

В силу доказанного выше вспомогательного неравенства имеем далее:

$$R \leqslant 4M(1+h^2) \iint_{G_h} (u_t^2 + u_x^2) dx dt \leqslant C \int_0^h E(\alpha) d\alpha,$$

где $C = 4M(1+k^2)$, а k — высота треугольника G . Обозначим через t некоторое значение, удовлетворяющее условию $t > h$. Мы получим тогда:

$$E(h) \leqslant C \int_0^h E(\alpha) d\alpha \leqslant C \int_0^t E(\alpha) d\alpha.$$

Интегрируя это неравенство по h от нуля до t , мы получим:

$$\int_0^t E(h) dh \leqslant Ct \int_0^t E(h) dh.$$

Если функция $E(h)$ отлична от нуля в какой-нибудь точке промежутка $0 \leqslant h \leqslant t$, то из предыдущего следовало бы, что

$$1 \leqslant Ct,$$

но мы можем заранее выбрать $t < \frac{1}{C}$, так что предыдущее неравенство является невозможным. Таким образом, доказано, что во всех точках промежутка $0 \leqslant h \leqslant t$ величина $E = 0$. Мы можем теперь последовательно принять прямые $t = l, t = 2l, \dots$ за начальные прямые и применить снова наш процесс. Через конечное число шагов мы исчерпаем треугольник G и убедимся, что E обращается в нуль во всем треугольнике G , так что u — константа, а, следовательно, равна нулю во всей области G , что и требовалось доказать.

Во второй части этой главы мы докажем теорему единственности для общего дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

§ 4. Метод Римана

1. Формула Римана. Проблема единственности и области зависимости в случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа может быть разрешена в более явной форме с помощью следующего приема, принадлежащего Риману. Метод Римана сводится по существу к выводу интегральной формулы, выражающей в наглядной форме искомое решение задачи Коши через начальные данные и вместе с тем непосредственно доказывающей единственность решения. Существование решения при этом заранее предполагается.

В этом параграфе мы выведем формулу Римана.

Вопрос о существовании решения будет нами полностью разрешен в следующем параграфе и притом для более общего нелинейного случая.

Мы предполагаем, что общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными приведено путем замены переменных к виду

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \quad (1)$$

что всегда возможно (ср. гл. III, § 1).

Прямые $x = \text{const.}$ и $y = \text{const.}$ образуют два семейства *характеристических проекций* на плоскость x, y . Коэффициенты a, b, c , а также заданная правая часть f являются по условию непрерывными в рассматриваемой области функциями от x и y , имеющими непрерывные производные первого порядка¹⁾. Уже раньше (т. I, гл. V, стр. 265) мы ввели понятие *сопряженного с $L[u]$ дифференциального выражения $M[v]$* , определив его с помощью требования, чтобы $vL[u] - uM[v]$ было выражением типа дивергенции, т. е. чтобы двойной интеграл от $vL[u]$, взятый по заданной области G , отличался от двойного интеграла от $uM[v]$, взятого по той же области, только контурным интегралом, зависящим исключительно от краевых значений рассматриваемых функций. Мы получаем для $M[v]$ следующее выражение:

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (2)$$

а, следовательно,

$$\begin{aligned} 2[vL[u] - uM[v]] &= (u_xv - uv_x + 2bu)v_y + \\ &\quad + (u_yv - uv_y + 2au)v_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя по области G с кусочно-гладким контуром, мы получаем отсюда формулу Грина

$$\begin{aligned} 2 \int \int_G \left\{ vL[u] - uM[v] \right\} dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma} [(u_yv - uv_y + 2au)v_x + (u_xv - uv_x + 2bu)v_y] ds, \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾ Уже в гл. I, стр. 15 мы рассмотрели простейший частный случай такого дифференциального уравнения, а именно уравнение:

$$u_{xy} = f(x, y),$$

где f — заданная функция, причем вдоль начальной кривой C были заданы начальные условия $u = p = q = 0$. Мы видели, что единственное согласно § 3 решение этой задачи Коши выражается интегралом

$$u(\xi, \eta) = \int \int f(x, y) dx dy.$$

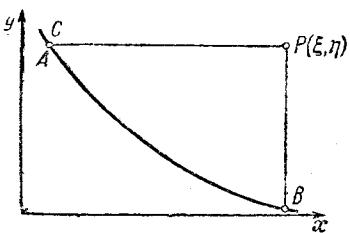
причем s означает длину дуги контура Γ , а x , и y , — направляющие косинусы внешней нормали в контуре Γ .

Задачу Коши для нашего дифференциального уравнения мы можем формулировать так: дана начальная кривая C , уравнение которой на всем протяжении этой линии может быть представлено как в виде $x = g(y)$, так и в виде $y = h(x)$. Это значит, что на этой кривой нет двух различных точек с одинаковой абсциссой x или одинаковой ординатой y . Кроме того, мы предполагаем, что касательная к линии C нигде не параллельна оси x или оси y . Пусть эта кривая задана в параметрической форме с помощью двух непрерывно дифференцируемых функций $x = x(\lambda)$ и $y = y(\lambda)$, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 \neq 0$. Зададим вдоль C начальные значения функции u и ее двух производных первого порядка $p = u_x$ и $q = u_y$ в качестве непрерывных функций параметра. Требуется найти решение дифференциального уравнения (1) в области, примыкающей с одной стороны к линии C , принимающей вдоль C заданные начальные значения.

Разумеется, что начальные значения u , p и q должны удовлетворять условию полоски

$$du = pdx + qdy.$$

Рассмотрим в заданной односторонней окрестности линии C точку P с координатами ξ и η и проведем через эту точку горизонтальную линию AP , вдоль которой $y = \eta$, и вертикальную линию BP , вдоль которой $x = \xi$, причем A и B — точки кривой C . Криволинейный треугольник ABP обозначим через \square .



Черт. 31.

Мы должны найти формулу, выражающую значение искомой функции u в точке P через ее начальные значения вдоль дуги AB и через значения функции f в треугольнике ABP .

Риман пришел к своей формуле, руководствуясь аналогией рассматриваемой задачи интегрирования дифференциального уравнения с задачей решения конечной системы линейных уравнений. Чтобы решить такую систему, мы можем сначала умножить левые части на неопределенные множители v_1 , v_2 , ..., затем сложить, расположить члены полученной билинейной формы относительно u_i и v_k по переменным u_i и, наконец, определить множители v_1 , v_2 , ... так, чтобы, например, коэффициенты при u_2 , u_3 , ... обратились в нуль, а коэффициент при u_1 равнялся единице.

Таким путем получится выражение для u_1 и аналогично для u_2 и т. д. Величины v_1 , v_2 , ... не будут при этом зависеть от правых частей уравнений, а исключительно от коэффициентов.

Совершенно так же мы можем поступать и с нашим дифференциальным уравнением для того, чтобы найти значение решения u в точке P . Мы умножаем дифференциальное уравнение на пока не-

определенную функцию v , интегрируем по треугольнику \square и преобразуем этот интеграл с помощью формулы Грина (4).

Формула Грина (4) дает нам в силу дифференциального уравнения (1) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\square} (fv - uM[v]) dx dy &= \\ &= \int_{AB+BP+PA} [(u_y v - uv_y + 2auv)x + (u_x v - uv_x + 2bu)v] ds, \end{aligned}$$

причем криволинейный интеграл берется по трем сторонам треугольника AB , BP и PA . Вдоль PA имеем: $y_1 = 1$, $x_1 = 0$, $ds = dx$; вдоль BP : $y_1 = 0$, $x_1 = 1$, $ds = dy$. В интеграле, взятом вдоль PA , преобразуем $\int u_x v dx$ с помощью интегрирования по частям, а в интеграле вдоль BP преобразуем таким же образом интеграл $\int u_y v dy$. Таким путем мы приведем правую часть уравнения (5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2u(P)v(P) - u(A)v(A) - u(B)v(B) &+ \\ &+ \int_{AB} [(u_y v - uv_y + 2auv)x + (u_x v - uv_x + 2bu)v] ds + \\ &+ 2 \int_{AP} u(bv - v_x) dx + 2 \int_{BP} u(av - v_y) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

причем $u(P)$, $v(P)$, $u(A)$, $v(A)$, $u(B)$, $v(B)$ обозначают значения этих функций в точках P , A и B .

Выберем теперь функцию v следующим образом: прежде всего будем рассматривать $v = v(x, y; \xi, \eta)$ как функцию не только аргументов x , y , но и параметров ξ и η , и подчиним v следующим условиям:

а) v как функция от x и y должна удовлетворять сопряженному дифференциальному уравнению $M[v] = 0$.

б) Вдоль AP должно выполняться условие $v_x = bv$, а вдоль BP — условие $v_y = av$.

Точнее: вдоль AP должно быть $v_x(x, \eta; \xi, \eta) = b(x, \eta)v(x, \eta; \xi, \eta)$, а вдоль BP $v_y(\xi, y; \xi, \eta) = a(\xi, y)v(\xi, y; \xi, \eta)$.

в) В точке P значение функции v должно равняться единице, т. е.

$$v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

Функция v , удовлетворяющая всем перечисленным условиям называется принадлежащей к дифференциальному выражению L «функцией Римана». С помощью этой функции мы получаем класс

сическую формулу Римана для искомого решения дифференциального уравнения $L[u] = f$:

$$\begin{aligned} 2u(P) &= u(A)v(A) + u(B)v(B) - \\ &- \int_{AB} [(u_x v - uv_x + 2bu v)y + (u_y v - uv_y + 2au v)x] ds + \\ &+ 2 \iint_{\square} fv dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта формула Римана сразу дает решение дифференциального уравнения $L[u] = f$ при любых начальных условиях вдоль заданной кривой C с помощью определенного решения v сопряженного уравнения, зависящего от параметров ξ , η ¹⁾. Из формулы Римана непосредственно вытекают в соответствии с § 3 следующие следствия:

Во-первых, *решение и дифференциального уравнения $L[u] = f$ однозначно определяется начальными условиями.*

Во-вторых, *при непрерывном изменении начальных данных соответствующее решение и изменяется непрерывно.*

В-третьих, *значение функции u в точке P зависит не от всей совокупности начальных данных, а только от начальных данных вдоль части AB начальной кривой C , вырезаемой из C характеристиками, выходящими из точки P .*

Во всех этих рассмотрениях мы допустили без доказательства существование функции Римана. Это допущение будет нами доказано в следующем параграфе.

2. Дополнительные замечания. Характеристическая задача Коши. Заметим прежде всего, что, не ограничивая общности задачи, мы можем всегда заменить общую задачу Коши специальной задачей Коши, в которой начальные значения функций u , p и q равны нулю. В самом деле, общая задача Коши, рассмотренная в п. 1, легко приводится к этой специальной задаче. Для этой цели выберем какую-нибудь произвольную функцию φ , имеющую непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяющую данным начальным условиям общей задачи Коши в том виде, как она формулирована в п. 1. Положим теперь $u = w + \varphi$; тогда функция w удовлетворяет нулевым начальным условиям и дифференциальному уравнению $L[w] = f - L[\varphi]$. При нулевых начальных условиях в формуле Римана исчезают краевые члены. Мы получаем таким образом и для общей задачи Коши упрощенную формулу Римана, не содержащую краевых членов; только функцию f мы должны заменить функцией $f - L[\varphi]$. С помощью формулы Грина мы можем эту упрощенную

1) В этом отношении формула Римана является аналогом формулы, выражющей решение краевой задачи с помощью функции Грина (ср. гл. IV, § 2, п. 1).

формулу Римана снова привести к ее первоначальному виду (6). Дальше заметим следующее. Сделанное выше предположение о том, что никакая характеристика не пересекает начальной линии C в двух точках и не касается этой линии, является существенным для всего нашего построения. При невыполнении этого условия задача Коши, вообще говоря, не разрешима, так как мы не можем тогда каждой точке P плоскости однозначно сопоставить пару точек A и B кривой C . Затруднения, возникающие в таком случае, легко показать на примере простейшего дифференциального уравнения $u_{xy} = 0$.

Пусть C имеет вид, указанный на черт. 32. Если горизонтальная линия пересекает C в двух точках Q и R , то, интегрируя наше уравнение, мы получим:

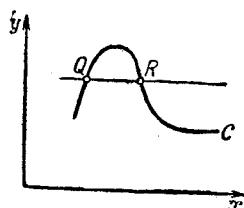
$$u_y(Q) = u_y(R).$$

Таким образом, для того, чтобы задача Коши была в этом случае разрешимой, необходимо подчинить значения u_y вдоль кривой C определенным условиям. Если задать u_y вдоль C как произвольную функцию x , не соблюдая условия $u_y(Q) = u_y(R)$, то не существует решения u уравнения $u_{xy} = 0$, для которого u_y принимало бы вдоль C заданные таким образом значения.

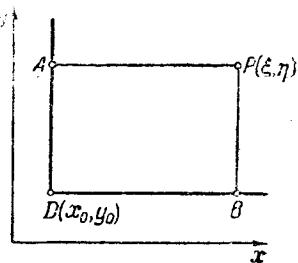
Эти затруднения, однако, исчезают в том случае, когда кривая C вырождается в прямоугольную ломаную ADB (черт. 33), состоящую из двух характеристических отрезков AD и BD .

В этом предельном случае формула (6) полностью применима. Однако, вдоль начальной кривой ADB мы не можем теперь задавать произвольно две функции, а только начальные значения самой функции u . В самом деле, если вдоль AD , например, заданы значения u , то этим определена производная u_y , а данное дифференциальное уравнение в частных производных дает вдоль AD обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для функции $p = u_x$; точно так же мы получаем вдоль прямой BD обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для $q = u_y$; в первом случае независимым переменным является y , а во втором случае x . Этими двумя дифференциальными уравнениями и условием непрерывности функций p и q в точке D функции p и q однозначно определяются вдоль характеристик DB и DA заданием вдоль них значений одной только функции u .

Этот случай задачи Коши мы называем *характеристической задачей Коши*. Ограничиваюсь специальным случаем, когда $f = 0$,



Черт. 32.



Черт. 33.

мы получим решение характеристической задачи в следующем виде:

$$2u(P) = u(A)v(A) + u(B)v(B) -$$

$$-\int_D^A (v_y u - u_y v - 2auv) dy - \int_D^B (v_x u - u_x v - 2bu v) dx. \quad (7)$$

Интегрируя по частям, мы можем эту формулу преобразовать следующим образом:

$$u(P) = u(D)v(D) + \int_D^A v(u_y + au) dy + \int_D^B v(u_x + bu) dx. \quad (7')$$

Используем эту формулу решения характеристической задачи Коши для доказательства так называемого *закона взаимности для функции Римана*.

Пусть $u = u(x, y; x_0, y_0)$ обозначает функцию Римана, принадлежащую к дифференциальному выражению M и содержащую в качестве параметров координаты x_0, y_0 точки D . Это значит, что выполняются условия $u(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$, $u_y + au = 0$ вдоль AD и $u_x + bu = 0$ вдоль BD . Тогда из формулы (7') следует:

$$u(\xi, \eta; x_0, y_0) = v(x_0, y_0; \xi, \eta),$$

т. е.:

Если в функции Римана переставить между собой параметры и аргументы, то функция Римана дифференциального выражения L переходит в функцию Римана сопряженного дифференциального выражения M . В частности, если L — самосопряженное дифференциальное выражение, то его функция Римана симметрична относительно точек (ξ, η) и (x, y) , где ξ, η — параметры, x, y — аргументы.

3. Пример. Телеграфное уравнение. Простейший нетривиальный пример применения формулы Римана дает *телеграфное уравнение* (ср. гл. III, § 5, п. 3). Телеграфное уравнение может быть приведено к виду

$$L(u) = u_{xy} + cu = g(x, y), \quad (8)$$

где c — константа. Это дифференциальное уравнение является само-сопряженным. Чтобы найти функцию Римана, будем ее искать в силу симметричности дифференциального уравнения в форме

$$v(x, y; \xi, \eta) = f(z),$$

где

$$z = (x - \xi)(y - \eta).$$

Дифференциальное уравнение для функции Римана переходит тогда в обыкновенное дифференциальное уравнение $zf'' + f' + cf = 0$,

которое с помощью подстановки $\lambda = \sqrt{4cz}$ преобразуется в *дифференциальное уравнение Бесселя*

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{df}{d\lambda} + f = 0. \quad (9)$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция Бесселя $f = J_0(\lambda)$ (см. т. I, гл. VII). Функция

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0[\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}] \quad (10)$$

действительно является искомой функцией Римана, ибо, как легко убедиться, эта функция удовлетворяет при $x = \xi$ и $y = \eta$ начальным условиям, характеризующим функцию Римана.

§ 5. Решение дифференциального уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ методом итераций Пикара¹⁾

1. Предварительные замечания. Вместо того, чтобы отдельно рассматривать случай линейных дифференциальных уравнений и относящиеся сюда вопросы (например, вопрос о существовании и единственности функции Римана), мы сразу перейдем к задаче Коши для общего дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1)$$

Как и в прошлом параграфе, мы предполагаем, что на плоскости x, y задана гладкая начальная кривая C , обладающая тем свойством, что никакая прямая, параллельная одной из осей координат (характеристики дифференциального уравнения) не пересекает кривой C более, чем в одной точке. Пусть кривая C задана в параметрическом виде $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$. Как и в § 4, черт. 31, мы проводим через точку P с координатами ξ, η прямые AP и BP , параллельные осям координат, причем точки A и B лежат на кривой C . Треугольник ABP мы обозначим, как и раньше, значком \square , а отрезки AP и BP через H и V . Далее, мы сохраняем сокращенные обозначения $u_{xy} = s$, $u_x = p$, $u_y = q$.

Пусть вдоль C заданы начальные значения u , p и q . Не ограничивая общности задачи, мы можем согласно замечанию, сделанному нами в § 4, принять начальные значения u , p и q тождественно равными нулю. В самом деле, в противном случае мы возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую функцию φ , имеющую непрерывную смешанную производную φ_{xy} и удовлетворяющую начальным условиям, и заменим неизвестную функцию u неизвестной функцией $w = u - \varphi$. Тогда w удовлетворяет дифференциальному уравнению того же типа, что и u , с видоизмененным f и нулевым начальным условием²⁾.

1) См. Picard, Traité d'analyse, т. 2.

2) Такую функцию $\varphi(x, y)$ мы можем, например, построить, полагая $\varphi = u(x) + [y - y(x)] q(x)$,