ственным образом разрешима в достаточно малой окрестности начальной кривой: решение u в точке P зависит только от той части начальных данных, которые принадлежат к дуге начальной кривой, вырезаемой обеими характеристиками, проходящими на интегральной поверхности через точку P.

Полученный нами результат в отношении области влияния начальных данных доказывает в согласии с § 1, п. 2, что характеристические полоски действительно являются *многообразиями ветвления* для решений дифференциального уравнения. В самом деле, если мы изменим начальные данные вдоль части начальной кривой C, находящейся вне дуги AB, не нарушая условия дифференцируемости, то мы получим другую интегральную поверхность, совпадающую с первоначальной интегральной поверхностью в точке P и во всех точках криволинейного треугольника ABP. Вдоль характеристик AP и BP к первоначальной интегральной поверхности примыкает отличная от нее интегральная поверхность с соблюдением условия двукратной дифференцируемости. Таким образом, вдоль каждой характеристической полоски действительно имеется возможность разветвления интегральной поверхности, причем множество различных интегральных поверхностей, имеющих между собой соприкосновение второго порядка вдоль данной характеристической полоски, так же велико, как и множество всех дважды непрерывно дифференцируемых продолжений начальных данных через конечные точки A и B дуги AB.

Заметим в заключение, что *характеристическая задача Коши* формулируется и решается в точности таким же образом, как и рассмотренная только что задача I.

§ 8. Общее уравнение $F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0$

Задача Коши для общего неквазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными сравнительно просто сводится к рассмотрениям § 7.

1. Квазилинейные системы с одинаковой главной частью. В § 6 мы рассмотрели системы дифференциальных уравнений вида (2) с m неизвестными функциями $u^1, \ldots, u^{(m)}$. Там же мы заметили, что к этому виду может быть приведена и более общая система

$$au^\nu_{xx}+bu^\nu_{xy}+cu^\nu_{yy}=f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_m)\,(\nu=1, \ldots, m), \qquad (1)$$

в которой a, b, c — фиксированные, не зависящие от ν функции от x, y, удовлетворяющие в рассматриваемой области условию $4ac-b^2<0$. Для этого достаточно ввести вместо x, y характеристические параметры α и β с помощью характеристических уравнений

$$x_\alpha=\rho_1 y_\alpha, \qquad x_\beta=\rho_2 y_\beta, \qquad a\rho^2-b\rho+c=0\ ^{1)}.$$

---

[1]) Если применить метод § 2, п. 3, то в качестве характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений получится m-ая степень уравнения $a\rho^2-b\rho+c=0$.

Заметим сначала, что изложенная в § 7 теория непосредственно применима и к квазилинейным системам дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Другими словами, мы можем считать решенной задачу Коши для системы вида (1) также и в том случае, когда коэффициенты a, b и c являются функциями не только x, y, но зависят также и от величин $u^1, \ldots, u^{(m)}$ и производных $p_1, \ldots, q_m$. Рассуждения § 7 почти дословно переносятся на такую систему, и мы считаем возможным не приводить их здесь вторично.

К такой квазилинейной системе второго порядка с одинаковой главной частью мы сейчас приведем общую задачу с помощью простого искусственного приема.

2. Решение задачи Коши в общем случае. Решим теперь задачу Коши III для дифференциального уравнения

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t)=0. \tag{2}$$

Пусть задана начальная полоска C_2 второго порядка: $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $t(\lambda)$. При этом $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$, и выполняются условия полоски вдоль C_2

$$\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}, \qquad \dot{p}=r\dot{x}+s\dot{y}, \qquad \dot{q}=s\dot{x}+t\dot{y},$$

а также соотношение $F=0$ между x, y, u, p, q, r, s, t вдоль полоски C_2 [1]). Пусть, далее, C_2 — гиперболическая полоска, т. е. пусть вдоль C_2 имеет место неравенство

$$4F_rF_t-F_s^2<0 \tag{3}$$

и пусть C_2 нигде не характеристична, так что всюду на C_2

$$F_r\dot{y}^2-F_s\dot{x}\,\dot{y}+F_t\dot{x}^2\neq 0, \tag{4}$$

причем функция F — трижды, а функции $x(\lambda), \ldots, t(\lambda)$ однажды непрерывно дифференцируемы.

Требуется в некоторой достаточно малой окрестности C_2 построить трижды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (2), проходящее через начальную полоску C_2. Мы утверждаем: *такое решение существует, является единственным и зависит в точке $P(x, y, u)$ только от того начального куска линии C, который вырезается из C обеими характеристиками, проходящими на интегральной поверхности $u(x, y)$ через точку P.*

Чтобы доказать это, мы сводим нашу задачу III к задаче IV рассмотренного в п. 1 типа. Для этой цели введем наряду с неизвестной функцией u еще две неизвестные функции u^1 и u^2, полагая

$$u_x=u^1, \qquad u_y=u^2,$$

---

[1]) Таким образом, заранее предполагается, что C_2 — интегральная полоска второго порядка. В сущности говоря, можно задавать только полоску первого порядка; однако, так же как и в случае дифференциальных уравнений первого порядка, приведенная формулировка является более удобной, так как она избавляет нас от исследования разрешимости соответствующей системы уравнений.

и заменим в нашем дифференциальном уравнении r, s и t значениями

$$r = u^1_x, \qquad s = u^1_y, \qquad t = u^2_y.$$

Далее, дифференцируем уравнение $F=0$ по x и по y и записываем результат в форме

$$F_r u^1_{xx} + F_s u^1_{xy} + F_t u^1_{yy} + F_p u^1_x + F_q u^1_y + F_u u^1 + F_x = 0, \qquad (5)$$

$$F_r u^2_{xx} + F_s u^2_{xy} + F_t u^2_{yy} + F_p u^2_x + F_q u^2_y + F_u u^2 + F_y = 0, \qquad (6)$$

причем r, s, t, p, q всюду должны быть заменены через

$$u^1_x,\ u^1_y,\ u^2_x,\ u^1,\ u^2.$$

К системе уравнений (5) и (6) присоединим третье уравнение

$$F_r u_{xx} + F_s u_{xy} + F_t u_{yy} - F_r u^1_x - F_s u^1_y - F_t u^2_y = 0, \qquad (7)$$

которое становится тривиальным, если под u^1 и u^2 действительно подразумевать производные функции u.

Отвлекаясь от первоначального смысла u^1 и u^2, будем теперь рассматривать систему трех уравнений (5), (6) и (7), как систему трех квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с тремя неизвестными функциями u, u^1, u^2. Эта система имеет в точности вид рассмотренной выше системы второго порядка с одинаковой главной частью. Начальным условиям задачи III соответствуют начальные условия для u, u^1, u^2, u_x, u_y, u^1_x, u^1_y, u^2_x, u^2_y. Задачу нахождения системы решений системы уравнений (5), (6), (7), удовлетворяющей этим начальным условиям, обозначим римской цифрой IV. Эта новая задача является в точности задачей только что рассмотренного вида. Решение задачи III дает нам непосредственно решение соответствующей задачи IV. С другой стороны, на основании рассмотрений п. 1 мы должны считать задачу IV уже решенной нами, так что этим исчерпывается вопрос о единственности и об области зависимости. Таким образом, задача III будет полностью решена после того, как будет доказано, что решение задачи IV дает, обратно, решение задачи III. Мы докажем это, учитывая специальный характер начальных условий задачи IV в том виде, как они получаются путем перенесения начальных условий задачи III на задачу IV.

Для этой цели введем вспомогательные величины

$$X = u_x - u^1, \qquad Y = u_y - u^2, \qquad Z = u^1_y - u^2_x.$$

По условию эти величины имеют для задачи IV нулевые начальные значения вдоль C. Точно так же вдоль C обращаются в нуль производные X_x, X_y, Y_x, Y_y, Z_x, Z_y. Далее, заметим, что имеет место тождество

$$X_y - Y_x = -Z.$$

Считая поэтому на основании п. 1 задачу IV решенной, мы докажем, что вместе с этим разрешается также и задача III, если нами будет установлено, что условия $X = Y = 0$ имеют место не только вдоль начальной кривой, но и всюду на решении задачи IV.

В самом деле, доказав это, можно будет уравнения (5) и (6) представить в виде $F_x = F_y = 0$, так что $F = \text{const.}$, а в силу начального условия $F = 0$ мы получим, что всюду будет иметь место уравнение $F = 0$.

Переходим к доказательству соотношений $X = 0$ и $Y = 0$.

Докажем прежде всего следующее: величины X, Y, Z, которые после решения задачи IV мы можем рассматривать как известные функции от x и y, удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений вида

$$F_r X_{xx} + F_s X_{xy} + F_t X_{yy} + \ldots = 0, \tag{8}$$

$$F_r Y_{xx} + F_s Y_{xy} + F_t Y_{yy} + \ldots = 0, \tag{9}$$

$$F_r Z_{xx} + F_s Z_{xy} + F_t Z_{yy} + \ldots = 0, \tag{10}$$

где многоточиями обозначены выражения, линейные и однородные относительно X, Y, Z и первых производных $X_x, \ldots, Z_y$. При этом величины u^1_x, u^1_y, u^2_y, u^1, u^2, u, входящие в коэффициенты этой системы дифференциальных уравнений, должны быть заменены их выражениями через x, y, имеющими место вдоль рассматриваемого решения задачи IV; тогда для этого частного решения задачи IV, которое только нас теперь и интересует, эти коэффициенты становятся определенными функциями от x и y. Дальше мы будем рассуждать так: система дифференциальных уравнений (8), (9) и (10) является линейной системой уравнений с одинаковой главной частью относительно неизвестных функций X, Y, Z. В § 6 была доказана единственность решения задачи Коши для такой системы. Так как начальные значения X, Y, Z и их первых производных равны нулю, то в силу этой теоремы о единственности решение $X = Y = Z = 0$ является единственным решением этой задачи Коши для рассматриваемой однородной системы дифференциальных уравнений; соотношения $X = Y = Z = 0$ будут тогда доказаны. Итак, для окончания нашего доказательства мы должны только убедиться в справедливости системы дифференциальных уравнений (8), (9), (10). Для этой цели произведем следующее небольшое формальное вычисление.

Выведем прежде всего уравнение (10). Для этого составим следующие выражения:

$$F_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_r u^1_{xx} + F_s u^1_{xy} + F_t u^2_{xy} + F_p u^1_x + F_q u^2_x + F_u u_x + F_x, \tag{11}$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_r u^1_{xy} + F_s u^1_{yy} + F_t u^2_{yy} + F_p u^1_y + F_q u^2_y + F_u u_y + F_y. \tag{12}$$

Скобки в левых частях указывают, что прежде чем дифференцировать, мы должны в F сначала заменить u, p, q, r, s и t их выражениями через x и y.

Эти выражения удовлетворяют, очевидно, условию

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{13}$$

Прибавим теперь к уравнению (5) выражение F_1-F_1, тождественно равное нулю, а к уравнению (6) выражение F_2-F_2; перегруппировав члены, мы получим:

$$F_t(u^1_{yy}-u^2_{xy})+F_q(u^1_y-u^1_x)+F_u(u^1-u_x)+F_1=0 \tag{14}$$

и

$$F_r(u^2_{xx}-u^1_{xy})+F_s(u^2_{xy}-u^1_{yy})+F_p(u^2_x-u^1_y)+$$
$$+F_u(u^2-u_y)+F_2=0 \tag{15}$$

или

$$F_tZ_y+F_qZ-F_uX+F_1=0, \tag{16}$$

$$F_rZ_x+F_sZ_y+F_pZ+F_uY-F_2=0. \tag{17}$$

Присоединим сюда еще уравнение (7), записывая его в виде

$$F_rX_x+F_sX_y+F_tY_y=0. \tag{18}$$

Дифференцируем теперь уравнение (16) по y, а уравнение (17) по x и складываем полученные уравнения. Мы получим уравнение:

$$F_rZ_{xx}+F_sZ_{xy}+F_tZ_{yy}+\ldots=0; \tag{10}$$

многоточие здесь, как и в дальнейшем, обозначает выражение, линейное и однородное относительно величин X, Y, Z и их первых производных.

Дифференцируя уравнение (18) по x и заменяя Y_{xy} через $Y_{xy}=$ $=X_{yy}+Z_y$, мы получим уравнение:

$$F_rX_{xx}+F_sX_{xy}+F_tX_{yy}+\ldots=0. \tag{8}$$

Дифференцируя то же уравнение по y и заменяя X_y через $X_y=Y_x-Z$, мы получим:

$$F_rY_{xx}+F_sY_{xy}+F_tY_{yy}+\ldots=0. \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) и (10) дают нам искомую систему, и наше доказательство, таким образом, доведено до конца.

Заметим еще раз, что точно такие же рассуждения дают нам решение характеристической задачи Коши.

Далее, заметим, что совершенно аналогично решается задача Коши и *для дифференциального уравнения* n-*го порядка вполне гиперболического типа*. Такое дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в виде

$$F(x,\ y,\ u,\ \ldots,\ r_0,\ \ldots,\ r_n)=0, \tag{19}$$

где ради краткости положено $r_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$, а многоточиями обозначены производные порядков ниже n.

Мы раньше назвали вполне гиперболической интегральной полоской n-го порядка такую начальную интегральную полоску n-го порядка, для которой алгебраическое уравнение n-ой степени относительно ρ

$$F_{r_n}\rho^n - F_{r_{n-1}}\rho^{n-1} + \ldots = 0 \tag{20}$$

имеет n различных вещественных корней (см. стр. 342).

В этом случае изложенная выше теория сохраняет силу. Не останавливаясь здесь на доказательстве, ограничимся ссылкой на имеющуюся литературу[1]).

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

§ 1. Введение комплексных величин. Переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью комплексных переменных

Рассмотрения гл. V, § 6, п. 2 остаются в силе почти без изменений и в том случае, когда функция f или коэффициенты $a_{\nu\mu}$ являются комплексными функциями от вещественных независимых переменных x и y. Мы должны тогда и решения $u = u_1 + iu_2$ также расщепить на вещественную и мнимую часть, что дает нам вместо n или N уравнений с комплексными коэффициентами в два раза большее число вещественных уравнений того же типа для функций u_1 и u_2.

При этом остаются в силе теория интегрирования, теоремы о единственности, а также все наши результаты относительно непрерывной и дифференцируемой зависимости решений от параметров.

Если в дифференциальном уравнении $F(x, y, u, \ldots) = 0$ левая часть является аналитической функцией от всех своих аргументов и если, кроме того, известно, что решение $u(x, y)$ зависит аналитически от x и y, то дифференциальное уравнение и его решение могут быть аналитически продолжены на комплексную область, и мы можем рассматривать переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$ как комплексные переменные. При этом исчезает различие между типами дифференциальных уравнений, существенно связанное с вещественностью независимых переменных, и становится принципиально возможным переход от эллиптического типа к гиперболическому.

Простейший и вместе с тем важнейший пример этого дает дифференциальное уравнение

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

эллиптическое в вещественной области. Допустим, что правая часть является аналитической функцией от своих пяти аргументов. Если предположить, сверх того, что решение u зависит аналитически от x

---

[1]) Фридрихс и Леви, *Math. Ann.*, т. 99.