

которое с помощью подстановки $\lambda = \sqrt{4cz}$ преобразуется в *дифференциальное уравнение* Бесселя

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{df}{d\lambda} + f = 0. \quad (9)$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция Бесселя $f = J_0(\lambda)$ (см. т. I, гл. VII). Функция

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0[\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}] \quad (10)$$

действительно является искомой функцией Римана, ибо, как легко убедиться, эта функция удовлетворяет при $x = \xi$ и $y = \eta$ начальным условиям, характеризующим функцию Римана.

§ 5. Решение дифференциального уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ методом итераций Пикара¹⁾

1. Предварительные замечания. Вместо того, чтобы отдельно рассматривать случай линейных дифференциальных уравнений и относящиеся сюда вопросы (например, вопрос о существовании и единственности функции Римана), мы сразу перейдем к задаче Коши для общего дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1)$$

Как и в прошлом параграфе, мы предполагаем, что на плоскости x, y задана гладкая начальная кривая C , обладающая тем свойством, что никакая прямая, параллельная одной из осей координат (характеристики дифференциального уравнения) не пересекает кривой C более, чем в одной точке. Пусть кривая C задана в параметрическом виде $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$. Как и в § 4, черт. 31, мы проводим через точку P с координатами ξ, η прямые AP и BP , параллельные осям координат, причем точки A и B лежат на кривой C . Треугольник ABP мы обозначим, как и раньше, значком \square , а отрезки AP и BP через H и V . Далее, мы сохраняем сокращенные обозначения $u_{xy} = s$, $u_x = p$, $u_y = q$.

Пусть вдоль C заданы начальные значения u , p и q . Не ограничивая общности задачи, мы можем согласно замечанию, сделанному нами в § 4, принять начальные значения u , p и q тождественно равными нулю. В самом деле, в противном случае мы возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую функцию φ , имеющую непрерывную смешанную производную φ_{xy} и удовлетворяющую начальным условиям, и заменим неизвестную функцию u неизвестной функцией $w = u - \varphi$. Тогда w удовлетворяет дифференциальному уравнению того же типа, что и u , с видоизмененным f и нулевым начальным условием²⁾.

1) См. Picard, Traité d'analyse, т. 2.

2) Такую функцию $\varphi(x, y)$ мы можем, например, построить, полагая $\varphi = u(x) + [y - y(x)] q(x)$,

Наша задача состоит в том, чтобы в некоторой окрестности кривой C построить решение дифференциального уравнения

$$s = f(x, y, u, p, q), \quad (1)$$

удовлетворяющее вдоль C начальным условиям $u = p = q = 0$.

При этом предполагается, что функция f непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Относительно решения u мы предполагаем непрерывность первых производных и существование смешанной производной второго порядка u_{xy} ; непрерывность u_{xy} тогда уже следует из самого дифференциального уравнения (1)¹.

Заметим тут же, что наша задача сохраняет смысл и излагаемый ниже метод дает ее решение также и в том случае, когда начальная кривая вырождается в прямоугольную ломаную, состоящую из двух характеристических прямых AD и BD (черт. 33). Однако, в этом случае можно задать вдоль C начальные значения одной только функции u , в частности, $u = 0$, тогда как для значений p вдоль AD и q вдоль BD получаются, как и в предыдущем параграфе, обыкновенные дифференциальные уравнения, которые вместе с условием $p = q = 0$ в точке D однозначно определяют величины p и q вдоль C . Мы называем этот случай задачи Коши *характеристической задачей Коши*. В дальнейшем, имея в виду только что сделанное замечание, нам не придется делать каких-либо различий между общей задачей Коши и этим особым частным случаем.

Нашей целью является построение решения в достаточно малой окрестности G точек кривой C . Такую область G плоскости x, y мы дополняем условиями вида $|u| < a, |p| < a, |q| < a$, где a — некоторая константа, до области B пятимерного пространства x, y, u, p, q . Когда система значений x, y, u, p, q пробегает область B , четыре выражения $|f|, |f_u|, |f_p|, |f_q|$, будучи ограниченными, остаются ниже некоторой верхней границы M , зависящей от области G .

если начальная кривая задана уравнением $y = y(x)$, а начальные значения в виде функций $u(x), p(x), q(x)$, удовлетворяющих условию полоски $u' = p + y'q$. Функция φ имеет, очевидно, непрерывные производные φ_x и φ_y и принимает, равно как и φ_y , при $y = y(x)$ заданные начальные значения; в силу условия полоски φ_x тоже принимает при $y = y(x)$ заданное начальное значение $p(x)$.

¹) В отношении вторых производных u_{xx} и u_{yy} мы не делаем, таким образом, никаких допущений, так что, например, для случая $f = 0$ мы считаем функцию $u = \varphi(x) + \psi(y)$ решением уравнения $u_{xy} = 0$ также и в том случае, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ не имеют вторых производных, а только непрерывные первые производные.

Однако, если предположить, что для начальных функций $x(\lambda), y(\lambda), u(\lambda), p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ существуют непрерывные вторые производные и что функция f имеет непрерывные производные первого и второго порядка по всем своим аргументам, то решение u имеет также непрерывные вторые производные r и t , и даже существуют трети производные p_{xy} и q_{xy} ; этот вывод содержится в общем результате § 7, но может быть получен также и непосредственно путем перехода к дифференциальному уравнению, получающимся

(1) дифференцированием по x и по y .

Наше дифференциальное уравнение (1) может быть записано в форме интегрального уравнения, получающегося путем интегрирования по треугольнику \square :

$$u(\xi, \eta) = \iint_{\square} f(x, y, u, p, q) dx dy. \quad (2)$$

Интегральное уравнение (2) эквивалентно дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям $u = p = q = 0$ вдоль кривой C . Напомним, что если функция $h(\xi, \eta)$ задана интегралом вида

$$h(\xi, \eta) = \iint_{\square} g(x, y) dx dy, \quad (3)$$

то

$$h_\xi = \int_B^P g(\xi, y) dy, \quad h_\eta = \int_A^P g(x, \eta) dx, \quad h_{\xi\eta} = g(\xi, \eta), \quad (3')$$

так что $h|_C = h_\xi|_C = h_\eta|_C = 0$.

Для того, чтобы интегральное уравнение (2) имело смысла, мы должны искому функцию u подчинить только требованию существования и непрерывности производных первого порядка. Из этого условия получается как следствие в силу интегрального уравнения (2) существование и непрерывность смешанной производной второго порядка u_{xy} , выражающейся через x, y, u, p, q правой частью дифференциального уравнения (1), так как при выполнении нашего условия мы имеем право дважды дифференцировать по ξ и η правую часть интегрального уравнения (2).

2. Решение задачи Коши. По аналогии с классическим приемом решения обыкновенных дифференциальных уравнений мы применяем *метод итераций* следующим образом: возьмем в качестве первого приближения $u_0 = p_0 = q_0 = 0$ и будем строить в некоторой достаточно малой окрестности G кривой C , которую мы в дальнейшем определим точнее, последовательные системы трех функций точки u_n, p_n, q_n с помощью рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1}(P) &= \iint_{\square} f(x, y, u_n, p_n, q_n) dx dy, \\ p_{n+1}(P) &= \int_B^P f(\xi, y, u_n, p_n, q_n) dy, \\ q_{n+1}(P) &= \int_A^P f(x, \eta, u_n, p_n, q_n) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда

$$p_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi}, \quad q_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \eta},$$

как это непосредственно следует из уравнений (3').

Кроме того, если точка P лежит на кривой C , то $u_n = p_n = q_n = 0$. Мы замечаем теперь следующее: процесс последовательных итераций не выводит за пределы заданной области B пространства x, y, u, p, q , если выбрать окрестность G кривой C достаточно малой. В самом деле, обозначим через l наибольшее значение расстояний AP и BP для всех точек P области G и предположим, что при некотором значении индекса n величины x, y, u, p, q лежат в области B . Тогда из соотношений (4) непосредственно получаются неравенства

$$|u_{n+1}| \leqslant Ml^2; \quad |p_{n+1}| \leqslant Ml; \quad |q_{n+1}| \leqslant Ml.$$

Если мы сузим теперь окрестность G кривой C настолько, чтобы выполнялись условия $Ml^2 \leqslant a$ и $Ml \leqslant a$, то величины $x, y, u_{n+1}, p_{n+1}, q_{n+1}$ также лежат в области B , так что, неограниченно продолжая процесс итераций, мы не выйдем за пределы области B .

После этого нетрудно уже показать, что мы можем дальше, путем соответствующего, в случае необходимости, дальнейшего сужения области G обеспечить равномерную сходимость процесса итераций к системе трех функций точки $u(x, y), p(x, y)$ и $q(x, y)$, причем $u_x = p, u_y = q, u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$ и $u = p = q = 0$ вдоль C . Функция u является, таким образом, решением нашей задачи Коши. Для доказательства составим разность

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \iint_D [f(x, y, u_n, p_n, q_n) - f(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})] dx dy = \\ &= \iint_D [(u_n - u_{n-1}) \bar{f}_u + (p_n - p_{n-1}) \bar{f}_p + (q_n - q_{n-1}) \bar{f}_q] dx dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где в правой части подинтегральное выражение преобразовано с помощью теоремы о конечном приращении функции от многих переменных, причем черта указывает, что в качестве аргументов u, p, q нужно взять некоторые средние значения, лежащие соответственно между u_n и u_{n-1} , p_n и p_{n-1} , q_n и q_{n-1} . Оценка этих интегралов дает непосредственно:

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant M \iint_D [|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|] dx dy.$$

Обозначая через D_n наибольшее значение выражения

$$|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|,$$

мы получаем отсюда $|u_{n+1} - u_n| \leqslant Ml^2 D_n$.

Таким же точно образом мы получаем из уравнений (4):

$$|p_{n+1} - p_n| \leqslant Ml D_n; \quad |q_{n+1} - q_n| \leqslant Ml D_n,$$

так что во всех точках P такой окрестности G кривой C имеет место неравенство:

$$|u_{n+1} - u_n| + |p_{n+1} - p_n| + |q_{n+1} - q_n| \leq Ml(l+2)D_n.$$

Так как это неравенство имеет место также и в той точке P , в которой левая часть достигает своего наибольшего значения D_{n+1} , то

$$D_{n+1} \leq Ml(l+2)D_n.$$

Предположим теперь, что область G сужена настолько, что $Ml(l+2) = \alpha < 1$. Тогда бесконечный ряд с положительными и постоянными членами $\sum_{v=1}^{\infty} D_v$ сходится, по крайней мере, столь же быстро, как и геометрическая прогрессия $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha^v$. Отсюда следует, что в области G три ряда $\sum_{v=0}^{\infty} (u_{v+1} - u_v)$, $\sum_{v=0}^{\infty} (p_{v+1} - p_v)$, $\sum_{v=0}^{\infty} (q_{v+1} - q_v)$ сходятся равномерно. Предельные значения u , p , q являются непрерывными функциями точки. В силу равномерности сходимости мы имеем право переходить к пределу под знаком интеграла в уравнениях (4) и получаем, таким образом, что предельные функции удовлетворяют соотношениям

$$u = \iint_D f(x, y, u, p, q) dx dy,$$

$$p = \int_B f(\xi, y, u, p, q) dy,$$

$$q = \int_A (fx, \eta, u, p, q) dx.$$

Отсюда: $u_x = p$, $u_y = q$, $u_{xy} = f$.

Так как, кроме того, u удовлетворяет начальным условиям вдоль C , то u является искомым решением рассматриваемой задачи Коши.

3. Единственность решения задачи Коши. Решение задачи Коши является в некоторой окрестности начальной кривой однозначно определенным (единственным).

В самом деле, если u и v — два решения, то для разности $w = u - v$ имеет место интегральное соотношение

$$w = \iint_D [f(x, y, u, u_x, u_y) - f(x, y, v, v_x, v_y)] dx dy.$$

Применим снова к подинтегральному выражению в правой части этого уравнения теорему о конечном приращении и обозначим через W наибольшее значение функций $|w|$, $|w_x|$, $|w_y|$ в области G .

Мы получаем непосредственно:

$$w = \iint_{\square} (w \bar{f}_u + w_x \bar{f}_p + w_y \bar{f}_q) dx dy,$$

откуда

$$|w| \leq Ml^2 W;$$

точно так же

$$|w_x| \leq MlW; \quad |w_y| \leq MlW,$$

так что

$$|w| + |w_x| + |w_y| \leq Ml(l+2)W = \alpha W.$$

Отсюда следует, что и

$$W \leq \alpha W.$$

Если же $\alpha < 1$, то последнее неравенство может иметь место только при $W = 0$, т. е. если w тождественно равно нулю во всей области G или, другими словами, если функция u тождественно равна v .

4. Непрерывная и дифференцируемая зависимость от параметров. Если правая часть f дифференциального уравнения содержит параметр ε и если при этом f является непрерывной и соответственно дифференцируемой функцией как от ε , так и от первоначальных аргументов, когда ε находится в некоторой достаточно малой окрестности заданного значения ε_0 , например, $\varepsilon_0 = 0$, то как решение $u(x, y)$ данной задачи Коши, так и его частные производные p и q являются также непрерывными и соответственно дифференцируемыми функциями параметра ε . В случае выполнения условия дифференцируемости производная $v = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ решения u по параметру ε при $\varepsilon = 0$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$v_{xy} + \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v = g, \quad (6)$$

где

$$\alpha = -t_p|_{\varepsilon=0}; \quad \beta = -f_q|_{\varepsilon=0}; \quad \gamma = -f_u|_{\varepsilon=0}; \quad g = f_\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Для того, чтобы доказать непрерывную зависимость u от параметра ε , достаточно заметить, что для рассматриваемого промежутка изменения параметра ε можно в качестве области G выбрать фиксированную область, не зависящую от ε , задавая в рассматриваемой области B изменения величин x , y , u , p , q не зависящие от ε верхние границы модулей $|f|$, $|f_u|$, $|f_p|$ и $|f_q|$, что возможно в силу допущенной непрерывности f относительно ε . Поэтому изложенный в п. 2 метод итераций сходится равномерно также и относительно параметра ε , а отсюда непосредственно следует непрерывность предельных функций u , p , q относительно ε . В силу дифференциального уравнения вторая производная u_{xy} является тогда также непрерывной функцией от ε .

Непрерывная дифференцируемость решения u относительно ε доказывается так: полагая, не ограничивая общности рассуждения, $u_0 = 0$, составим выражение

$$w(x, y, \varepsilon) = \frac{u(x, y, \varepsilon) - u(x, y, 0)}{\varepsilon}.$$

Из дифференциального уравнения (1) мы получаем тогда соотношение

$$w_{xy} = \frac{1}{\varepsilon} [f(x, y, u, u_x, u_y; \varepsilon) - f(x, y, u^0, u_x^0, u_y^0; 0)],$$

где

$$u^0 = u(x, y, 0).$$

Преобразуя правую часть с помощью теоремы о конечном приращении, мы получим для w дифференциальное уравнение

$$w_{xy} + \alpha w_x + \beta w_y + \gamma w = g, \quad (7)$$

в котором α , β , γ и g обозначают значения производных f по p , q , u и ε для промежуточных значений аргументов. Мы можем рассматривать эти коэффициенты как заданные функции от x , y и ε , а w — как решение дифференциального уравнения (7), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. При $\varepsilon \neq 0$ эти коэффициенты можно представить как отношения конечных приращений и они являются поэтому непрерывными функциями от x , y и ε . При $\varepsilon = 0$ они непрерывно переходят в частные производные f_u , f_p , f_q функции $f(x, y, u, p, q)$ для $u = u(x, y, 0)$, $p = u_x(x, y, 0)$, $q = u_y(x, y, 0)$, которые по условию являются непрерывными функциями. Таким образом, мы можем дифференциальное уравнение (7) рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка относительно w , коэффициенты которого α , β , γ и g непрерывно зависят от x , y и ε ; согласно нашему предыдущему результату существует поэтому предел $v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w$, и эта предельная функция v удовлетворяет диф-

ференциальному уравнению (6).

3. Область зависимости решения. Подчеркнем сначала, что полученное нами решение, согласно замечаниям п. 1, охватывает также и общий случай, когда вдоль C заданы не нулевые, а произвольные начальные данные. Наше построение непосредственно показывает следующее.

Значение $u(P)$ искомой функции u в точке P зависит не от всей совокупности начальных данных на кривой C , а только от начальных значений вдоль дуги AB этой кривой. Любое изменение начальных данных вне дуги AB не оказывает никакого влияния на значение функции $u(P)$ в точке P и, конечно, в любой точке внутри треугольника \square .

В соответствии с рассмотрениями § 4, п. 1 мы формулируем этот результат так:

Областью зависимости точки P служит дуга AB , вырезаемая из начальной кривой C двумя характеристиками, выходящими из точки P .

Заметим, что этот результат остается справедливым также и для случая характеристической задачи Коши.

§ 6. Обобщения и применение к системам первого порядка

1. Системы дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковой линейной главной частью. Заметим прежде всего следующее: все результаты предыдущего параграфа остаются в силе и для дифференциального уравнения вида

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

если функции a , b , c являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки, удовлетворяющими в рассматриваемой области условию

$$4ac - b^2 < 0, \quad (1')$$

т. е. если уравнение (1) является уравнением гиперболического типа. Мы должны только в этом случае вместо x, y ввести характеристические параметры согласно гл. III, § 1 и соответственно гл. V, § 1. Этим путем мы сводим эту задачу к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями $u^1(x, y), \dots, u^v(x, y), \dots, u^m(x, y)$ с производными

$$p_v = \frac{\partial u^v}{\partial x}, \quad q_v = \frac{\partial u^v}{\partial y}, \quad s_v = \frac{\partial^2 u^v}{\partial x \partial y}.$$

Пусть эта система уравнений имеет вид

$$s_v = f_v(x, y, u^1, \dots, u^m; p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_m). \quad (2)$$

Согласно сделанному только что замечанию, к системе такого вида может быть приведена вообще всякая система «дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью» вида

$$au_{xx}^v + bu_{xy}^v + cu_{yy}^v = f_v(x, y, u^1, \dots, u^m) \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad (3)$$

где для всех m дифференциальных уравнений коэффициенты a , b , c — одни и те же функции точки, удовлетворяющие условию (18).

Пусть требуется решить для системы (3) задачу Коши точно такого же вида, как задача, рассмотренная в § 5, с тем только отличием, что вдоль начальной кривой C заданы значения всех функций u^v и их первых производных с соблюдением условий полоски. Мы решаем эту задачу буквально совершенно так же, как и в § 5, и приходим к следующему выводу: *Если C — нигде не характеристическая гладкая кривая, то в некоторой достаточно малой окрестности*