Коэффициент $\varkappa$ *удовлетворяет вдоль характеристики* C *обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению*

$$\alpha\varkappa_\lambda + \beta\varkappa = 0,$$

причем α *и* β *задаются следующими выражениями:*

$$\alpha = 2Q(\varphi, \psi), \quad \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \varphi).$$

В самом деле, продифференцируем по φ дифференциальное уравнение (2), приведя его предварительно к виду (7), введя переменные φ и ψ, и напишем полученное уравнение для точек P_1 и P_2, как раньше. Вычитая эти уравнения одно из другого и неограниченно приближая точки P_1 и P_2 к точке P, мы получим, переходя к пределу и учитывая, что $Q(\varphi, \varphi) = 0$ вдоль кривой $\varphi = 0$, искомое соотношение $\alpha\varkappa_\lambda + \beta\varkappa = 0$.

Из того, что величина $\varkappa$ удовлетворяет вдоль C однородному линейному дифференциальному уравнению, следует, что мера разрыва $\varkappa$ либо тождественно равна нулю, либо нигде не обращается в нуль вдоль всей рассматриваемой части оси x[1]).

Добавим еще следующее: мы рассматривали исключительно разрывы вторых или высших производных. Что же касается разрывов производных первого порядка, то таковые могут иметь место и вдоль обыкновенных кривых C. В самом деле, мы можем кривую C двумя различными способами дополнить до обыкновенной полоски C_1 и затем решить соответствующую задачу Коши, как это будет показано во второй части этой главы. Соединяя одно из этих решений, взятое по одну сторону от кривой $\varphi = 0$, со вторым решением, взятым по другую сторону от этой кривой, мы получим решение u, первые производные которого разрывны вдоль C. Однако, мы увидим впоследствии, что и в отношении таких разрывов первого порядка характеристики также играют особую роль и существенно отличаются от обыкновенных кривых в том частном случае, когда коэффициенты a, b, c и d, кроме x и y, содержат только функцию u и не содержат производных p и q (ср. соответствующие общие рассмотрения в гл. VI, § 2 и дополнения, § 4). Здесь же мы только заметим, что в этом случае разрыв первого порядка $\varkappa = (u_\varphi)$ также удовлетворяет соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\varkappa_\lambda Q(\varphi, \psi) + \varkappa L[\varphi] = 0$$

вдоль кривой C, что получается совершенно аналогично предыдущему.

§ 2. Характеристики дифференциальных уравнений общего вида

1. Общее дифференциальное уравнение второго порядка. Наши результаты очень легко распространяются на общее дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Пока $Q(\varphi, \psi) \neq 0$. (*Прим. перев.*)

Рассмотрим снова кривую C в пространстве x, y, u и дополним ее до полоски C_1 первого порядка и соответственно до полоски C_2 второго порядка. Мы предполагаем заранее, что C_2 является интегральной полоской, т. е. что соответствующие величины x, y, u, p, q, r, s, t удовлетворяют уравнению $F=0$.

Обозначим через λ параметр вдоль кривой C, проекция которой C_0 на плоскость x, y задается уравнением $\varphi(x, y)=0$. λ и φ мы рассматриваем как новые координаты в окрестности кривой C_0. Мы можем теперь получить характеристическое условие, определяющее характеристические полоски, следующим путем.

При введении новых координат λ и φ функция $u(x, y)$ переходит в функцию $u(\lambda, \varphi)$ и пусть

$$F(x, y, p, q, r, s, t)=G(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}, u_{\varphi\varphi}).$$

Назовем начальную полоску C_2 *характеристической*, если вдоль этой полоски данное дифференциальное уравнение не определяет однозначно всех производных высших порядков и, в частности, производных третьего порядка. Если дифференциальное уравнение $G=0$ может быть вдоль C_2 разрешено относительно второй производной $u_{\varphi\varphi}$, выводящей за пределы C_2, т. е. если дифференциальное уравнение $G=0$ может быть вдоль C_2 приведено к виду

$$u_{\varphi\varphi}=g(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}),$$

то мы получим, дифференцируя по φ, значение третьей производной $u_{\varphi\varphi\varphi}$, выводящей за пределы C_2, а вместе с ней, как нетрудно видеть, и все остальные производные третьего порядка вдоль полоски C_2. Отсюда следует, что для того, чтобы сделать невозможным такое однозначное определение вдоль полоски всех производных третьего порядка, необходимо потребовать, чтобы уравнение $G=0$ не было разрешимым относительно $u_{\varphi\varphi}$ вдоль полоски C_2, т. е. вдоль этой полоски должно выполняться условие

$$G_{u_{\varphi\varphi}}=0.$$

Легко убедиться, что это условие можно представить в виде

$$F_r\varphi_x^2+F_s\varphi_x\varphi_y+F_t\varphi_y^2=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) мы называем *характеристическим условием*. Интегральные полоски второго порядка, удовлетворяющие характеристическому условию, мы называем *характеристическими полосками*.

Характеристическое условие (2) может быть получено также несколько иным путем, более сходным с рассмотрениями предыдущего параграфа (§ 1, п. 1). Чтобы вычислить производные третьего порядка r_x, s_x, t_x вдоль полоски C_2, продифференцируем дифференциальное уравнение $F=0$ по x. Положим для краткости

$$[F]_x=F_pr+F_qs+F_up+F_x.$$

Мы получим тогда, применяя условие полоски к функциям r и s, систему трех линейных уравнений

$$F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x = -[F]_x,$$
$$\dot{x} r_x + \dot{y} s_x = \dot{r},$$
$$\dot{x} s_x + \dot{y} t_x = \dot{s}.$$

Повторяя в отношении этой системы уравнений рассуждения, изложенные в § 1, мы приходим к следующему результату:

Если детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x}\dot{y} + F_t \dot{x}^2$$

отличен от нуля, то данная интегральная полоска является обыкновенной интегральной полоской, вдоль которой все производные высших порядков однозначно определены. Если же детерминант Δ обращается в нуль вдоль полоски, то полоска называется характеристической. Правые части предыдущей системы линейных уравнений, равно как и правые части соответствующей системы, получающейся при дифференцировании уравнения (1) *по y, должны в этом случае удовлетворять дальнейшим условиям, налагающим дополнительные ограничения на величины x, y, u, p, q, r, s, t, задаваемые вдоль полоски C_2.* Характеристическое условие

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x}\dot{y} + F_t \dot{x}^2 = 0 \tag{2a}$$

с точностью до множителя тождественно с условием (2), если проекция полоски задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Характеристическое условие может быть выполнено в какой-нибудь точке полоски только в том случае, если в этой точке имеет место неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

Так же, как и для квазилинейных дифференциальных уравнений, мы вводим дальше следующие определения: если в точке (x, y, u, p, q, r, s, t) восьмимерного пространства имеет место строгое неравенство

$$4F_r F_t - F_s^2 < 0,$$

то мы говорим, что дифференциальное выражение F *гиперболично* в этой точке. Если условие (3) выполняется во всех точках полоски второго порядка или поверхности $u = u(x, y)$ при $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$, то мы говорим, что дифференциальное выражение F *гиперболично вдоль полоски или поверхности.*

Так же, как и в частном случае квазилинейного уравнения, характеристическое условие на интегральной поверхности можно рассматривать как уравнение в частных производных относительно φ только

в том случае, когда оно выполняется не только вдоль одной кривой $\varphi = 0$, но и вдоль всего семейства кривых $\varphi = \text{const}$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков. В случае дифференциального уравнения n-го порядка с неизвестной функцией $u(x, y)$ введем для краткости обозначения

$$p_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Мы можем тогда данное дифференциальное уравнение n-го порядка записать в форме

$$F(x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n) = 0, \tag{4}$$

не выделяя в явном виде производных порядка ниже n. К понятию характеристики и характеристическому условию мы приходим следующим образом.

Допустим, что $u = u(x, y)$ — некоторая интегральная поверхность уравнения $F = 0$ и пусть уравнением $\varphi(x, y) = 0$ задается кривая C на этой поверхности, отделяющая область $\varphi > 0$ от области $\varphi < 0$. Кривой C соответствует на поверхности полоска C_n n-го порядка. Пусть λ — параметр на полоске C_n.

Введем снова на интегральной поверхности $u(x, y)$ в качестве координат параметр λ и переменную φ, выводящую за пределы C. Будем вместо функции $u(x, y)$ рассматривать функцию $u(\varphi, \lambda)$ и положим $\omega = u_{\varphi \ldots \varphi} = \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}$, так что ω означает выводящую за пределы полоски C_n n-ую производную функции u. Тогда

$$p_\nu = \omega \varphi_x^\nu \varphi_y^{n-\nu} + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие n-ой внешней производной ω. Заданное дифференциальное уравнение (4) мы будем теперь рассматривать как дифференциальное уравнение относительно $u(\varphi, \lambda)$. В том случае, когда мы можем это дифференциальное уравнение представить вдоль C в форме

$$\omega = f(\lambda, \varphi, u, \ldots),$$

причем правая часть не содержит в явном виде ω, то дифференцированием по φ однозначно определяется $n+1$-ая производная ω_φ, которая не задается полоской C_n самой по себе и является внешней производной относительно этой полоски. Точно так же определяются однозначно все внутренние производные $n+1$-го порядка функции u.

Для того, чтобы такое однозначное определение $n+1$-ых производных было невозможным или же, как мы условимся выражаться, для того, чтобы полоска C_n была *характеристической* полоской, необходимо, чтобы вдоль полоски C_n выполнялось тождественно относительно λ условие $F_\omega = 0$. Возвращаясь к первоначальным переменным, мы получим, что это условие принимает вид

$$F_{p_n} \varphi_x^n + F_{p_{n-1}} \varphi_x^{n-1} \varphi_y + \ldots + F_{p_0} \varphi_y^n = 0. \tag{5}$$

Мы называем уравнение (5) фундаментальным *характеристическим условием* и говорим, что полоска с проекцией $\varphi=0$ называется *характеристической*, если, во-первых, вдоль этой полоски выполняется условие (5) и если, во-вторых, она является интегральной полоской дифференциального уравнения.

Подчеркнем следующее: это определение свободно от предположения, что полоска лежит на заранее заданной интегральной поверхности. Определяя таким образом характеристическую полоску, мы можем оставить открытым вопрос о существовании интегральной поверхности, содержащей эту полоску, вопрос, на который мы дадим положительный ответ только в § 8.

Вернемся к рассмотрению характеристической полоски на заданной интегральной поверхности. На интегральной поверхности J, заданной уравнением $u=u(x, y)$, мы должны в левую часть уравнения (5) подставить данные значения функции $u(x, y)$ и ее частных производных, и тогда уравнение (5) должно выполняться при дополнительном условии $\varphi(x, y)=0$, не являясь, таким образом, уравнением в частных производных относительно φ.

Если мы запишем уравнение кривой $\varphi=0$ в форме $y=y(x)$, то вдоль этой кривой $y'=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, и характеристическое условие принимает вид

$$F_{p_n}y'^n-F_{p_{n-1}}y'^{n-1}+\ldots=0, \tag{6}$$

что нам дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее семейство характеристик поверхности J. Всякое решение этого дифференциального уравнения дает нам характеристику поверхности J. Если же мы будем рассматривать характеристическое условие (5) как уравнение в частных производных относительно функции $\varphi(x, y)$ от двух независимых переменных x и y, то каждое решение этого уравнения дает нам не одну характеристическую кривую C, а целое семейство $\varphi(x, y)=c$ характеристик на поверхности J, зависящее от одного параметра c.

Естественно ожидать, что число вещественных корней алгебраического уравнения

$$F_{p_n}\tau^n-F_{p_{n-1}}\tau^{n-1}+\ldots+(-1)^nF_{p_0}=0 \tag{7}$$

с неизвестным τ существенным образом характеризует тип дифференциального уравнения в соответствующей окрестности рассматриваемой интегральной полоски. Если все n корней этого алгебраического уравнения вещественны и различны, то мы называем наше дифференциальное уравнение *вполне гиперболическим* или просто *гиперболическим* в данной точке пространства переменных $x, \ldots, p_n$ и соответственно вдоль полоски C_n или на поверхности $u=u(x, y)$; если все корни комплексны и различны, то дифференциальное уравнение называется *эллиптическим*. В случае кратных корней мы называем дифференциальное уравнение *параболическим* или *парабо-*

лически вырождающимся. Возможны также различные промежуточные ступени; однако, нам не придется ими пользоваться в дальнейшем, и мы на этом не останавливаемся.

3. Системы дифференциальных уравнений. Точно таким же образом определяются характеристические условия и характеристики для *систем дифференциальных уравнений* (ср. гл. III, § 4).

Ограничимся рассмотрением систем первого порядка и заметим только, что результаты легко распространяются на системы высших порядков. Сначала рассмотрим квазилинейный случай на типичном примере двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} a_1u_x+b_1u_y+c_1v_x+d_1v_y+\ldots=0,\\ a_2u_x+b_2u_y+c_2v_x+d_2v_y+\ldots=0,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 являются заданными непрерывными функциями от x, y, u, v, а многоточия обозначают члены, не содержащие производных. Пусть пара функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ является некоторым решением этой системы дифференциальных уравнений. Уравнение $\varphi(x, y)=0$ определяет на этой системе решений некоторое одномерное многообразие C; введем на этом многообразии параметр λ. Вместо независимых переменных x, y будем так же, как и раньше, рассматривать φ и λ как новые независимые переменные. Наша система дифференциальных уравнений примет тогда следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_\varphi(a_1\varphi_x+b_1\varphi_y)+v_\varphi(c_1\varphi_x+d_1\varphi_y)+\ldots=0,\\ u_\varphi(a_2\varphi_x+b_2\varphi_y)+v_\varphi(c_2\varphi_x+d_2\varphi_y)+\ldots=0,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем многоточиями, как и раньше, обозначены члены, не содержащие внешних производных u_φ, v_φ.

Представим себе теперь, что для нашей системы решений задано начальное многообразие C; другими словами, допустим, что вдоль кривой $\varphi(x, y)=0$ плоскости x, y заданы значения u и v. Мы можем тогда с помощью данной системы дифференциальных уравнений определить однозначно вдоль C внешние производные первого порядка u_φ и v_φ, а также все следующие внешние производные высших порядков, если только не имеет места характеристическое условие

$$\begin{vmatrix} a_1\varphi_x+b_1\varphi_y & c_1\varphi_x+d_1\varphi_y\\ a_2\varphi_x+b_2\varphi_y & c_2\varphi_x+d_2\varphi_y\end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Все дальнейшие заключения полностью аналогичны нашим предыдущим рассмотрениям. Если задать кривую $\varphi(x, y)=0$ уравнением $y=y(x)$, то характеристическое условие принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и второй степени относительно y'. Рассматривая, далее, характеристическое условие как уравнение в частных производных относительно φ, мы получим, как и раньше, что каждому решению $\varphi(x, y)$ этого

уравнения в частных производных соответствует не одна, а целое семейство характеристик $\varphi = c$, зависящее от одного параметра c.

В линейном случае, когда коэффициенты $a_1 \ldots d_2$ не зависят от u и v, характеристики имеют неподвижные проекции на плоскости x, y. Принадлежность точки (x, y, u, v) к одному из трех типов: гиперболическому, эллиптическому или параболическому не зависит тогда от выбора частной системы решений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а является исключительно свойством самой системы дифференциальных уравнений, имеющим место в соответствующей области плоскости x, y. Совершенно аналогично дело обстоит и в общем случае системы n дифференциальных уравнений

$$F^{(\nu)}(x, y, u_1, \ldots, u_n, p_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (11)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

с n неизвестными функциями $u_1, u_2, \ldots, u_n$, где

$$p_\nu = \frac{\partial u_\nu}{\partial x}, \qquad q_\nu = \frac{\partial u_\nu}{\partial y}.$$

Характеристическое условие имеет вид

$$\left| F^{(\nu)}_{p_k} \varphi_x + F^{(\nu)}_{q_k} \varphi_y \right| = 0, \qquad (12)$$

причем левая часть обозначает детерминант, в котором элементом ν-ой строки и k-го столбца является выражение

$$F^{(\nu)}_{p_k} \varphi_x + F^{(\nu)}_{q_k} \varphi_y.$$

Это характеристическое условие следует понимать в том смысле, что уравнение $\varphi(x, y) = 0$ определяет на заданной системе решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$ характеристику, если выполняется характеристическое условие (12) при условии $\varphi = 0$. Если же характеристическое условие выполняется как уравнение в частных производных, то функции $\varphi(x, y)$ соответствует семейство характеристик $\varphi(x, y) = c$, зависящее от одного параметра c.

4. Инвариантность характеристик относительно любого точечного преобразования. *Характеристики уравнений в частных производных инвариантны относительно любых точечных преобразований.* Это значит, что при любом точечном преобразовании характеристики переходят в соответствующие характеристики преобразованного дифференциального уравнения. Для доказательства достаточно рассмотреть простейший случай одного дифференциального уравнения второго порядка $F(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0$, переходящего при преобразовании к новым независимым переменным ξ, η в дифференциальное уравнение $G(u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, \ldots) = 0$. В инвариантности характеристик мы непосредственно убеждаемся, либо исходя из самого определения характеристик, по существу независимого от выбора системы назависимых переменных, либо вычислительным путем, получая с помощью простых преобразований тождество

$$F_{u_{xx}} \varphi_x^2 + F_{u_{xy}} \varphi_x \varphi_y + F_{u_{yy}} \varphi_y^2 = G_{u_{\xi\xi}} \varphi_\xi^2 + G_{u_{\xi\eta}} \varphi_\xi \varphi_\eta + G_{u_{\eta\eta}} \varphi_\eta^2.$$

5. Примеры из гидродинамики. Дифференциальные уравнения движения *сжимаемой жидкости* дают очень поучительный пример применения понятия характеристик. Рассмотрим здесь только случай стационарного потока жидкости в двухмерном пространстве x, y. (Случай нестационарного потока мы подробно исследуем геометрически в гл. VI, § 3, п. 2.) Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ означают не зависящие от времени компоненты вектора скорости плоского потока жидкости, плотность которой обозначим через $\rho(x, y)$. Пусть, далее, $p(\rho)$ — заданная функция, выражающая давление p через плотность ρ, причем $p'(\rho) = a^2$ есть «скорость звука». Тогда подлежащие определению три функции u, v и ρ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \rho u u_x + \rho v u_y + p' \rho_x &= 0, \\ \rho u v_x + \rho v v_y + p' \rho_y &= 0, \\ \rho (u_x + v_y) + u \rho_x + v \rho_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Эта система является квазилинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Согласно общему правилу, данному в п. 3, мы получим *характеристические многообразия* $\varphi(x, y) = 0$ с помощью дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} \rho(u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив этот детерминант, мы получим:

$$(u\varphi_x + v\varphi_y)\,[(u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] = 0. \tag{14}$$

Таким образом, одно из семейств характеристик задается условием

$$u\varphi_x + v\varphi_y = 0. \tag{15}$$

Соответствующие характеристические кривые $\varphi = \text{const}$. являются *линиями тока*, т. е. линиями, производимыми вектором скорости.

Кроме них, мы получаем далее в качестве характеристик линии $\varphi = \text{const}$., удовлетворяющие уравнению

$$\begin{aligned} (u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \varphi_x^2(u^2 - p') + \varphi_y^2(v^2 - p') + \\ + 2\varphi_x\varphi_y uv = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение (16) дает систему двух семейств кривых, зависящих каждое от одного параметра, только в *гиперболическом случае*, имеющем место при выполнении условия

$$p' < u^2 + v^2, \tag{17}$$

т. е. когда *скорость потока больше скорости звука.*

Приведем простой пример, который очень легко можно иллюстрировать экспериментально. Зададим поток в плоской жидкой или

газообразной среде в первом приближении, допуская, что скорость потока очень мало отличается от постоянной скорости U, параллельной оси x, и что плотность ρ точно так же очень мало отличается от постоянной плотности P, так что

$$u = U + \omega, \quad v = \lambda, \quad \rho = P + \sigma,$$

где ω, λ, σ — малые величины.

Далее, мы допускаем, что движение жидкости можно с достаточной степенью точности представить приближенной системой дифференциальных уравнений, получающейся, если пренебречь произведениями и высшими степенями величин ω, λ, σ и их производных. Эта приближенная система дифференциальных уравнений, которой мы заменяем систему (13), является линейной системой и имеет следующий вид:

$$PU\omega_x + a^2\sigma_x = 0,$$
$$PU\lambda_x + a^2\sigma_y = 0,$$
$$U\sigma_x + P(\omega_x + \lambda_y) = 0.$$

Отсюда мы получаем непосредственно:

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx},$$

так что

$$\omega_y - \lambda_x = f(y).$$

Последнее уравнение выражает так называемую «*теорему вихрей*».

Исключая ω_x и полагая $\varkappa = \frac{U}{a}$, мы получаем для λ и σ систему уравнений:

$$\varkappa P\lambda_x + a\sigma_y = 0,$$
$$(1-\varkappa^2)\, a\sigma_x - \varkappa P\lambda_y = 0,$$

откуда следует:

$$(1-\varkappa^2)\,\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = 0,$$
$$(1-\varkappa^2)\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0.$$

Эти последние дифференциальные уравнения непосредственно показывают, что гиперболический случай имеет место, если $\varkappa > 1$, т. е. если $U > a$. Характеристиками тогда служат прямые, наклоненные к оси x под углом α (так называемым *углом Маха*), определяемым условием $|\sin\alpha| = \frac{1}{\varkappa} = \frac{a}{U}$.

Приведенный случай легко реализовать физически, рассматривая движение в жидкой или газообразной среде, происходящее в полуплоскости параллельно стенке с основной скоростью U.

Пусть на стенке вдоль отрезка AB имеется небольшая шероховатость, дающая небольшую вертикальную компоненту λ скорости потока. Если допустить, что в этом случае движение выражается нашей приближенной системой дифференциальных уравнений, то имеющаяся на стенке шероховатость должна распространяться внутри

жидкости вдоль двух полос, ограниченных параллелями, выходящими из концов отрезка AB стенки и наклоненными к стенке под углом α. Это явление действительно можно наблюдать с помощью надлежащим образом поставленного эксперимента.

§ 3. Единственность и область зависимости

1. Основные понятия, связанные с волновыми процессами. Значение характеристик непосредственно обнаруживается во всех исследованиях, относящихся к волновым процессам, задаваемым дифференциальными уравнениями гиперболического типа, причем решение u дифференциального уравнения обозначает распространяющуюся в пространстве величину. При исследовании такого рода процессов рассматривается задача Коши (ср. гл. III, § 7), причем возникает вопрос не только о построении решений, что будет нами рассмотрено в §§ 5, 6, 7 и 8, но, сверх того, и вопрос о единственности решения при данных начальных условиях, а также об области зависимости и области влияния. Если независимыми переменными являются пространственная координата x и время t, а начальные условия задаются при $t=0$, то мы определяем понятия области зависимости и области влияния следующим образом.

Областью *зависимости* точки P с координатами x, t мы называем то множество точек на начальной прямой $t=0$, от которых исключительно зависит значение решения u в точке P, в том смысле, что изменение начальных данных вне области зависимости не влияет на значение $u(P)$. В соответствии с этим мы называем *областью* (*сферой*) *влияния* или *областью действия* отрезка L начальной линии $t=0$ ту область полуплоскости $t>0$, вне которой значения u не меняются при изменении начальных данных только вдоль отрезка L. Таким образом, область влияния отрезка L состоит из всех тех точек плоскости x, t, область зависимости которых имеет с отрезком L общие точки.

Наконец, *областью распространения* отрезка L начальной линии мы называем ту область плоскости, в которой решение дифференциального уравнения определяется начальными данными вдоль отрезка L. Очевидно, область, дополнительная к области распространения отрезка L, совпадает с областью влияния дополнительного к L участка начальной линии.

Отсюда следует, что поскольку определения всех этих понятий, теснейшим образом связанных с самым существом волновых процессов, допускают возможность изменения значений функций только в одной части их области определения при сохранении значений функций в остальной части, предположение аналитического характера функций заведомо исключается. В самом деле, аналитические функции во всей своей области существования полностью определены заданием их значений в любой сколь угодно малой области. В силу этого мы не имеем права при построении решений ссылаться на общую теорему