жидкости вдоль двух полос, ограниченных параллелями, выходящими из концов отрезка AB стенки и наклоненными к стенке под углом α. Это явление действительно можно наблюдать с помощью надлежащим образом поставленного эксперимента.

§ 3. Единственность и область зависимости

1. Основные понятия, связанные с волновыми процессами. Значение характеристик непосредственно обнаруживается во всех исследованиях, относящихся к волновым процессам, задаваемым дифференциальными уравнениями гиперболического типа, причем решение u дифференциального уравнения обозначает распространяющуюся в пространстве величину. При исследовании такого рода процессов рассматривается задача Коши (ср. гл. III, § 7), причем возникает вопрос не только о построении решений, что будет нами рассмотрено в §§ 5, 6, 7 и 8, но, сверх того, и вопрос о единственности решения при данных начальных условиях, а также об области зависимости и области влияния. Если независимыми переменными являются пространственная координата x и время t, а начальные условия задаются при $t=0$, то мы определяем понятия области зависимости и области влияния следующим образом.

Областью *зависимости* точки P с координатами x, t мы называем то множество точек на начальной прямой $t=0$, от которых исключительно зависит значение решения u в точке P, в том смысле, что изменение начальных данных вне области зависимости не влияет на значение $u(P)$. В соответствии с этим мы называем *областью* (*сферой*) *влияния* или *областью действия* отрезка L начальной линии $t=0$ ту область полуплоскости $t>0$, вне которой значения u не меняются при изменении начальных данных только вдоль отрезка L. Таким образом, область влияния отрезка L состоит из всех тех точек плоскости x, t, область зависимости которых имеет с отрезком L общие точки.

Наконец, *областью распространения* отрезка L начальной линии мы называем ту область плоскости, в которой решение дифференциального уравнения определяется начальными данными вдоль отрезка L. Очевидно, область, дополнительная к области распространения отрезка L, совпадает с областью влияния дополнительного к L участка начальной линии.

Отсюда следует, что поскольку определения всех этих понятий, теснейшим образом связанных с самым существом волновых процессов, допускают возможность изменения значений функций только в одной части их области определения при сохранении значений функций в остальной части, предположение аналитического характера функций заведомо исключается. В самом деле, аналитические функции во всей своей области существования полностью определены заданием их значений в любой сколь угодно малой области. В силу этого мы не имеем права при построении решений ссылаться на общую теорему

существовавания гл. I, § 7, в которой предполагалось, что как само дифференциальное уравнение, так и начальные условия являются аналитическими.

Мы увидим в этом параграфе, что для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка область зависимости точки P получается путем проведения через точку P обеих характеристик на плоскости x, t до пересечения с начальной прямой $t=0$; основание L построенной таким путем треугольной области и будет искомой областью зависимости, как мы в этом убедились раньше на простейшем примере дифференциального уравнения $u_{tt}-u_{xx}=0$, разобранном нами в гл. III, § 7.

Эта треугольная область является в то же время и областью распространения ее основания L, ибо она содержит все точки плоскости, область зависимости которых лежит внутри L. Остальные две характеристики, выходящие из конечных точек отрезка L («внешние» характеристики) ограничивают область влияния участка L, ибо эта область состоит из всех тех точек, область зависимости которых имеет с L общие точки.

Чтобы доказать, что основание L нашего треугольника является областью зависимости его вершины P, достаточно показать, что решение однородного дифференциального уравнения $L[u]=0$ обращается в точке P в нуль, если начальные данные вдоль L равны нулю.

В самом деле, отсюда следует, что если начальные данные двух решений дифференциального уравнения $L(u)=f$ отличаются друг от друга только вне отрезка L, то разность этих решений является решением однородного дифференциального уравнения, имеющим вдоль L нулевые начальные данные, так что эта разность должна равняться нулю в точке P.

Перечисленным понятиям и соответствующим теоремам, а также построению решения задачи Коши мы посвящаем настоящую главу. Соответствующие факты для большего числа переменных [1]) мы разберем в гл. VI.

2. Доказательства единственности. В настоящем параграфе мы доказываем с изложенной выше общей точки зрения *единственность решений* задач Коши. Доказательства такого рода опираются на рассмотрение *«интегралов энергии»* определенного вида, которые мы каждый раз сопоставляем дифференциальному уравнению. С простейшим примером такого интеграла мы уже встретились в гл. III, § 6 при доказательстве единственности в случае параболического уравнения теплопроводности. Лежащая в основе этого доказательства

---

[1]) Тогда как в случае двух независимых переменных x и t обе переменные с математической точки зрения играют в дифференциальном уравнении одинаковую роль, в случае большего числа переменных, как мы убедимся в гл. VI, поверхности «пространственного» типа с «пространственными» координатами принципиально отличаются от поверхностей с координатами «временного» типа.

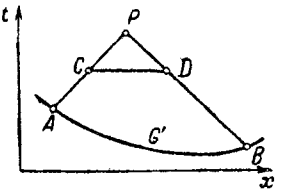
идея требует в гиперболическом случае дальнейшего углубления, состоящего в том, что в качестве областей интегрирования в этом случае берутся области, ограниченные характеристиками [1]). Мы здесь ограничимся рассмотрением характерного примера и сошлемся на рассмотрения общего характера, которые нами будут проведены для случая многих переменных в следующей главе, § 4.

Теорема единственности в случае линейных задач формулируется так: *если вдоль куска L начальной кривой заданы нулевые начальные значения, то соответствующее решение однородного дифференциального уравнения должно тождественно равняться нулю во всей области распространения куска L, и никакого другого решения однородного уравнения в этой области не существует.*

Разъясним идею, лежащую в основе доказательства, на тривиальном примере уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим треугольную область G плоскости x, t, ограниченную начальной кривой AB и двумя характеристиками PA и PB, причем мы предполагаем, что никакая характеристика не пересекает дуги AB более, чем в одной точке (черт. 29).



Черт. 29.

Мы должны доказать следующее: Если вдоль дуги AB обращаются в нуль функция u и ее частные производные u_x и u_t и если u удовлетворяет уравнению (1), то u обращается в нуль тождественно во всем треугольнике G. Для доказательства отсечем от нашего треугольника его вершину P с помощью горизонтальной линии CD и обозначим остающуюся область через G'. Выражение

$$-2u_t(u_{xx} - u_{tt}) = -2(u_x u_t)_x + (u_x^2)_t + (u_t^2)_t$$

представляет собой дивергенцию вектора плоскости x, t с компонентами $-2u_x u_t$ и $u_x^2 + u_t^2$.

Интегрируя это выражение по области G' и принимая во внимание дифференциальное уравнение и начальные условия, мы получим:

$$0 = \iint\limits_{G} [(u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x]\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{AB+BD+DC+CA} [(u_x^2 + u_t^2)\, t_\nu - 2(u_x u_t)\, x_\nu]\, ds,$$

где x_ν, t_ν означают направляющие косинусы нормали вдоль границы $AB + BD + DC + CA$, а s — длина дуги.

---

[1]) См. литературу, указанную в гл. VI, § 4, п. 1, примечание.

Вдоль характеристических боковых сторон CA и DB имеем $x_\nu^2 = t_\nu^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому соответствующая часть контурного интеграла легко может быть приведена к виду

$$\int\limits_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds$$

и, следовательно, наверное, неотрицательна.

Вдоль CD имеем $t_\nu = 1$, $x_\nu = 0$, $ds = dx$; вдоль AB подинтегральное выражение равно нулю. Отсюда непосредственно следует, что

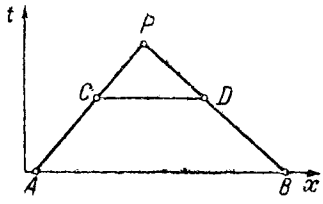
$$\int\limits_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\, dx = 0.$$

Таким образом, во всех точках отрезка CD выполняется условие $u_x^2 + u_t^2 = 0$. Итак, u_x и u_t обращаются в нуль, во всяком случае, в части области G, принадлежащей окрестности вершины P. Однако, любую точку области G мы можем рассматривать как вершину соответствующего меньшего треугольника, содержащегося внутри G. Поэтому u_x и u_t обращаются в нуль во всех точках области G, так что u — постоянно во всей области G, а так как u обращается в нуль вдоль начальной линии, то u тождественно равно нулю во всей области G, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогичным путем получается доказательство единственности в случае дифференциального уравнения вида

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_t - \beta u_x - \delta u = 0,$$

где α, β, δ — непрерывные функции x и t. Мы можем уравнение такого вида считать общим линейным дифференциальным уравнением второго порядка гиперболического типа, ибо путем преобразования координат всякое гиперболическое линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными всегда может быть приведено к этому виду. Ради краткости ограничимся тем случаем, когда начальные условия заданы вдоль прямой $t=0$; предлагаем читателю в виде задачи рассмотреть случай произвольной начальной кривой.



Черт. 30.

Наша теорема единственности формулируется в этом случае так: *Если u и u_t обращаются в нуль вдоль основания AB треугольника ABP с боковыми сторонами $x+t=\text{const.}$ и $x-t=\text{const.}$, то u обращается в нуль во всем треугольнике ABP.*

Предпошлем доказательству следующее вспомогательное замечание:

Для любой точки (x, t) области G имеем:

$$u(x, t) = \int_0^t u_\tau(x, \tau)\, d\tau.$$

Применяя неравенство Шварца, мы получаем отсюда

$$u^2(x, t) \leqslant t \int_0^t u_\tau^2(x, \tau)\, d\tau.$$

Пусть теперь CD есть горизонтальная линия $t = h$, отсекающая от первоначального треугольника G треугольник CDP. Обозначим через G_h трапецию $ABCD$. Тогда

$$\int_{CD} u^2 dx \leqslant h \iint_{G_h} u_\tau^2 dx\, d\tau \leqslant h \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\iint_{G_h} u^2 dx\, dt \leqslant h^2 \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt.$$

Определим теперь в качестве «интеграла живой силы» интеграл

$$E(h) = \int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\, dx$$

и проинтегрируем тождество

$$0 = 2u_t L[u] = (u_x^2 + u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x - 2\alpha u_t^2 - 2\beta u_x u_t - 2\delta u u_t$$

по области G_h.

Мы получим аналогично предыдущему

$$0 \leqslant \int_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu} (u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds + E(h) =$$

$$= 2 \iint_{(G_h)} (\alpha u_t^2 + \beta u_t u_x + \delta u u_t)\, dx\, dt = R,$$

так что

$$E(h) \leqslant R.$$

Чтобы оценить выражение R, заметим, что

$$2|u_x u_t| \leqslant u_t^2 + u_x^2, \quad 2|u u_t| \leqslant u_t^2 + u^2.$$

Обозначая через M верхнюю границу абсолютных значений непрерывных функций α, β, δ, мы получим:

$$R \leqslant 4M \iint_{(G_h)} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, dt.$$

В силу доказанного выше вспомогательного неравенства имеем далее:

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \iint\limits_{G_h} (u_t^2 + u_x^2)\, dx\, dt \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha,$$

где $C = 4M(1+k^2)$, а k — высота треугольника G. Обозначим через l некоторое значение, удовлетворяющее условию $l > h$. Мы получим тогда:

$$E(h) \leqslant C \int\limits_0^h E(\alpha)\, d\alpha \leqslant C \int\limits_0^l E(\alpha)\, d\alpha.$$

Интегрируя это неравенство по h от нуля до l, мы получим:

$$\int\limits_0^l E(h)\, dh \leqslant Cl \int\limits_0^l E(h)\, dh.$$

Если функция $E(h)$ отлична от нуля в какой-нибудь точке промежутка $0 \leqslant h \leqslant l$, то из предыдущего следовало бы, что

$$1 \leqslant Cl,$$

но мы можем заранее выбрать $l < \frac{1}{C}$, так что предыдущее неравенство является невозможным. Таким образом, доказано, что во всех точках промежутка $0 \leqslant h \leqslant l$ величина $E = 0$. Мы можем теперь последовательно принять прямые $t = l$, $t = 2l$, ... за начальные прямые и применить снова наш процесс. Через конечное число шагов мы исчерпаем треугольник G и убедимся, что E обращается в нуль во всем треугольнике G, так что u — константа, а, следовательно, равна нулю во всей области G, что и требовалось доказать.

Во второй части этой главы мы докажем теорему единственности для общего дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 4. Метод Римана

1. Формула Римана. Проблема единственности и области зависимости в случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа может быть разрешена в более явной форме с помощью следующего приема, принадлежащего Риману. Метод Римана сводится по существу к выводу интегральной формулы, выражающей в наглядной форме искомое решение задачи Коши через начальные данные и вместе с тем непосредственно доказывающей единственность решения. Существование решения при этом заранее предполагается.

В этом параграфе мы выведем формулу Римана.