)=0$ является характеристикой поверхности J, но и все семейство функций $\varphi(x, y)=c=\text{const}$. является семейством характеристик поверхности J, зависящим от одного параметра; обратно, если уравнение $\varphi(x, y)=\text{const}$. является уравнением такого семейства характеристик, то функция φ должна удовлетворять уравнению (6) как уравнению в частных производных, т. е. тождественно относительно x и y.

Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение $u_{xy}=0$. Характеристическое условие имеет вид $\varphi_x\varphi_y=0$, если $\varphi=0$. Оно выполняется при $\varphi=(x-a)(y-b)$ и при любых a и b. Другими словами, пара прямых $x=a$ и $y=b$ является характеристической линией на плоскости xy.

Однако, для функции $\varphi=(x-a)(y-b)$ уравнение $\varphi_x\varphi_y=0$ как тождество относительно x и y не имеет места.

Вместо этого уравнения функция φ удовлетворяет уравнению $\varphi_x\varphi_y=\varphi$. Тождественно уравнению $\varphi_x\varphi_y=0$ удовлетворяют функции $\varphi=x$ и $\varphi=y$, которые дают в качестве двух семейств характеристических кривых семейства $x=c$ и $y=c$.

3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны. В связи с предыдущим мы можем рассматривать характеристики как линии, вдоль которых возможно разветвление интегральной поверхности. В соответствии с таким определением мы можем притти к понятию характеристики, ставя себе следующую задачу: пусть $u=u(x, y)$ — некоторая интегральная поверхность J уравнения (2); проведем на поверхности J кривую C и соответствующую полоску C_1 первого порядка, задавая уравнение $\varphi(x, y)=0$ проекции C на плоскость x, y, и пусть линия C отделяет область $\varphi>0$ от области $\varphi<0$. Требуется узнать, *при каком условии вторые или высшие производные функции u могут иметь вдоль линии C разрывы первого рода.* Мы предполагаем при этом, что внутренние производные вдоль линии $\varphi=0$ остаются непрерывными в следующем смысле: если через $\lambda=\psi$ и $\eta=\varphi$ мы обозначим, как раньше, координаты на J в окрестности C, причем λ — параметр на C, то мы предполагаем, что все производные u, p, q по λ остаются непрерывными при переходе через C.

Обозначим через (f) скачок функции f при переходе через C в направлении возрастания φ. По условию u_x и u_y непрерывны, равно как и их внутренние производные, задаваемые выражениями (ср. гл. II, дополнения, § 1) $u_{xx}\varphi_y - u_{xy}\varphi_x$ и $u_{xy}\varphi_y - u_{yy}\varphi_x$. Отсюда следует, что скачки вторых производных должны удовлетворять двум уравнениям

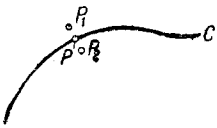
$$(u_{xx})\ \varphi_y - (u_{xy})\ \varphi_x = 0,$$
$$(u_{xy})\ \varphi_y - (u_{yy})\ \varphi_x = 0.$$

Таким образом, мы получаем:

$$(u_{xx}) = \varkappa\varphi_x^2; \qquad (u_{xy}) = \varkappa\varphi_x\varphi_y; \qquad (u_{yy}) = \varkappa\varphi_y^2,$$

где $\varkappa$ — некоторый коэффициент пропорциональности. Заметим, между прочим, что $\varkappa = (u_{\varphi\varphi})$, как в этом легко убедиться.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (2) в двух точках P_1 и P_2, лежащих по ту и другую сторону от кривой C, вычтем эти два уравнения одно из другого и заставим точки P_1 и P_2 неограниченно приближаться к некоторой точке P кривой C.



Черт. 28.

Остающиеся в пределе непрерывными члены дифференциального уравнения взаимно уничтожаются, так что остается соотношение

$$a(u_{xx}) + b\ (u_{xy}) + c\ (u_{yy}) = 0.$$

Заменяя скачки (u_{xx}), (u_{xy}), (u_{yy}) полученными выше выражениями и сокращая на $\varkappa$, мы приходим к уравнению

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0,$$

т. е. к характеристическому условию. Итак, разрывы рассматриваемого вида могут, действительно, иметь место только вдоль характеристик.

Чтобы физически истолковать эту особенность характеристик, положим $y = t$ и будем рассматривать функцию $u\ (x, t)$ как «волну», т. е. как значение некоторой величины u, изменяющейся в одномерном пространстве x с течением времени t. Если эта волна имеет разрыв вдоль характеристики $\varphi\ (x,\ t) = 0$, то представим себе уравнение $\varphi = 0$ разрешенным в виде $x = x\ (t)$, так что $x_t = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}$. Мы можем тогда линию разрыва $\varphi = 0$ плоскости $(x,\ t)$ рассматривать как точку разрыва x, перемещающуюся вдоль оси x с течением времени t со скоростью x_t. В частности, если по одну сторону от кривой $\varphi = 0$ всюду $u = 0$, тогда как по другую сторону u отлично от нуля, то движущаяся точка разрыва x является *фронтом распространяющейся волны* u.

Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ мы должны рассматривать как меру этого распространяющегося разрыва.

В отношении этого коэффициента пропорциональности $\varkappa$ имеет место следующий замечательный факт:

Коэффициент $\varkappa$ *удовлетворяет вдоль характеристики* C *обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению*

$$\alpha\varkappa_\lambda + \beta\varkappa = 0,$$

причем α *и* β *задаются следующими выражениями:*

$$\alpha = 2Q(\varphi, \psi), \quad \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \varphi).$$

В самом деле, продифференцируем по φ дифференциальное уравнение (2), приведя его предварительно к виду (7), введя переменные φ и ψ, и напишем полученное уравнение для точек P_1 и P_2, как раньше. Вычитая эти уравнения одно из другого и неограниченно приближая точки P_1 и P_2 к точке P, мы получим, переходя к пределу и учитывая, что $Q(\varphi, \varphi) = 0$ вдоль кривой $\varphi = 0$, искомое соотношение $\alpha\varkappa_\lambda + \beta\varkappa = 0$.

Из того, что величина $\varkappa$ удовлетворяет вдоль C однородному линейному дифференциальному уравнению, следует, что мера разрыва $\varkappa$ либо тождественно равна нулю, либо нигде не обращается в нуль вдоль всей рассматриваемой части оси x[1]).

Добавим еще следующее: мы рассматривали исключительно разрывы вторых или высших производных. Что же касается разрывов производных первого порядка, то таковые могут иметь место и вдоль обыкновенных кривых C. В самом деле, мы можем кривую C двумя различными способами дополнить до обыкновенной полоски C_1 и затем решить соответствующую задачу Коши, как это будет показано во второй части этой главы. Соединяя одно из этих решений, взятое по одну сторону от кривой $\varphi = 0$, со вторым решением, взятым по другую сторону от этой кривой, мы получим решение u, первые производные которого разрывны вдоль C. Однако, мы увидим впоследствии, что и в отношении таких разрывов первого порядка характеристики также играют особую роль и существенно отличаются от обыкновенных кривых в том частном случае, когда коэффициенты a, b, c и d, кроме x и y, содержат только функцию u и не содержат производных p и q (ср. соответствующие общие рассмотрения в гл. VI, § 2 и дополнения, § 4). Здесь же мы только заметим, что в этом случае разрыв первого порядка $\varkappa = (u_\varphi)$ также удовлетворяет соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\varkappa_\lambda Q(\varphi, \psi) + \varkappa L[\varphi] = 0$$

вдоль кривой C, что получается совершенно аналогично предыдущему.

§ 2. Характеристики дифференциальных уравнений общего вида

1. Общее дифференциальное уравнение второго порядка. Наши результаты очень легко распространяются на общее дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Пока $Q(\varphi, \psi) \neq 0$. (*Прим. перев.*)