

Эта формула совпадает с полученными в § 5, п. 7 выражениями (81) и (82) при $m = 3$.

Формулы (50) и (51) ясно показывают, что принцип Гюйгенса, как мы это уже заметили в п. 1 для общего случая, имеет место только тогда, когда $W = 0$, что для рассмотренной задачи равносильно условию $c = 0$.

§ 10. Некоторые замечания о понятии волны и проблеме излучения

1. Общие замечания. Проходящие волны, распространяющиеся без искажений. Вернемся еще раз к понятию волны в его различных видах и проанализируем его глубже.

Мы определяем первоначально «волну» как любой процесс распространения во времени и пространстве, изображаемый решением и totally гиперболического дифференциального уравнения.

В противоположность этому общему определению, отождествляющему понятие волны с понятием решения дифференциального уравнения, *фронт волны* или *характеристическое многообразие* не является решением данного дифференциального уравнения распространения волны порядка k , если $k > 1$, а представляет собой лишь возможную поверхность разрывов решений этого дифференциального уравнения.

Характеристические многообразия удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, левая часть которого является однородной функцией k -го измерения относительно частных производных. Соответствующие *лучи*, вдоль которых распространяются эти разрывы (см. § 2), служат характеристиками этого уравнения в частных производных первого порядка, которое является не чем иным, как *уравнением Эйконала* или *уравнением Гамильтона* (см. гл. II, § 9), принадлежащим канонической системе характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей.

Чтобы осветить с новой и более глубокой точки зрения связь, существующую между дифференциальным уравнением распространения высшего порядка, с одной стороны, характеристическим уравнением в частных производных первого порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей, — с другой, мы возьмем в качестве исходного понятия не общее понятие волны как решения дифференциального уравнения распространения, а более частное понятие «проходящей волны». Мы ограничимся при этом линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0. \quad (1)$$

С понятием «проходящей волны» мы уже встречались в гл. III, § 5. Мы под этим подразумевали решения линейных гиперболических уравнений, имеющие вид

$$u = W[A(x, t)],$$

где $t = x_n$ — переменная времени, а W — форма волны. Функция $A(x, t)$, которая в гл. III, § 5 была линейной, здесь уже не подчинена этому требованию и может быть произвольной. Мы назовем эту функцию *фазовой функцией* или *фазой волны*. На поверхностях равной фазы $A = \text{const.} = c$ функция u имеет постоянные значения, и эта фазовая поверхность, рассматриваемая при постоянном t как поверхность в пространстве x , перемещается в пространстве с течением времени t .

Если выражение $u = W[A(x, t)]$ является решением дифференциального уравнения не только при определенной функции W , но и для любой, произвольной функции W , то мы называем эту совокупность решений семейством *неискажающихся проходящих волн*.

Мы рассматривали раньше также и другие «относительно неискажающиеся» проходящие волны, например, сферические волны и затухающие волны; дадим теперь общую формулировку этих понятий и свяжем их с понятием характеристик, причем мы уже не станем выделять переменной времени t .

Назовем *семейством относительно неискажающихся волн*, принадлежащим к линейному дифференциальному уравнению (1), семейство решений, зависящих от произвольной функции $W(\varphi)$ и имеющих вид

$$u(x) = g(x) W[\varphi(x)], \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

причем «коэффициент искажения» $g(x)$ представляет собой некоторую фиксированную функцию от переменных x_i .

Легко убедиться в том, что «фазовая функция» $\varphi(x)$ должна быть характеристической, т. е. должна удовлетворять характеристическому дифференциальному уравнению

$$\sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0, \quad (3)$$

так что уравнение $\varphi = \text{const.}$ определяет семейство характеристических многообразий¹⁾ (точнее, семейство проекций характеристических многообразий на пространство x).

Далее, должны иметь место соотношения

$$L[g] = 0, \quad (4)$$

$$A[g] = 2 \sum_{i,k} a_{ik} \varphi_i g_k + (\sum a_{ik} \varphi_{ik} + \sum b_i \varphi_i) g = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Этот факт можно, между прочим, доказать и непосредственно, исходя из определения характеристик как возможных поверхностей разрывов решений, рассматривая, в частности, решения, принадлежащие выделенному нами семейству волн. Путем предельного перехода от некоторой последовательности функций W мы можем образовать такую функцию $W(\varphi)$, для которой производная второго порядка W'' имеет точку разрыва при $\varphi = 0$. Отсюда следует, что поверхность $\varphi = 0$ должна быть фронтом волны, т. е. характеристической поверхностью.

Мы получим эти соотношения, подставив выражение (2) для $u(x)$ в дифференциальное уравнение (1) и учитывая, что ввиду произвольности функции W коэффициенты при W , W' и W'' должны равняться нулю.

Характеристическое условие (3) соответствует при альтернативе, формулированной в гл. III, § 5, требованию, чтобы для таких семейств неискажающихся волн скорость распространения волны не была произвольной, а определялась заданием направления распространения волны. Коэффициент искажения g должен, кроме дифференциального уравнения (4), также удовлетворять еще и дифференциальному уравнению первого порядка (5).

Таким образом, возникает следующая задача: найти все линейные гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка, для которых существуют семейства неискажающихся волн.

Заметим, что наряду с дифференциальным уравнением $L[u] = 0$ рассматриваемым свойством обладают также все эквивалентные ему дифференциальные уравнения. При этом мы называем два дифференциальных уравнения $L[u] = 0$ и $L^*[u^*] = 0$ эквивалентными, если они переходят друг в друга с помощью преобразования вида

$$x_i^* = a_i(x_1, \dots, x_n), \quad u^* = f(x) u.$$

В случае $n = 2$, $x = x_1$, $y = x_2$ наша задача решается очень просто, и мы получаем следующий результат:

В случае двух переменных x и y единственными дифференциальными уравнениями, для которых существуют семейства неискажающихся проходящих волн, распространяющихся по одному из двух противоположных направлений пространственной оси, являются дифференциальные уравнения, эквивалентные уравнению $u_{xy} = 0$.

В самом деле, любое однородное линейное дифференциальное уравнение эквивалентно в этом случае уравнению вида

$$2u_{xy} + Bu_x + Cu = 0,$$

где B и C — некоторые функции от x и y ; $x = \text{const.}$ и $y = \text{const.}$ — характеристики, причем $x + y$ дает нам координату времени, а $x - y$ — координату пространства. Существование семейства волн

$$u = g(x, y) W(y)$$

требует выполнения условий

$$g_x = 0, \quad 2g_{xy} + Bg_x + Cg = 0,$$

откуда следует, что $C = 0$. Если, кроме того, существует второе семейство волн

$$u = h(x, y) W(x),$$

распространяющихся по другому направлению, то должны выполняться условия

$$2h_y + Bh = 0, \quad 2h_{xy} + Bh_x = 0,$$

откуда следует, что $B_x = 0$. Таким образом, наше уравнение должно иметь вид $2u_{xy} + B(y)u_x = 0$, а такое уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению $u_{xy} = 0$.

2. Сферические волны. В случае, когда число переменных $n > 2$, общее решение поставленной задачи еще не найдено. Мы ограничимся некоторыми реферативными соображениями предварительного характера относительно «сферических» волн.

Сферические или шаровые волны определяются тем свойством, что соответствующее семейство характеристических поверхностей состоит из характеристических коноидов, вершины которых лежат на линии временного типа. Чтобы аналитически определить эти коноиды, мы рассматриваем снова квадрат геодезического расстояния двух точек x и ξ , т. е. введенную в § 9 функцию $\Gamma(x, \xi)$, как решение дифференциального уравнения

$$\sum_{i,k} a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k = 4\Gamma. \quad (6)$$

Какая-нибудь линия $\xi = \xi(\lambda)$ с параметром λ , для которой выполняется условие

$$\sum_{i,k} a_{ik} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k > 0, \quad (7)$$

называется линией временного типа.

Определим теперь функцию $\lambda = T(x)$ как обращение уравнения

$$\Gamma(x, \xi(\lambda)) = 0. \quad (8)$$

Тогда, очевидно, $T(x)$ является характеристической функцией, т. е. удовлетворяет характеристическому условию. Соответствующим семейством сферических волн мы назовем семейство волн вида

$$u(x) = g(x) W[T(x)]. \quad (9)$$

Тогда имеет место следующее предположение, которое нами будет более подробно обосновано в конце п. 3:

Сферические волны для любых линий временного типа существуют только в случае двух и четырех переменных и при этом только для дифференциальных уравнений, эквивалентных волновому уравнению. Если удастся доказать это предположение, то этим будет установлено особое, существенно важное отличительное свойство четырехмерного пространственно-временного многообразия. Однако, уже то обстоятельство, что наше утверждение справедливо в случае постоянных коэффициентов и нетрудно доказывается в этом случае, является, как мне кажется, само по себе довольно существенным отличительным свойством четырехмерного мира. Мы здесь укажем лишь на то, что для волнового уравнения, если в качестве линии временного типа взять ось t , наше предыдущее выражение T и функция g имеют вид

$$T = t - r, \quad g = \frac{1}{r}, \quad \text{где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (10)$$

что в точности дает нам рассмотренные раньше сферические волны. Для других прямых линий временного типа сферические волны получаются из предыдущих с помощью преобразования Лоренца. В случае большего четного числа измерений $n = m + 1 = 2v + 4$ мы уже раньше в § 5 и 6 получили в качестве аналога для проходящих волн решения вида

$$u(r, t) = \frac{1}{r^{m-2}} W(t-r) + \frac{A_1}{r^{m-3}} W'(t-r) + \dots + \\ + \frac{A_{\frac{m-3}{2}}}{r^{\frac{m-1}{2}}} W^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(t-r), \quad (11)$$

где

$$A_v = \frac{2^v}{v!} \frac{\binom{m-3}{2}}{\binom{m-3}{v}}$$

Мы называем такие решения волнами высшей ступени, именно — ступени $\frac{n-1}{2}$; они уже не свободны от искажений, но представляют собой распространяющиеся процессы.

Следует, однако, заметить, что для любых четных значений n , если и не само волновое уравнение

$$L[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0,$$

то его $\frac{n}{2}$ -кратная итерация

$$L^{\frac{n}{2}}[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)^{\frac{n}{2}} u = 0,$$

представляющая собой дифференциальное уравнение n -го порядка, обладает свойствами неискажающих сферических волн

$$u = W(t-r) \quad \text{и} \quad u = W(r+t).$$

Этот факт является только другой формулировкой теоремы Фридрихса, доказанной в § 6, п. 4.

Отсюда следует, что с помощью операции $L^{\frac{n-2}{2}}$ можно получить из произвольной функции $W(t-r)$ решение волнового уравнения, которое дает как раз волны высшей ступени и может быть отождествлено с решением, выраженным формулой (11).

3. Излучение и принцип Гюйгенса. Для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ задача излучения (ср. § 5) состояла в нахождении решения, для которого при $t=0$ обращаются в нуль как сама функция

ция, так и ее производные и для которой на оси t при $x = 0$ задано условие

$$\odot u = s(t),$$

где под $\odot u$ мы подразумеваем предельное значение

$$\odot u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \dots \int_{O_\epsilon}^x \frac{\partial u}{\partial v} dv. \quad (12)$$

Стоящий справа интеграл берется в момент t по сфере, описанной из нулевой точки радиусом ϵ , а $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial r}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали.

При четном $n = m + 1 > 2$ эта задача решается с помощью сферических волн порядка $\frac{n-1}{2}$ по формуле (11), в которой мы должны положить $w(t) = -\frac{1}{\omega_m(m-2)} s(t)$.

Перейдем теперь к формулировке проблемы излучения в случае общего линейного дифференциального уравнения

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0 \quad (13)$$

и любой линии $x = \xi(\lambda)$ временного типа. В этом случае мы полагаем:

$$\odot u = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \dots \int_{O_\epsilon}^x \sum_{i, k} a_{ik} u_i \frac{dx_k}{dv} dv. \quad (14)$$

Замечая, что с помощью преобразования координат мы можем всегда преобразовать линию $x = \xi(\lambda)$ в прямую $x_1 = \dots = x_m = 0, x_n = \lambda$, мы приходим естественным образом к следующей формулировке задачи: Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (13), обращающуюся в нуль вместе со всеми производными первого порядка на начальной поверхности B пространственного типа и обладающую вдоль заданной линии $x = \xi(\lambda)$ временного типа особенностью такого рода, что вдоль этой линии

$$\odot u = s(\lambda), \quad (15)$$

где $s(\lambda)$ — заданная функция. При этом решение $u(x)$ ищется только по одну сторону от начальной поверхности B , а именно — в той области пространства $R_n = R_{m+1}$, в которой лежит часть линии $x = \xi(\lambda)$, соответствующая положительным значениям параметра λ .

Рассмотрим, далее, коноид, образуемый характеристическими лучами, выходящими из какой-нибудь точки x , лежащей с указанной выше стороны поверхности B ; пусть полуконоид, пересекающий поверхность B («отрицательный» полуконоид) пересекает линию временного типа $x = \xi(\lambda)$ в точке $\xi = \xi(T(x))$ (см. п. 2).

Тогда нетрудно показать, что значение решения u нашей интегральной задачи в точке x зависит только от значений заданной функции $\odot u = s(\lambda)$ вдоль дуги $\lambda \leq T(x)$. Этот результат полу-

чается непосредственно из представления решения задачи с помощью основного решения.

Применяя изложенный в § 9 метод Адамара, мы можем очень легко получить интегральное выражение для решения рассматриваемой задачи, и притом проще, чем для задачи Коши.

В случае нечетного $n = m + 1$ получается формула

$$u(x) = C * \int_0^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda) d\lambda, \quad (16)$$

в которой звездочка, стоящая наверху слева от знака интеграла, обозначает, как и раньше, конечную составную часть этого интеграла, а C обозначает некоторую константу.

Если же $n = m + 1$ четное, то решение имеет вид

$$u(x) = C * \int_0^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda) d\lambda - C \int_0^{T(x)} W(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda) d\lambda, \quad (17)$$

где звездочка, стоящая внизу слева от знака первого интеграла, обозначает логарифмическую составную часть этого интеграла. Заметим, что эта часть, т. е.

$$* \int_0^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda) d\lambda = * \int_0^{T(x)} \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-1}{2}}} \odot u(\lambda) d\lambda$$

зависит исключительно от значений функции $s(\lambda)$ и ее производных до порядка $\frac{m-3}{2}$ в одной только точке $\lambda = T(x)$; поэтому формула (17) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= g_0(x)s(T(x)) + g_1(x)s'(T(x)) + \dots + \\ &+ g_{\frac{m-3}{2}}(x)s^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(T(x)) - C \int_0^{T(x)} W(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (17')$$

Первая часть этой формулы представляет *проходящие волны высшей ступени* порядка $\frac{m-1}{2}$.

Поэтому, если $W = 0$, т. е. если n четное и логарифмическая часть основного решения равна нулю, то решение проблемы излучения может быть в точности выражено через неискажающиеся проходящие сферические волны высшей ступени. В этом случае решение зависит исключительно от значений начальных данных в одной только точке $\lambda = T(x)$ линии времени $\xi = \xi(\lambda)$, т. е. в точке пересечения этой линии с характеристическим коноидом, выходящим из точки x .

Таким образом, принцип Гюйгенса для проблемы излучения имеет место во всех тех случаях, в которых этот принцип имеет место для соответствующей задачи Коши (ср. § 9, п. 1). Является вероятным предположение, что и, обратно, семейство

неискажающихся проходящих сферических волн высшей ступени существует только в случае справедливости принципа Гюйгенса и что семейства проходящих сферических волн в собственном смысле (сферические волны первой ступени) могут существовать только при $n = 2$ и $n = 4$.

Доказательство этого предположения вместе с доказательством предположения Адамара (см. § 9, п. 1) обнаружило бы существенную характеристическую особенность четырехмерного пространственно-временного многообразия и относящейся к этому многообразию классической теории Максвелла.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

§ 1. Дифференциальные уравнения кристаллооптики

В этом параграфе мы проведем полностью интегрирование дифференциальных уравнений кристаллооптики¹⁾ и для этой цели предположим исследование геометрического характера соответствующих поверхностей Френеля, т. е. поверхностей нормалей и волновых поверхностей.

1. Поверхности нормалей и лучей кристаллооптики. Напомним данное нами раньше определение (см. гл. VI, § 3, п. 3): направления нормалей к различным возможным фронтам волны, проходящим через данную точку, задаваемые в пространстве ξ, τ отношениями $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \tau$ компонент направляющего вектора, образуют конус нормалей четвертого порядка, уравнение которого имеет вид

$$H\left(\frac{\xi_1}{\tau}, \frac{\xi_2}{\tau}, \frac{\xi_3}{\tau}\right) = 0. \quad (1)$$

Конус Монжа дифференциальных уравнений кристаллооптики, имеющий прямолинейные образующие и состоящий из всех лучей, выходящих из начала координат пространства x, t , мы называем *конусом лучей*. Если отождествить между собой оба пространства, то мы получим, что касательные плоскости одного конуса перпендикулярны к соответствующим лучам другого.

Если пересечь эти конусы плоскостями $\tau = 1$ и $t = 1$ или же плоскостями $\tau = -1$ и $t = -1$, что не меняет вида сечения, ибо конусы симметричны относительно начала координат, то мы получим *поверхность нормалей* N и соответственно *поверхность лучей* S . Конус лучей и конус нормалей, а также поверхность лучей и поверхность нормалей могут быть преобразованы друг в друга с помощью преобразования взаимными полярами, указанного в гл. VI, § 2, п. 7²⁾.

¹⁾ См. G. Herglotz, Berichte sächsischer Akademie, 1926, а также его Курс лекций по механике сплошных сред.

²⁾ В силу симметрии этих поверхностей относительно начала координат можно, впрочем, заменить это преобразование, приведенное в § 2, преобразованием взаимными полярами относительно вещественных поверхностей

$$\sum \xi_i^2 = 1 \text{ и } \sum x_i^2 = 1.$$