

цели мы дифференцируем уравнения (4) по y , а уравнения (5) по x . Так как $D \neq 0$, то мы можем полученную в результате дифференцирования систему уравнений разрешить относительно u''_{xy} , что нам дает систему N уравнений вида

$$u''_{xy} - f_y(x, y, u^1, \dots, q_N) = 0, \quad (7)$$

причем эти уравнения являются линейными комбинациями уравнений $\frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$, а функции f_y непрерывно дифференцируемы.

Вдоль C заданы начальные значения неизвестных функций u , этой системы дифференциальных уравнений. Однако, начальные значения производных p , и q , этих функций вдоль C также однозначно определены.

В самом деле, пусть C не характеристична. Зададим эту кривую в параметрическом виде $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, причем производные $\dot{x}(\lambda)$ и $\dot{y}(\lambda)$ нигде не обращаются в нуль, так как по условию C нигде не параллельна какой-нибудь из осей координат. Тогда из условий полоски $\dot{u} = p_y \dot{x} + q_y \dot{y}$ мы получаем соотношения

$$q_y = \frac{1}{\dot{y}} (\dot{u} - p_y \dot{x}). \quad (8)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (5), мы получим вместе с уравнениями (4) линейную систему уравнений для начальных производных p_y , причем детерминант этой системы D отличен от нуля. Отсюда следует, что эта система уравнений однозначно определяет начальные значения производных p_y вдоль C , а уравнения (8) определяют тогда и производные q_y вдоль C . Таким образом, мы получаем из задачи Коши типа I задачу Коши типа II для системы с однократной главной частью.

Все сказанное относится также и к характеристической задаче Коши с тем только отличием, что начальные значения производных в этом случае непосредственно определяются из заданной системы дифференциальных уравнений.

Разрешив с помощью определенных таким способом начальных условий задачу Коши типа II, мы получим вместе с тем решение задачи Коши типа I. В самом деле, во-первых, в силу нашего выбора начальных значений p_y и q_y вдоль C имеют место соотношения $A_y = 0$ и $B_y = 0$. Во-вторых, система уравнений (7) эквивалентна системе уравнений $\frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$, имеющих место в рассматриваемой окрестности кривой C . Отсюда следует, что в этой окрестности всюду $A_y = 0$, $B_y = 0$, так что задача I решена.

§ 7. Общее квазилинейное уравнение второго порядка

1. Полная система характеристических дифференциальных уравнений. В настоящем и следующем параграфах мы даем полное решение общей задачи Коши для дифференциального уравнения

второго порядка $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ гиперболического типа¹⁾. Сначала мы рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0, \quad 4ac - b^2 < 0, \quad (1)$$

где a, b, c, d — дважды непрерывно дифференцируемые функции от x, y, u , $p = u_x, q = u_y$.

В противоположность дифференциальным уравнениям § 6 характеристические кривые не имеют в рассматриваемом случае неподвижных проекций на плоскость x, y . Из этого следует, что в рассматриваемом случае невозможно преобразовать дифференциальное уравнение к простой нормальной форме. Вместо этого центральное место в теории дифференциальных уравнений этого типа занимает понятие характеристик. Идея нашего дальнейшего хода рассуждений заключается в следующем: пусть $u = u(x, y)$ — уравнение некоторой интегральной поверхности J , на которой наше дифференциальное уравнение гиперболично.

Исследуем оба семейства характеристических кривых $\alpha(x, y) = \text{const.}$ и $\beta(x, y) = \text{const.}$ поверхности J . На достаточно малом куске этой поверхности мы можем вместо x и y ввести в качестве независимых переменных характеристические параметры α и β . Так же, как и в гл. III, § 2, мы можем поэтому на интегральной поверхности J рассматривать координаты x, y, u , а также производные p и q как функции от α и β .

Ключом ко всей излагаемой теории является следующая постановка вопроса: *каким соотношениям (дифференциальным уравнениям) удовлетворяют эти пять функций от α и β в силу заданного дифференциального уравнения (1), характеристических условий для параметров α и β и условий полоски?*

Мы получим для этих пяти величин каноническую гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка, рассмотренную в § 6, п. 2²⁾.

1) Излагаемый метод решения принадлежит Гансу Леви (Hans Lewy, *Math. Ann.*, т. 97, стр. 179 и следующие), а также К. Фридрихсу (K. Friedrichs und H. Lewy, *Math. Ann.* т. 99, стр. 200 и следующие). См. также по этому вопросу J. Hadamard, *Leçons sur le problème de Cauchy*, стр. 487, Париж, 1932.

2) Такую систему дифференциальных уравнений в качестве характеристической системы дифференциальных уравнений рассматривали и раньше, до работ Леви. Однако, к этой системе подходили, как к системе обычных дифференциальных уравнений, рассматривая каждое из двух семейств характеристических линий в отдельности. При этом получалась, в противоположность к теории характеристик для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, система уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных функций, так что рассматриваемая с такой точки зрения характеристическая система дифференциальных уравнений содержала недостаточное число уравнений и не давала возможности довести до конца интегрирование заданного дифференциального уравнения второго порядка. Существенно новой идеей, принадлежащей Леви, является одновременное введение обоих характеристических параметров

Теория интегрирования этой системы дифференциальных уравнений даст нам тогда решение нашей задачи Коши. Так же, как и для дифференциальных уравнений первого порядка, мы начинаем с анализа этой системы, получающейся сначала путем изучения характеристик на заданной интегральной поверхности, а затем интегрируем эту систему независимо от задания интегральной поверхности и из решений системы строим интегральные поверхности первоначального уравнения.

Итак, мы сначала допускаем, что $u = u(x, y)$ является уравнением заданной интегральной поверхности J . Не ограничивая общности, мы можем предположить, что на рассматриваемом куске интегральной поверхности выполняются условия $a \neq 0$ и $c \neq 0$, ибо в противном случае мы можем добиться выполнения этих условий с помощью поворота системы координат в плоскости x, y .

Выведем теперь систему дифференциальных уравнений для x, y, u, p, q , рассматриваемых как функции характеристических параметров α и β на поверхности J .

Характеристические условия для этих параметров мы получаем (см. также гл. III, § 2), рассматривая на J полоску первого порядка C с параметром λ , задаваемую уравнениями $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $u = u(\lambda)$; $p = p(\lambda)$, $q = q(\lambda)$, причем $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$.

Данное дифференциальное уравнение и условия полоски вдоль C

$$\left. \begin{array}{l} ar + bs + ct + d = 0, \\ \dot{x}r + \dot{y}s - \dot{p} = 0, \\ \dot{x}s + \dot{y}t - \dot{q} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

(где, как и раньше, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$) дают характеристическое условие

$$\left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{array} \right| = a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \quad (3)$$

Так как, по условию, $b^2 - 4ac > 0$ и $a \neq 0$, то во всех точках поверхности J уравнение $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0$ имеет два различных вещественных корня $\rho_1(x, y, u, p, q)$ и $\rho_2(x, y, u, p, q)$, причем в силу

α и β как независимых переменных, так что характеристические дифференциальные уравнения рассматриваются как уравнения в частных производных. Это дает сразу достаточное число дифференциальных уравнений и даже, как будто, большее, чем число неизвестных функций. С помощью такой постановки вопроса Гансу Леви удалось добиться существенных успехов, представляющих значительный шаг вперед по сравнению с классической теорией.

условия $c \neq 0$ оба эти корня отличны от нуля. Разлагая левую часть уравнения (3) на линейные множители и обозначая через α параметр λ для одного семейства характеристических кривых, а через β — параметр λ для другого семейства, мы расщепляем уравнение (3) на два уравнения

$$\left. \begin{array}{l} p_1 x_\alpha - y_\alpha = 0, \\ p_2 x_\beta - y_\beta = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Кривые $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$, образующие теперь на поверхности J систему криволинейных координат, дают оба семейства *характеристических кривых*.

Отметим соотношения

$$p_1 p_2 = \frac{c}{a}; \quad p_1 + p_2 = \frac{b}{a}; \quad (p_1 - p_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}, \quad (5)$$

$$y_\alpha x_\beta - y_\beta x_\alpha = (p_1 - p_2) x_\alpha x_\beta. \quad (6)$$

Заметим далее, что величины x_α и x_β должны быть отличны от нуля, ибо в противном случае обращалось бы в нуль также y_α или соответственно y_β , что несовместимо с требованием $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, которому должно удовлетворять параметрическое изображение характеристических кривых. Так как $p_i \neq 0$, то y_α и y_β должны быть также всюду отличны от нуля¹⁾.

Рассмотрим теперь систему трех уравнений (2) линейных относительно r, s и t , детерминант которой равен по условию нулю. Эта система совместна, ибо, задавая интегральную поверхность J и семейство характеристик $\alpha = \text{const.}$ и $\beta = \text{const.}$ на этой поверхности, мы этим самым сопоставляем каждой точке (x, y) систему значений $u, p, q, r, s, t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{p}, \dot{q}$, удовлетворяющих системе (2). Из совместности этой системы, у которой ранг матрицы коэффициентов меньше трех, следует, что ранг матрицы, дополненной свободными членами, также должен быть меньше трех.

Отсюда мы получаем еще одно соотношение

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ x_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & y_\alpha & -q_\alpha \end{vmatrix} = dx_\alpha y_\alpha + ay_\alpha p_\alpha + cx_\alpha q_\alpha = 0.$$

¹⁾ Заметим, что из характеристических уравнений

$$cx_\alpha^2 - bx_\alpha y_\alpha + ay_\alpha^2 = 0,$$

$$cx_\beta^2 - bx_\beta y_\beta + ay_\beta^2 = 0$$

следует, что $a = \mu x_\alpha x_\beta$; $b = \mu (x_\alpha y_\beta + y_\alpha x_\beta)$; $c = \mu y_\alpha y_\beta$, причем фактор пропорциональности μ может быть представлен в виде $\frac{1}{\mu^2} = \frac{(x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta)^2}{b^2 - 4ac}$.

Так как $y_\alpha = p_1 x_\alpha \neq 0$, то, сократив на x_α , мы можем представить это соотношение в следующем виде:

$$d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1 p_\alpha + cq_\alpha = 0. \quad (7)$$

Точно так же мы получаем:

$$d\rho_2 x_\beta + a\rho_2 p_\beta + cq_\beta = 0^1). \quad (8)$$

Кроме того, отметим еще уравнения полоски $u_\alpha = px_\alpha + qy_\alpha$ и $u_\beta = px_\beta + qy_\beta$.

Итак, мы получаем на поверхности J следующую систему дифференциальных уравнений:

$$y_\alpha - p_1 x_\alpha = 0, \quad (9)$$

$$y_\beta - p_2 x_\beta = 0, \quad (10)$$

$$d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1 p_\alpha + cq_\alpha = 0, \quad (11)$$

$$d\rho_2 x_\beta + a\rho_2 p_\beta + cq_\beta = 0, \quad (S) \quad (12)$$

$$A = u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0, \quad (13)$$

$$B = u_\beta - px_\beta - qy_\beta = 0. \quad (14)$$

Эта «характеристическая система дифференциальных уравнений» состоит из шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с пятью неизвестными функциями x , y , u , p , q от двух независимых переменных α и β . Эта система *квазилинейна*, т. е. линейна относительно производных, но число уравнений больше числа неизвестных функций.

Для того, чтобы получить квазилинейную систему типа, рассмотренного нами в § 6, мы должны отбросить одно из этих шести уравнений с таким расчетом, чтобы это отброшенное уравнение оказалось следствием остальных пяти уравнений.

Отбрасывая уравнение (14): $B = 0$, мы оставляем систему уравнений S , состоящую из уравнений (9), (10), (11), (12) и (13), которые мы называем *характеристическими уравнениями* исходного уравнения (1). Эта система уравнений имеет в точности форму *канонической гиперболической системы*, рассмотренной в § 6. Детерминант D этой системы, как легко убедиться, равняется $-ac(p_1 - p_2)^2$ и, следовательно, отличен от нуля.

Докажем прежде всего, что отброшенное уравнение $B = 0$ действительно, является следствием системы S , если выбрать соответствующие начальные условия. В самом деле, для этого достаточно показать, что для *каждой* системы решений системы уравнений S выражение B постоянно вдоль *каждой* координатной линии $\beta = \text{const}$. Тогда, допустив, что для рассматриваемой системы реше-

¹⁾ Последние два уравнения выражают только тот факт, что заданное дифференциальное уравнение (1) имеет место вдоль характеристик, но выражают это в форме уравнений *внутренних* относительно характеристик согласно общей теории § 1.

ний системы S выражение B обращается в нуль вдоль начальной линии, пересекающей координатные линии $\beta = \text{const.}$, мы получим, что отброшенное уравнение $B = 0$ действительно выполняется всюду на выбранной таким образом системе решений системы уравнений S .

Итак, достаточно доказать, что $B_\alpha = 0$, т. е. что

$$u_{\alpha\beta} - px_{\alpha\beta} - qy_{\alpha\beta} - p_\alpha x_\beta - q_\alpha y_\beta = 0.$$

Для доказательства дифференцируем уравнение $A = 0$ по β ; мы получаем:

$$u_{\alpha\beta} - px_{\alpha\beta} - qy_{\alpha\beta} - p_\beta x_\alpha - q_\beta y_\alpha = 0.$$

Остается доказать, что

$$p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha + q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha = 0. \quad (15)$$

Чтобы получить это соотношение, умножим уравнение (11) на y_β , уравнение (12) на y_α и вычтем полученные уравнения. Это дает

$$a(p_1 y_\beta p_\alpha - p_2 y_\alpha p_\beta) + c(y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta) = 0.$$

Так как $\frac{c}{a} = p_1 p_2$, то отсюда следует

$$\frac{y_\beta p_\alpha}{p_2} - \frac{y_\alpha p_\beta}{p_1} + y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta = 0.$$

В силу уравнений (9) и (10) это соотношение равносильно соотношению (15), что и доказывает наше утверждение.

Заметим здесь, что параметры α и β не являются однозначно определенными. Мы можем вместо них ввести какие-нибудь однозначно обратимые функции, из которых одна зависит только от α , а другая только от β , в результате чего форма характеристической системы уравнений не меняется. Если теперь C — произвольная кривая на поверхности J , нигде не касающаяся характеристических кривых, так что C , если ее рассматривать как кривую на плоскости α, β , нигде не параллельна оси α или оси β , то мы можем с помощью допустимой замены параметров α и β параметрами $\alpha_1 = \varphi(\alpha)$ и $\beta_1 = \psi(\beta)$ привести уравнение кривой C к виду $\alpha + \beta = 0$, не нарушая общности кривой C .

Требование, чтобы кривая C нигде не была характеристической, выражается условием, чтобы вдоль C всюду имели место соотношения

$$\dot{y} - p_1 \dot{x} \neq 0, \quad \dot{y} - p_2 \dot{x} \neq 0$$

или

$$a\dot{x}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2 \neq 0,$$

где точкой обозначается дифференцирование по параметру λ кривой C . (В качестве такого параметра мы можем, например, выбрать длину дуги проекции C_0 кривой C на плоскость x, y .)

В дальнейшем мы будем часто пользоваться только что доказанной возможностью приведения уравнения начальной кривой к виду $\alpha + \beta = 0$.

2. Решение задачи Коши. Обращая ход наших рассуждений, мы получим решение задачи Коши для нашего первоначального дифференциального уравнения (1). Пусть дана гладкая кривая C с соответствующей полоской, заданной с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ параметра λ , причем выполняется условие полоски $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$. Предположим, что начальная полоска нигде не характеристична и всюду гиперболична, так что вдоль полоски всюду выполняются условия $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$ и $4ac - b^2 < 0$.

Требуется построить в достаточно малой окрестности кривой C интегральную поверхность J , задаваемую дважды непрерывно дифференцируемой функцией u и содержащую данную полоску.

Этой задаче Коши для первоначального дифференциального уравнения, которую мы обозначим римской цифрой I, сопоставим следующую задачу Коши II в плоскости α , β :

Рассмотрим на плоскости α , β прямую L , заданную уравнением $\alpha + \beta = 0$, и пусть $\lambda = \sqrt{2}\alpha$, так что за параметр λ мы принимаем длину отрезка прямой L , отсчитываемую от начала координат. Допустим, что вдоль этой прямой (в окрестности начала координат) заданы непрерывно дифференцируемые функции $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, удовлетворяющие условию полоски $\dot{u} = q\dot{x} - p\dot{y} = 0$ и неравенству $4ac - b^2 < 0$. Пусть, далее, эта начальная полоска нигде не характеристична, т. е. выполняется условие $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$. Требуется найти решение системы дифференциальных уравнений S , т. е. системы уравнений (9), (10), (11), (12), (13), удовлетворяющее перечисленным начальным условиям и имеющее непрерывные производные первого порядка и непрерывные смешанные производные второго порядка по α и β .

В § 6 мы доказали, что эта каноническая гиперболическая задача II имеет в некоторой достаточно малой окрестности начала координат плоскости α , β одно и только одно решение, причем область зависимости вырезается из начальной кривой характеристиками $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$

Мы утверждаем теперь следующее: *полученное таким путем решение задачи II является вместе с тем решением первоначальной задачи I* (что, обратно, решение задачи I является решением задачи II, следует непосредственно из рассмотрений п. 1).

Заметим прежде всего, что мы можем вместо параметров α и β ввести в качестве независимых переменных величины x и y . В самом деле, в силу условий $x_\alpha \neq 0$ и $x_\beta \neq 0$ и на основании формулы (6) функциональный детерминант отличен от нуля. Поэтому, величины u , p , q имеют непрерывные частные производные первого порядка по x и y , а переменную u мы можем рассматривать как функцию $u(x, y)$.

Докажем, что, введя независимые переменные x и y , мы получим:

$$p = u_x \text{ и } q = u_y.$$

В самом деле, эти уравнения равносильны уравнениям $A = u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha = 0$ и $B = u_\beta - px_\beta - qy_\beta = 0$ ¹⁾. Но уравнение $A = 0$ выполняется само собой, так как это уравнение в качестве уравнения (13) входит в систему дифференциальных уравнений S . Далее, в п. 1 мы показали, что из системы S вытекает как следствие уравнение $B_\alpha = 0$; поэтому, чтобы доказать, что $B = 0$, достаточно установить справедливость этого уравнения вдоль начальной линии $\alpha + \beta = 0$. Вдоль же начальной линии условие $B = 0$ совпадает с условием полоски, которому мы с самого начала подчинили начальные значения. Итак, уравнение $B = 0$ справедливо всюду и, следовательно, p и q действительно являются производными функции $u(x, y)$.

Наконец, нам нужно показать, что величины x , y , u , $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$ удовлетворяют первоначальному дифференциальному уравнению (1).

В самом деле, заменим в уравнении (11) параметры α и β независимыми переменными x и y , подставив вместо p_α и q_α выражения $p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha$ и $q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha$. Мы получим:

$$\begin{aligned} 0 &= d\rho_1 x_\alpha + a\rho_1(rx_\alpha + sy_\alpha) + c(sx_\alpha + ty_\alpha) = \\ &= \rho_1 x_\alpha \left[d + ar + ct + s\left(a\rho_1 + \frac{c}{\rho_1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Но в силу квадратного уравнения $a\rho_1^2 - b\rho_1 + c = 0$ имеем $a\rho_1 + \frac{c}{\rho_1} = b$. С другой стороны, $\rho_1 x_\alpha \neq 0$; поэтому мы действительно получаем:

$$0 = d + ar + ct + bs,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача Коши в случае квазилинейного уравнения гиперболического типа нами полностью решена. Вместе с тем доказана единственность решения и найдена область зависимости.

Формулируем еще раз полученный результат:

Пусть задана начальная полоска $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ с соблюдением условия $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$; пусть эта полоска гиперболична, т. е. пусть на ней $4ac - b^2 < 0$, и нигде не характеристична, т. е. $ay^2 - bx\dot{y} + cx^2 \neq 0$. Мы предполагаем, далее, что начальные значения имеют непрерывные производные первого порядка, а коэффициенты — непрерывные производные первого и второго порядков. Тогда задача Коши для дифференциального уравнения $ar + bs + ct + d = 0$ и данной начальной полоски един-

¹⁾ Действительно, уравнения $A = 0$ и $B = 0$ однозначно определяют p и q , очевидно, удовлетворяются значениями $p = u_x$ и $q = u_y$.

ственным образом разрешима в достаточно малой окрестности начальной кривой: решение и в точке P зависит только от той части начальных данных, которые принадлежат к дуге начальной кривой, вырезаемой обеими характеристиками, проходящими на интегральной поверхности через точку P .

Полученный нами результат в отношении области влияния начальных данных доказывает в согласии с § 1, п. 2, что характеристические полоски действительно являются многообразиями ветвления для решений дифференциального уравнения. В самом деле, если мы изменим начальные данные вдоль части начальной кривой C , находящейся вне дуги AB , не нарушая условия дифференцируемости, то мы получим другую интегральную поверхность, совпадающую с первоначальной интегральной поверхностью в точке P и во всех точках криволинейного треугольника ABP . Вдоль характеристик AP и BP к первоначальной интегральной поверхности примыкает отличная от нее интегральная поверхность с соблюдением условия двукратной дифференцируемости. Таким образом, вдоль каждой характеристической полоски действительно имеется возможность разветвления интегральной поверхности, причем множество различных интегральных поверхностей, имеющих между собой соприкосновение второго порядка вдоль данной характеристической полоски, так же велико, как и множество всех дважды непрерывно дифференцируемых продолжений начальных данных через конечные точки A и B дуги AB .

Заметим в заключение, что *характеристическая задача Коши* формулируется и решается в точности таким же образом, как и рассмотренная только что задача I.

§ 8. Общее уравнение $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$

Задача Коши для общего неквазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными сравнительно просто сводится к рассмотрениям § 7.

1. Квазилинейные системы с одинаковой главной частью. В § 6 мы рассмотрели системы дифференциальных уравнений вида (2) с m неизвестными функциями $u^1, \dots, u^{(m)}$. Там же мы заметили, что к этому виду может быть приведена и более общая система

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f_v(x, y, u^1, \dots, u_m) \quad (v = 1, \dots, m), \quad (1)$$

в которой a, b, c — фиксированные, не зависящие от v функции от x, y , удовлетворяющие в рассматриваемой области условию $4ac - b^2 < 0$. Для этого достаточно ввести вместо x, y характеристические параметры α и β с помощью характеристических уравнений

$$x_\alpha = p_1 y_\alpha, \quad x_\beta = p_2 y_\beta, \quad \alpha p^2 - bp + c = 0^1).$$

¹⁾ Если применить метод § 2, п. 3, то в качестве характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений получится m -ая степень уравнения $\alpha p^2 - bp + c = 0$.