ГЛАВА VI

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ($n > 2$)

В случае гиперболических дифференциальных уравнений с n независимыми переменными, где $n > 2$, теория характеристик попрежнему является необходимой для более глубокого понимания природы такого уравнения, хотя при $n > 2$ она уже не дает возможности довести до конца процесс интегрирования дифференциального уравнения.

В настоящей главе мы прежде всего изложим теорию характеристик, причем ход наших рассуждений будет во многом аналогичен рассмотрениям гл. V.

Так же, как и для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, в случае $n > 2$ в качестве нового обстоятельства возникает необходимость рассматривать наряду с характеристическими многообразиями $n - 1$ измерений и характеристическими кривыми также и *бихарактеристики* или *характеристические лучи*[1]. Во второй части этой главы мы подробнее остановимся на процессе интегрирования дифференциальных уравнений и рассмотрим, главным образом, линейные задачи с постоянными коэффициентами.

§ 1. Характеристическое уравнение

Уже в гл. III, § 3 мы ввели классификацию дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью «характеристического соотношения». Отправляясь теперь от задачи Коши, мы вновь придем к тем же результатам, совершенно независимо от предыдущего, с новой, более глубокой точки зрения. Мы снова берем за основу вопрос о том, в какой мере заданное дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений определяет искомую функцию вдоль начального многообразия и, в частности, исследуем, в каком случае начальные данные вдоль начального многообразия однозначно определяют производные высших порядков.

---

[1]) По теории характеристик и волн см. Адамар, Propagation des ondes, Париж, 1903; Леви-Чивита, Characteristiche dei Sistemi Differenziali e Propagazione ondosa, Bologna. См. также Thomas and Titt, *Ann. of Math.*, т. 34 (1933), стр. 1—80.

1. Квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим сначала в качестве наиболее важного случая *квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка*

$$L[u]+D=\sum a_{ik}u_{ik}+D=0, \tag{1}$$

причем коэффициенты $a_{ik}=a_{ki}$ и величина D являются заданными функциями от n независимых переменных, величины u и частных производных $u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$; через u_{ik} здесь обозначены производные второго порядка:

$$u_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Вообще мы в настоящей главе условимся раз навсегда, что индексы при буквах, означающих неизвестные функции, обозначают частные производные, как, например, u_i, φ_i, ψ_i, ω_i; u_{ik}, φ_{ik}, ψ_{ik}, ω_{ik}, тогда как индексы при буквах, обозначающих коэффициенты, например, a, b, c, α, β, γ, являются индексами в обычном смысле слова. Напомним дальше, что при отсутствии противоположной оговорки мы считаем все встречающиеся величины непрерывными в рассматриваемой области.

Для дифференциального уравнения (1) мы рассматриваем теперь следующую задачу Коши: в пространстве R_n переменных $x_1,\ldots,x_n$ уравнением $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ задано *основное многообразие* C_0, которое мы представляем себе выраженным также с помощью параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ таким образом, что функции

$$\lambda_1=\lambda_1(x_1,\ldots x_n);\ldots,\lambda_{n-1}=\lambda_{n-1}(x_1,\ldots x_n) \text{ и } \lambda_n=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

производят взаимно однозначное отображение некоторой окрестности точки M на n-мерную область пространства $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Пусть вдоль C_0 задано начальное значение функции u как функции параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$, так что этим определяется в пространстве R_{n+1} переменных x и u *начальное многообразие* C: $x_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$, $\ldots, x_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$, $u(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})$. Это начальное точечное многообразие мы дополняем до *начального тангенциального многообразия* или, короче, до *полоски первого порядка* C_1, присоединяя n величин p_i как функции параметров $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$, причем эти величины должны удовлетворять условиям касания, или условиям полоски

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_\nu}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_\nu} (\nu=1,2,\ldots,n-1),$$

или, короче,

$$du=\sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i.$$

Мы говорим, что функция $u(x_1,\ldots,x_n)$ содержит полоску первого порядка C_1, если вдоль многообразия $\varphi=0$ функция u и производ-

ные u_i совпадают с перечисленными выше величинами, определяющими полоску. Соответственным образом мы можем определить полоску второго порядка C_2, задавая вдоль C_0 также значения p_{ik}, удовлетворяющие условиям полоски:

$$dp_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, dx_k.$$

Мы ставим себе, прежде всего, следующий вопрос: в какой мере дифференциальное уравнение (1) определяет вдоль заданной начальной полоски C_1 решение u, содержащее эту полоску? Можно ли с помощью этого дифференциального уравнения определить однозначно вдоль полоски также и производные второго и высших порядков? Заметим, что, поскольку поставленный вопрос относится только к достаточно малой окрестности полоски, то мы можем его уточнить следующим образом: назовем полоску второго порядка C_2, для которой величины $u_i = p_i$ и $u_{ik} = p_{ik}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1), *интегральной полоской*; тогда наша задача сводится к тому, чтобы узнать, может ли заданная полоска первого порядка быть однозначно дополнена до интегральной полоски второго порядка.

Чтобы ответить на этот вопрос, заменим в дифференциальном уравнении (1) переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ новыми переменными $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ и $\lambda_n = \varphi$.

Дифференциальное уравнение примет тогда следующий вид:

$$\sum_{i,k=1}^{n} u_{\lambda_i\lambda_k} Q(\lambda_i, \lambda_k) + \sum_{i=1}^{n} u_{\lambda_i} L[\lambda_i] + D = 0 \tag{2}$$

или

$$u_{\varphi\varphi} Q(\varphi\varphi) + \ldots = 0, \tag{3}$$

причем

$$Q(\lambda_i, \lambda_k) = \sum_{l,s=1}^{n} a_{ls} \frac{\partial\lambda_i}{\partial x_l} \frac{\partial\lambda_k}{\partial x_s}, \tag{4}$$

а многоточие в уравнении (3) обозначает сумму членов, однозначно определяемых вдоль полоски C_1 величинами первого порядка, характеризующими полоску, т. е. членов, содержащих величины полоски первого порядка и их внутренние производные, т. е. производные по параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Так как вдоль полоски известны все те вторые производные функции u, которые получаются внутренним дифференцированием, т. е. дифференцированием по первым $n-1$ параметрам, то единственной второй производной, не определяемой внутри C_1 с помощью начальных данных, является вторая внешняя производная $u_{\varphi\varphi} = u_{\lambda_n\lambda_n}$.

Но эту вторую внешнюю производную и, следовательно, все вторые производные мы можем однозначно определить в каждой точке P полоски C_1 тогда и только тогда, когда $Q(\varphi, \varphi)$ нигде

не обращается в нуль вдоль полоски C_1. Таким образом, получается следующая *альтернатива в отношении каждой точки P полоски C_1*, подлежащей дополнению до интегральной полоски C_2: либо вторая внешняя производная $u_{\varphi\varphi}$, а вместе с ней все другие производные второго порядка однозначно определяются в данной точке с помощью задания полоски первого порядка, либо дифференциальное уравнение дает дальнейшее условие, которому должны удовлетворять величины полоски, характеризующие полоску первого порядка C_1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что вдоль *всей* полоски C_1 имеет место либо первый, либо второй случай. В первом случае мы называем полоску C_1 *обыкновенной*, а во втором случае — *особой*. Особая начальная полоска C_1 характеризуется тем, что вдоль такой полоски выполняется *характеристическое условие*

$$Q(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0. \tag{5}$$

В том случае, когда особая полоска может быть дополнена до интегральной полоски, мы называем ее *характеристической полоской первого порядка*.

Подчеркнем, что хотя характеристическое условие (5) имеет внешний вид уравнения в частных производных первого порядка относительно φ, оно по своему определению еще не является таковым. В самом деле, условие (5) не должно выполняться тождественно относительно n переменных $x_1, \ldots, x_n$, а только вдоль кривой C_1. Мы можем, однако, привести уравнение (5) к виду уравнения в частных производных с неизвестной функцией от $n-1$ переменных, введя, например, в качестве независимых параметров величины $\lambda_1 = x_1, \ldots, \lambda_{n-1} = x_{n-1}$ и задавая кривую C_0 в форме $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда характеристическое условие действительно становится уравнением в частных производных для функции $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и принимает вид

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}\psi_i\psi_k - 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\psi_i + a_{nn} = 0, \tag{5'}$$

причем, разумеется, в коэффициентах a_{ik} величины u и $u_i = p_i$ должны быть всюду заменены их выражениями через $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Если с самого начала мы будем отправляться не от полоски C_1, а от заданной «интегральной поверхности» $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения (1), то вдоль такой интегральной поверхности величины u и производные $u_i = p_i$ являются известными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. Характеристическое условие (5), в котором мы теперь должны заменить входящие в коэффициенты a_{ik} величины u и u_i их выражениями через $x_1, \ldots, x_n$, определяет тогда *характеристические многообразия на данной интегральной поверхности*. Именно, всякая функция φ, для которой уравнение (5) имеет место, если $\varphi = 0$, дает характеристическое многообразие.

Если уравнение (5) *имеет место не только при условии* $\varphi=0$, *но выполняется тождественно относительно* $x_1, \ldots, x_n$, *то не только многообразие* $\varphi=0$, *но и любое многообразие семейства* $\varphi=\text{const.}=c$ *является характеристическим, так что мы получаем семейство характеристических многообразий, зависящее от одного параметра, которые, в свою очередь, образуют в своей совокупности всю данную интегральную поверхность. Обратно, если* $\varphi=c$ *есть семейство характеристических многообразий, то функция* φ *удовлетворяет характеристическому условию* (5) *как уравнению в частных производных первого порядка.*

В заключение заметим, что для характеристического многообразия дифференциальное выражение $L[u]$ *является внутренним дифференциальным выражением по отношению к полоске* C_1. Дифференциальное уравнение (2) можно тогда рассматривать вдоль C_1 как уравнение в частных производных первого порядка относительно внешней производной первого порядка $u_\varphi=\sigma$, выводящей за пределы C_1, причем все остальные величины, входящие в это уравнение, получаются из u исключительно внутренним дифференцированием относительно C_1.

Как уже было подчеркнуто в гл. III, все наши рассмотрения имеют смысл только тогда, когда существуют вещественные функции φ, удовлетворяющие характеристическому условию (5). Только в этом случае могут существовать характеристические многообразия. Необходимой предпосылкой всех наших рассмотрений является, таким образом, неопределенность (индефинитный характер) квадратичной формы $Q(\varphi, \varphi)$. Если Q — определенная квадратичная форма, то мы назвали дифференциальное уравнение *эллиптическим*. Мы здесь оставляем в стороне как этот случай, так и случай параболического вырождения, т. е. тот случай, когда с помощью линейного преобразования квадратичная форма Q от n переменных приводится к квадратичной форме от меньшего числа переменных. Мы предполагаем, что наша квадратичная форма является *неопределенной* и что *индекс инерции* этой формы, т. е. число отрицательных квадратов в каноническом виде формы, вдоль всей рассматриваемой полоски равняется единице, так что в каждой точке полоски форма Q с точностью до знака может быть с помощью линейного преобразования приведена к виду

$$X_1^2+\ldots+X_{n-1}^2-X_n^2.$$

Мы называем в этом случае дифференциальное уравнение *собственно гиперболическим* или просто *гиперболическим*. Типичным примером такого уравнения является, как мы видели, волновое уравнение

$$u_{11}+\ldots+u_{n-1,n-1}-u_{n,n}=0$$

с характеристическим условием

$$\varphi_1^2+\ldots+\varphi_{n-1}^2-\varphi_n^2=0.$$

Если индекс инерции квадратичной формы больше единицы, то мы называем дифференциальное уравнение *ультрагиперболическим*. Типичным примером такого уравнения служит уравнение

$$u_{11}+u_{22}-u_{33}-u_{44}=0$$

с характеристическим условием

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2-\varphi_3^2-\varphi_4^2=0.$$

2. Линейные дифференциальные уравнения. Характеристические лучи. Описанные в п. 1 обстоятельства принимают в случае линейных дифференциальных уравнений более наглядный характер и могут быть выражены в более простом и явном виде. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[u]+d=0, \tag{6}$$

где

$$L[u]=L'[u]+cu=\sum_{i,k}^{n} a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_i+cu,$$

причем коэффициенты a_{ik}, b_i, c, d являются заданными функциями от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Характеристическое условие (5) или (5′) зависит тогда только от основного многообразия C_0 полоски C_1 и не зависит, таким образом, от того, какую интегральную поверхность или интегральную полоску мы рассматриваем над основным многообразием C_0. В линейном случае мы можем, поэтому, говорить, что уже само основное многообразие C_0, заданное уравнением $\varphi=0$ как многообразие в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, является *характеристическим многообразием линейного дифференциального уравнения*, если при $\varphi=0$ выполняется условие

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k=0. \tag{5}$$

Гиперболический характер является, таким образом, в линейном случае свойством самого дифференциального уравнения, а не свойством, приобретаемым дифференциальным уравнением на данной полоске.

Связь между характеристическим условием (5) и характеристическим условием

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k-2\sum_{i=1}^{m} a_{i,n}\psi_i+a_{nn}=0 \qquad (m=n-1) \tag{5′}$$

выясняется с помощью следующего рассмотрения: пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое решение уравнения (5), рассматриваемого как дифференциальное уравнение в частных производных; тогда, разрешив уравнение $\varphi=0$ относительно x_n в форме

$$x_n=\psi(x_1, \ldots, x_m) \qquad (m=n-1),$$

мы получим, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ является решением дифференциального уравнения (5′); разрешив же уравнение $\varphi = c$ относительно x_n, мы получим семейство решений

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$$

уравнения (5′), зависящее от параметра c.

Обратно, если мы получили какое-нибудь семейство решений уравнения (5′) вида

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c),$$

зависящее от параметра c, то, записав это решение в форме, разрешенной относительно c, т. е. в виде

$$c = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

мы легко убедимся в том, что φ является решением уравнения в частных производных (5).

Пусть теперь $\varphi = 0$ — какое-нибудь характеристическое многообразие, так что функция φ удовлетворяет уравнению (5) при $\varphi = 0$; тогда, как мы видели, соответствующая функция $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ является решением уравнения в частных производных (5′). Но всякое решение такого уравнения в частных производных первого порядка может быть включено в семейство решений $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$, зависящее от одного параметра c[1]). Разрешая это уравнение относительно c, мы снова получим соответствующее решение уравнения в частных производных (5).

Из предыдущего следует, таким образом, что *всякое характеристическое многообразие может быть включено в семейство характеристических многообразий $\varphi = c$, зависящее от одного параметра c.*

Мы имеем поэтому право всякое характеристическое многообразие $\varphi = 0$ считать представителем семейства $\varphi = c$ характеристических многообразий, так что уравнение *всякого* характеристического многообразия может быть записано в виде $\varphi = 0$, где функция φ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (5) *не только при условии* $\varphi = 0$, *но тождественно относительно* $x_1, \ldots, x_n$ *и является решением этого уравнения, как уравнения в частных производных.*

В качестве примера рассмотрим в случае $n = 3$ дифференциальное уравнение $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ и конус $\chi = t^2 - x^2 - y^2 = 0$.

Функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi_t^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2 = 4\chi.$$

Отсюда следует, что конус $\chi = 0$ является характеристической поверхностью, тогда как поверхности $\chi = c$ при $c \neq 0$ уже не являются характеристическими поверхностями.

---

[1] Мы можем, например, решения этого уравнения в частных производных определять согласно гл. II с помощью задания начальных значений, зависящих от параметра c.

Если же мы включим конус $\chi = 0$ в семейство конусов

$$\varphi = t - \sqrt{x^2 + y^2} = c,$$

то функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 = 0,$$

и, следовательно, все поверхности семейства $\varphi = c$ являются характеристическими поверхностями данного дифференциального уравнения.

Приведем теперь некоторые простые *теоремы об инвариантности*, важные для дальнейшего.

Пусть при преобразовании $\xi_\nu = \xi_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция $u(x)$ переходит в функцию $\omega(\xi)$ и пусть при этом

$$L[u] = L'[u] + cu = \sum \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \sum \beta_\mu \omega_\mu + c\omega = \Lambda[\omega] = \Lambda'[\omega] + c\omega.$$

Тогда наряду с соотношением $L[u] = \Lambda[\omega]$ имеет место также соотношение $L'[u] = \Lambda'[\omega]$.

Далее, *характеристики инвариантны относительно любого преобразования независимых переменных.*

Этот факт, прежде всего, непосредственно вытекает из самого смысла характеристического условия.

Убедимся в этом и вычислительным путем: положим для нашего преобразования $\tau_{ji} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$ и пусть рассматриваемое дифференциальное выражение преобразуется по формуле

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \ldots = \sum \alpha_{ik}\omega_{ik} + \ldots,$$

причем

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) = u(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{а} \quad \alpha_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}.$$

Если теперь

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то отсюда непосредственно вытекает тождество

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{ik} \alpha_{ik}\psi_i\psi_k,$$

которое и выражает наше утверждение.

Часто является полезным, пользуясь этой инвариантностью, преобразовать характеристическое многообразие в координатную плоскость $x_n = 0$. Это дает следующий результат:

Для того, чтобы плоскость $x_n = 0$ являлась характеристическим многообразием, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0. \tag{7}$$

Для того же, чтобы семейство плоскостей $x_n = \text{const}$. было семейством характеристических многообразий, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент $a_{nn}(x_1, \ldots, x_n)$ тождественно равнялся нулю.

Чтобы глубже проанализировать характеристические многообразия, введем понятие *характеристических кривых или лучей*.

Для этой цели рассмотрим в n-мерном пространстве R_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ некоторую поверхность C_0, заданную уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ или, в более общем виде, $\varphi = c = \text{const}$. Каждой точке этой поверхности мы сопоставляем направление вектора, компоненты которого пропорциональны величинам

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_k. \tag{8}$$

Другими словами, мы сопоставляем каждому элементу поверхности C_0, задаваемому коэффициентами φ_k уравнения касательной плоскости[1]), линейный элемент $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}$, представляя себе при этом некоторые кривые, заданные функциями $x_i(s)$ параметра s, причем мы задаем пока только производные этих функций в рассматриваемой точке поверхности C_0. Это направление называется *трансверсальным направлением* (см. гл. II, дополнения, § 1).

Дифференцирование по s

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9}$$

называется *трансверсальным к C_0 дифференцированием*.

Касательная плоскость к C_0 и трансверсальное направление взаимно *сопряжены относительно поверхности второго класса*

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k = 0,$$

где величины $\xi_i = \varphi_i$ означают тангенциальные координаты.

Мы можем теперь высказать следующую теорему:

Поверхность M является характеристической тогда и только тогда, когда во всех ее точках трансверсальное направление касается поверхности; в этом случае трансверсальное дифференцирование является внутренним дифференцированием относительно M.

В самом деле, мы можем характеристическое условие записать в форме

$$\sum \dot{x}_i\varphi_i = 0,$$

что и доказывает нашу теорему.

Трансверсальное дифференцирование инвариантно относительно любых преобразований независимых переменных.

---

[1]) Направляющие косинусы нормали к касательной плоскости задаются выражениями $\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum \varphi_i^2}}$.

Действительно, из предыдущих замечаний следует, что для любой функции ψ билинейная форма

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \psi_i,$$

принадлежащая к квадратичной форме Q, инвариантна относительно любого преобразования независимых переменных.

Уравнения (8) мы можем при заданной функции φ рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решения этой системы мы называем *трансверсальными кривыми семейства поверхностей* $\varphi = \text{const}$. Если семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$. является семейством характеристических поверхностей, т. е. если φ удовлетворяет уравнению (5), как уравнению в частных производных, то функция φ является интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8), т. е. вдоль каждой интегральной кривой этой системы имеет место уравнение $\varphi = \text{const}$. *Таким образом, характеристические многообразия* $\varphi = c$ *имеют своими образующими интегральные кривые системы* (8). *Каждое из этих многообразий образуется семейством интегральных кривых системы* (8), *зависящим от* $n-2$ *параметров.*

Доказательство. Вдоль интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) φ становится функцией от s и мы имеем:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \sum a_{ik} \varphi_k \varphi_i = 0.$$

Если семейство $\varphi = \text{const}$. является семейством характеристических многообразий, то мы называем интегральные кривые системы дифференциальных уравнений (8) *характеристическими лучами данного дифференциального уравнения второго порядка* (1). Они являются не чем иным, как характеристиками дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (5) в смысле второй главы и называются поэтому *бихарактеристиками*, так как дифференциальное уравнение (5) само является характеристическим дифференциальным уравнением по отношению к первоначальному уравнению (1).

Наша теорема об образовании характеристических многообразий из характеристических лучей доказана в предположении, что $\varphi = c = \text{const}$. является *семейством* характеристических многообразий. Но раньше было доказано, что всякое характеристическое многообразие может быть включено в такое семейство; поэтому наша теорема остается справедливой и в том случае, когда мы рассматриваем только одно изолированное характеристическое многообразие.

Отсюда следует, что мы можем определить характеристические лучи независимо от характеристических многообразий $\varphi = c$ следующим образом:

Характеристические лучи дифференциального уравнения второго порядка (1) *совпадают с характеристическими кривыми характеристического дифференциального уравнения первого по-*

рядка (5). *Мы можем поэтому получить совокупность всех характеристических лучей на основании гл.* II, § 7 *с помощью интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} p_k; \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum a_{lk} p_l p_k\right),$$

которая вместе с тем дает нам и координаты полоски p_i.

Если коэффициенты a_{ik} *уравнения в частных производных* (1) *постоянны, то все характеристические лучи являются прямыми линиями.*

В самом деле, уравнение (5) имеет в этом случае в качестве полных интегралов φ семейства линейных функций, и дифференциальные уравнения $\dot{x}_i = \sum_k a_{ik}\varphi_k$ дают тогда непосредственно прямые линии.

Совокупность всех лучей, принадлежащих к линейному дифференциальному уравнению в частных производных (1), зависит только от конечного числа, а именно, $2n-1$ параметров.

Заметим попутно следующее: условие, которому должны удовлетворять характеристические многообразия, принадлежащие в смысле гл. II, § 7 к характеристическому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (5), совпадает с самим этим дифференциальным уравнением.

Поясним предыдущее на простейшем примере волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_mx_m} = 0,$$

где мы полагаем $x_{m+1} = t$. Характеристическое условие имеет в этом случае вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \ldots - \varphi_{x_m}^2 = 0,$$

а характеристическими лучами являются прямые пространства x, t, задаваемые уравнениями вида $x_i = a_i + \alpha_i t$, где коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ подчинены условию $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 1$.

Если же мы будем рассматривать наши решения не в n-мерном пространстве x, t, а в m-мерном пространстве одних только переменных x, считая t параметром времени, от которого зависят интересующие нас величины и поверхности, то в этом пространстве совокупность бихарактеристик совпадает с совокупностью *всех* прямых линий, пробегаемых со скоростью, равной единице. Если мы зададим характеристические многообразия уравнениями вида $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$, то функции ψ должны удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных $\sum_{i=1}^{m} \psi_i^2 = 1$.

Таким образом, каждое характеристическое многообразие волнового уравнения изображается семейством поверхностей $\psi = t$ в про-

странстве переменных x_i, состоящим из параллельных поверхностей, получающихся из некоторой начальной поверхности путем параллельного перемещения вдоль нормалей со скоростью, равной единице. Характеристические лучи изображаются в пространстве x-ов соответствующими ортогональными траекториями.

С помощью характеристического конуса (конуса Монжа) гиперболического дифференциального уравнения $L[u]=0$ мы получаем в пространстве x-ов при $n>2$ следующее очень важное деление нехарактеристических элементов поверхности и соответственно нехарактеристических направлений на два типа. Мы говорим, что данный нехарактеристический элемент поверхности является элементом *пространственного типа*, если он не содержит ни одного характеристического направления, т. е. если его плоскость не пересекает характеристического конуса. Мы говорим далее, что данное *направление* является направлением *временного типа*, если оно трансверсально к элементу поверхности пространственного типа.

Мы предполагаем, что данное гиперболическое дифференциальное уравнение приводится в данной точке к каноническому виду, дающему распределение знаков $+---\ldots$ (если получается распределение знаков $-++\ldots$, то мы можем умножением на -1 привести уравнение к предыдущему виду). В этом случае поверхность $\varphi=0$ является в данной точке поверхностью пространственного типа, если в этой точке выполняется условие

$$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k>0.$$

Соответственно этому линейный элемент dx_i является элементом временного типа, если выполняется условие

$$\sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k>0,$$

где (A_{ik}) означает матрицу, обратную относительно матрицы (a_{ik}). Легко убедиться, что *всякий элемент поверхности, проходящий через линейный элемент временно́го типа, является элементом поверхности временно́го типа.*

§ 2. Характеристические многообразия как поверхности разрывов. Фронт волны

1. Разрывы второго порядка. Характеристические многообразия играют такую важную роль в физических приложениях прежде всего в силу того обстоятельства, что только вдоль таких многообразий могут иметь место известного рода *разрывы решений дифференциальных уравнений с частными производными*. Чтобы осветить с этой точки зрения еще раз понятие характеристик, найдем условие, которому должна удовлетворять поверхность $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ для того, чтобы существовало решение u дифференциального уравнения $L[u]=0$, обладающее следующими свойствами: u и все первые производные u_i, а также все внутренние относительно поверхности про-