Областью зависимости точки P служит дуга AB, вырезаемая из начальной кривой C двумя характеристиками, выходящими из точки P.

Заметим, что этот результат остается справедливым также и для случая характеристической задачи Коши.

§ 6. Обобщения и применение к системам первого порядка

1. Системы дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковой линейной главной частью. Заметим прежде всего следующее: все результаты предыдущего параграфа остаются в силе и для дифференциального уравнения вида

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

если функции a, b, c являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки, удовлетворяющими в рассматриваемой области условию

$$4ac-b^2<0, \tag{1'}$$

т. е. если уравнение (1) является уравнением гиперболического типа. Мы должны только в этом случае вместо x, y ввести характеристические параметры согласно гл. III, § 1 и соответственно гл. V, § 1. Этим путем мы сводим эту задачу к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями $u^1(x, y), \ldots, u^\nu(x, y), \ldots, u^m(x, y)$ с производными

$$p_\nu=\frac{\partial u^\nu}{\partial x}, \quad q_\nu=\frac{\partial u^\nu}{\partial y}, \quad s_\nu=\frac{\partial^2 u^\nu}{\partial x\partial y}.$$

Пусть эта система уравнений имеет вид

$$s_\nu=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^m; p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_m). \tag{2}$$

Согласно сделанному только что замечанию, к системе такого вида может быть приведена вообще всякая система «*дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью*» вида

$$au^\nu_{xx}+bu^\nu_{xy}+cu^\nu_{yy}=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_m) \quad (\nu=1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

где для всех m дифференциальных уравнений коэффициенты a, b, c — одни и те же функции точки, удовлетворяющие условию (18).

Пусть требуется решить для системы (3) задачу Коши точно такого же вида, как задача, рассмотренная в § 5, с тем только отличием, что вдоль начальной кривой C заданы значения всех функций u^ν и их первых производных с соблюдением условий полоски. Мы решаем эту задачу буквально совершенно так же, как и в § 5, и приходим к следующему выводу: *Если C — нигде не характеристическая гладкая кривая, то в некоторой достаточно малой окрестности*

кривой C существует решение задачи Коши, и это решение является единственным; область зависимости вырезается из C обеими характеристиками PA и PB. Все это сохраняет силу также и для характеристической задачи Коши, но в этом случае можно задавать вдоль начальной характеристической линии одни только значения самих функций u_ν.

2. Канонические гиперболические системы первого порядка. В качестве применения наших общих результатов рассмотрим следующий специальный случай системы дифференциальных уравнений первого порядка с $N=n+m$ неизвестными функциями $u^1, \ldots, u^N$, имеющий фундаментальное значение в общей теории дифференциальных уравнений. Пусть данная система линейна относительно производных первого порядка неизвестных функций, причем первые n уравнений содержат только производные $p_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x}$ по x, а последние $m=N-n$ уравнений — только производные $q_\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial y}$ по y. Таким образом, рассматриваемая система имеет вид

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu} p_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$B_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu} q_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0 \quad (\nu = n+1, \ldots, n+m), \tag{5}$$

причем коэффициенты $a_{\nu\mu}$, а также величины g_i являются заданными непрерывными функциями от $x, y, u^1, \ldots, u^N$, имеющими непрерывные производные первого и второго порядков. Системы этого вида называются *каноническими гиперболическими системами* первого порядка.

Рассмотрим сначала *задачу Коши типа* I: дана гладкая или же кусочно-гладкая начальная кривая C, которая либо нигде не характеристична, т. е. нигде не параллельна оси x или y, либо состоит из отрезка, параллельного оси x, и отрезка, параллельного оси y. На этой начальной кривой заданы начальные значения функций u^ν как непрерывно дифференцируемые функции длины дуги. Пусть, далее, для этих начальных значений определитель D коэффициентов $a_{\nu\mu}$ удовлетворяет условию

$$D = |a_{\nu\mu}| \neq 0. \tag{6}$$

Требуется найти систему функций u^ν, имеющих непрерывные первые и вторые производные, принимающих заданные начальные значения и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (4) и (5). Мы докажем следующее:

Задача Коши типа I *однозначно разрешима в некоторой достаточно малой окрестности кривой C; так же, как и раньше, область зависимости для точки P вырезается из начальной кривой C обеими пересекающимися в точке P характеристиками* $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Мы решаем задачу типа I путем сведения ее к задаче типа II вида, только что рассмотренного нами в п. 1. Для этой

цели мы дифференцируем уравнения (4) по y, а уравнения (5) по x. Так как $D \neq 0$, то мы можем полученную в результате дифференцирования систему уравнений разрешить относительно u^{ν}_{xy}, что нам дает систему N уравнений вида

$$u^{\nu}_{xy} - f_{\nu}(x, y, u^1, \ldots, q_N) = 0, \tag{7}$$

причем эти уравнения являются линейными комбинациями уравнений $\frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial B_{\nu}}{\partial x} = 0$, а функции f_{ν} непрерывно дифференцируемы. Вдоль C заданы начальные значения неизвестных функций u_{ν} этой системы дифференциальных уравнений. Однако, начальные значения производных p_{ν} и q_{ν} этих функций вдоль C также однозначно определены.

В самом деле, пусть C не характеристична. Зададим эту кривую в параметрическом виде $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, причем производные $\dot{x}(\lambda)$ и $\dot{y}(\lambda)$ нигде не обращаются в нуль, так как по условию C нигде не параллельна какой-нибудь из осей координат. Тогда из условий полоски $\dot{u}^{\nu} = p_{\nu}\dot{x} + q_{\nu}\dot{y}$ мы получаем соотношения

$$q_{\nu} = \frac{1}{\dot{y}}(\dot{u}^{\nu} - p_{\nu}\dot{x}). \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (5), мы получим вместе с уравнениями (4) линейную систему уравнений для начальных производных p_{ν}, причем детерминант этой системы D отличен от нуля. Отсюда следует, что эта система уравнений однозначно определяет начальные значения производных p_{ν} вдоль C, а уравнения (8) определяют тогда и производные q_{ν} вдоль C. Таким образом, мы получаем из задачи Коши типа I задачу Коши типа II для системы с одинаковой главной частью.

Все сказанное относится также и к характеристической задаче Коши с тем только отличием, что начальные значения производных в этом случае непосредственно определяются из заданной системы дифференциальных уравнений.

Разрешив с помощью определенных таким способом начальных условий задачу Коши типа II, мы получим вместе с тем решение задачи Коши типа I. В самом деле, во-первых, в силу нашего выбора начальных значений p_{ν} и q_{ν} вдоль C имеют место соотношения $A_{\nu} = 0$ и $B_{\mu} = 0$. Во-вторых, система уравнений (7) эквивалентна системе уравнений $\frac{\partial A_{\nu}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x} = 0$, имеющих место в рассматриваемой окрестности кривой C. Отсюда следует, что в этой окрестности всюду $A_{\nu} = 0$, $B_{\mu} = 0$, так что задача I решена.

§ 7. Общее квазилинейное уравнение второго порядка

1. Полная система характеристических дифференциальных уравнений. В настоящем и следующем параграфах мы даем полное решение общей задачи Коши для дифференциального уравнения