странстве переменных $x_i$, состоящим из параллельных поверхностей, получающихся из некоторой начальной поверхности путем параллельного перемещения вдоль нормалей со скоростью, равной единице. Характеристические лучи изображаются в пространстве $x$-ов соответствующими ортогональными траекториями.

С помощью характеристического конуса (конуса Монжа) гиперболического дифференциального уравнения $L[u]=0$ мы получаем в пространстве $x$-ов при $n>2$ следующее очень важное деление нехарактеристических элементов поверхности и соответственно нехарактеристических направлений на два типа. Мы говорим, что данный нехарактеристический элемент поверхности является элементом *пространственного типа*, если он не содержит ни одного характеристического направления, т. е. если его плоскость не пересекает характеристического конуса. Мы говорим далее, что данное *направление* является направлением *временного типа*, если оно трансверсально к элементу поверхности пространственного типа.

Мы предполагаем, что данное гиперболическое дифференциальное уравнение приводится в данной точке к каноническому виду, дающему распределение знаков $+---\ldots$ (если получается распределение знаков $-++\ldots$, то мы можем умножением на $-1$ привести уравнение к предыдущему виду). В этом случае поверхность $\varphi=0$ является в данной точке поверхностью пространственного типа, если в этой точке выполняется условие

$$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k>0.$$

Соответственно этому линейный элемент $dx_i$ является элементом временного типа, если выполняется условие

$$\sum A_{ik}\,dx_i\,dx_k>0,$$

где $(A_{ik})$ означает матрицу, обратную относительно матрицы $(a_{ik})$. Легко убедиться, что *всякий элемент поверхности, проходящий через линейный элемент временно́го типа, является элементом поверхности временно́го типа.*

## § 2. Характеристические многообразия как поверхности разрывов. Фронт волны

**1. Разрывы второго порядка.** Характеристические многообразия играют такую важную роль в физических приложениях прежде всего в силу того обстоятельства, что только вдоль таких многообразий могут иметь место известного рода *разрывы решений дифференциальных уравнений с частными производными*. Чтобы осветить с этой точки зрения еще раз понятие характеристик, найдем условие, которому должна удовлетворять поверхность $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ для того, чтобы существовало решение $u$ дифференциального уравнения $L[u]=0$, обладающее следующими свойствами: $u$ и все первые производные $u_i$, а также все внутренние относительно поверхности про-

изводные функций $u_1, \ldots, u_n$ остаются при переходе через поверхность непрерывными, тогда как внешние производные функций $u_i$, выводящие за пределы поверхности $\varphi = 0$, и, в первую очередь, производная $u_{\varphi\varphi}$ терпят при переходе через поверхность разрыв непрерывности первого рода.

Из рассмотрения § 1 непосредственно следует, что такая поверхность $M$, заданная уравнением $\varphi = 0$, должна быть характеристическим многообразием. Действительно, в противном случае производные второго, а также высших порядков были бы однозначно определены вдоль $M$, тогда как наше требование наличия разрывов у производных второго порядка сводится к тому, чтобы соответствующая поверхности $M$ начальная полоска первого порядка допускала возможность дополнения ее до интегральной полоски двумя различными способами, а именно, с помощью предельных значений вторых производных с одной и соответственно с другой стороны этой поверхности. По условию эти предельные значения различны для обеих сторон поверхности $M$ и дают, следовательно, две различные интегральные полоски второго порядка, построенные на одной и той же полоске первого порядка, соответствующей поверхности $M$.

Выведем, однако, не ссылаясь на предыдущее, характеристическое условие, исходя из требования наличия разрыва непрерывности у вторых производных. Для этой цели обозначим через $(f)$ скачок функции $f$ при переходе через поверхность $M$ с одной стороны на другую. Будем первую сторону поверхности называть отрицательной, а вторую — положительной.

Как было доказано раньше (гл. II, дополнения, § 1), выражение

$$u_{ik}\varphi_j - u_{ij}\varphi_k$$

является внутренней относительно $M$ производной функции $u_i$; следовательно, это выражение согласно условию должно оставаться непрерывным при переходе через поверхность $M$. То же относится и к выражению

$$u_{ij}\varphi_l - u_{jl}\varphi_i.$$

Поэтому выражение $u_{ik}\varphi_j\varphi_l - u_{jl}\varphi_i\varphi_k$, являющееся линейной комбинацией предыдущих двух выражений, также остается непрерывным при переходе через $M$.

Отсюда следует, что скачки вторых производных должны удовлетворять условиям

$$(u_{ik})\varphi_j\varphi_l = (u_{jl})\varphi_i\varphi_k,$$

так что

$$(u_{ik}) = \lambda\varphi_i\varphi_k\ ^{1)},$$

где $\lambda$ — некоторый фактор пропорциональности, зависящий от соответствующей точки поверхности $M$, и отличный от нуля, если в данной точке какая-нибудь из вторых производных действительно раз-

[1]) Мы предполагаем, что на поверхности $\varphi = 0$ производные функции $\varphi$ нигде не обращаются все одновременно в нуль.

рывна. Заметим попутно, что, как легко убедиться, этот фактор пропорциональности выражается формулой

$$\lambda = (u_{\varphi\varphi}).$$

Напишем теперь дифференциальное уравнение $L[u] = 0$ сначала для некоторой точки $P_-$, расположенной по отрицательную сторону от поверхности $M$, а затем для точки $P_+$, расположенной по положительную сторону $M$, вычтем оба уравнения одно из другого и будем неограниченно приближать точки $P_-$ и $P_+$ к одной и той же точке $P$ поверхности $M$. Тогда все выражения, остающиеся непрерывными при переходе через $M$, в пределе взаимно уничтожаются, и мы получаем вдоль $M$ уравнение

$$\sum a_{ik}(u_{ik}) = 0.$$

Учитывая теперь полученные раньше выражения для $(u_{ik})$ и условие $\lambda \neq 0$, мы получаем наше старое характеристическое условие

$$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0$$

в качестве условия, характеризующего поверхность разрывов рассмотренного вида. Заметим, что мы получаем тот же результат, если потребуем разрывности какой-нибудь производной высшего порядка. Мы должны тогда продифференцировать дифференциальное уравнение соответствующее число раз и применить то же рассуждение к полученному уравнению, причем, конечно, придется предположить, что все коэффициенты уравнения, получающегося в результате дифференцирования, непрерывны.

Чтобы истолковать физически нашу новую точку зрения на характеристические многообразия, положим снова $n = m + 1$, $x_n = t$ и $\varphi = t - \psi(x_1, \ldots, x_m)$, причем параметр $t$ мы рассматриваем как время, а функцию $u$ как функцию точки в $m$-мерном пространстве $R_m$ с координатами $x_1, \ldots x_m$, зависящую от параметра — времени. Мы имеем, таким образом, дело с решением $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ дифференциального уравнения $L[u] = 0$, которому соответствует *перемещающийся в пространстве с течением времени фронт волны*, т. е. поверхность разрыва

$$t = \psi(x_1, \ldots, x_m),$$

зависящая от параметра $t$ и меняющая с течением времени свое положение и форму.

Такой фронт волны образуется, например, когда волновой процесс, изображаемый дифференциальным уравнением $L[u] = 0$, достигает в момент $t$ некоторого предельного положения, по другую сторону от которого среда еще находится в состоянии покоя, так что соответствующее решение $u$ дифференциального уравнения, характеризующее этот процесс, по одну сторону от граничной поверхности обращается в нуль, будучи отличным от нуля по другую сторону. Эта граница распространения волны и будет таким фронтом волны

Отметим здесь, как особенно важный частный случай, следующий часто встречающийся тип дифференциальных уравнений:

$$u_{tt}-\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}u_{ik}=f(x_1,\ldots,x_m,t), \tag{1}$$

причем коэффициенты $a_{ik}=a_{ki}$ зависят только от пространственных переменных $x_\nu$. Характеристическое уравнение для нашей функции $\psi$ имеет тогда вид

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k=1 \tag{2}$$

и является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Уравнением $\psi=t$ задается тогда движущийся фронт волны. Вдоль характеристических лучей мы имеем $\frac{dt}{ds}=1$, так что введенный раньше параметр $s$ совпадает в этом случае с параметром времени $t$. Уравнения характеристических лучей имеют, следовательно, вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{3}$$

В пространстве $R_m$ характеристические лучи пересекают волновые фронты $\psi=t$, нигде не касаясь этих поверхностей. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_i\dot{x}_i=\sum_{i=k} a_{ik}\psi_i\psi_k=1.$$

(Однако, в $n$-мерном пространстве $x$, $t$ характеристические лучи содержатся в характеристических многообразиях.)

Вектор пространства $R_m$ с компонентами $\dot{x}_i$ называется *лучевым вектором, трансверсальным к волновому фронту* $\psi=t$.

Введя допущение, что матрица $m$-го порядка $a_{ik}$ положительно определенна, мы обеспечим гиперболический характер дифференциального уравнения (1).

Направление луча и касательная плоскость к фронту волны взаимно сопряжены относительно эллипсоида

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k=1.$$

Наряду с вектором с компонентами $\dot{x}_i=v_i$, который мы также называем *вектором лучевой скорости*, приходится еще рассматривать *вектор нормальной скорости* или *скорости распространения фронта волны*. Компоненты $w_i$ этого второго вектора пропорциональны производным $\psi_i$, а его модуль равен обратной величине $|\operatorname{grad}\psi|$. Таким образом, компоненты вектора нормальной скорости задаются выражениями

$$w_i=\frac{\psi_i}{\sum\psi_\nu^2}=\frac{\psi_i}{|\operatorname{grad}\psi|^2}, \tag{4}$$

и между нормальной скоростью и скоростью луча имеют место соотношения

$$v_i = \left(\sum_k a_{ik} w_k\right) |\operatorname{grad} \psi|^2.$$

В связи с нашим определением понятия фронта волны мы подчеркиваем еще раз, что фронт волны является не решением дифференциального уравнения в частных производных $L[u] = 0$, а лишь поверхностью возможных разрывов решения $u$. Заметим далее, что из полученных в гл. II результатов относительно дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка мы можем сделать следующий вывод:

*Если два различных волновых фронта $\psi = t$ и $\chi = t$ взаимно касаются в некоторой точке в момент $t = 0$, то они и в любой следующий момент времени $t$ имеют общую точку касания, перемещающуюся с течением времени по общему лучу обоих волновых фронтов.*

Эта теорема действительно равносильна теореме о том, что две интегральные поверхности дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (в данном случае — характеристического уравнения), имеющие один общий элемент поверхности, имеют также общей всю характеристическую кривую с соответствующей полоской, определяемую этим элементом поверхности.

**2. Фронт волны линейного дифференциального уравнения как геометрическое место разрывов высших порядков.** При определении фронта волны мы предположили, что функция $u$ и ее первые производные остаются непрерывными при переходе через поверхность $M$, тогда как разрывы имеют место только для вторых или высших производных. Действительно, как мы видели в случае $n = 2$, требование возможности существования разрывов первых производных $u_i$ решения уравнения $L[u] = 0$ не приводит к выделению особых поверхностей $\varphi = 0$, и тем более это относится к разрывам самой функции $u$. Если мы предположим, что для некоторой поверхности $\varphi = 0$ задача Коши уравнения $L[u] = 0$ допускает решение при любых начальных значениях $u$ и $u_i$, то мы можем просто взять два решения с теми же начальными значениями $u$, но с различными значениями внешней относительно поверхности $\varphi = 0$ производной $u_\varphi$ и составить решение, совпадающее по одну сторону поверхности с первым, а по другую сторону — со вторым из этих двух решений. Таким образом, из этих двух решений мы получим третье решение $u$, имеющее разрывные производные первого порядка вдоль поверхности $\varphi = 0$, причем в качестве такой поверхности $\varphi = 0$ мы можем взять любую нехарактеристическую поверхность. Однако, соображения физического характера дают основания ожидать, что и в отношении разрывов производных первого порядка и даже разрывов самой функции $u$ характеристики должны играть особую роль. И, действительно, можно доказать справедливость такого пред-

положения, если рассматривать разрывные решения как предельные случаи непрерывных решений[1]).

В этом смысле имеет место следующая теорема:

*Разрывы производных первого порядка решения уравнения* $L[u]=0$ *могут иметь место только вдоль характеристических многообразий*, если предположить, что такие разрывные решения получаются из непрерывных решений путем следующего предельного процесса: допустим, что $u$ является пределом равномерно сходящейся последовательности решений $v^1, v^2, \ldots$, непрерывных в некоторой окрестности поверхности $M$, заданной уравнением $\varphi=0$, и имеющих равномерно ограниченные производные $v_i^r$. Пусть, далее, производные первого и второго порядка функций $v^i$ стремятся к соответствующим производным функции $u$ равномерно во всякой замкнутой области, *не содержащей* поверхности $M$. На самой же поверхности $M$ пусть предельная функция $u$ имеет разрывные внешние относительно $M$ производные, причем все разрывы являются разрывами первого рода, так что эти производные остаются ограниченными; тангенциальные же производные первого и второго порядка пусть остаются непрерывными.

С помощью преобразования координат преобразуем многообразие $M$ в плоскость $x_n=0$. Докажем, что эта плоскость должна быть характеристическим многообразием, т. е. что должно выполняться условие $a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)=0$. В самом деле, если в какой-нибудь точке поверхности $M$ $a_{nn}(x_1, \ldots x_{n-1}, 0)\neq 0$, то это условие выполнялось бы также и в некоторой окрестности этой точки. Мы можем поэтому дифференциальное уравнение для функций $v=v^r$ разделить на $a_{nn}$ и записать его в следующем виде:

$$v_{nn}+\sum_{i=1}^{n-1} c_{ni}v_{in}+d_nv_n+\sum_{i=1}^{n-1} d_iv_i+\sum_{i,k=1}^{n-1} c_{ik}v_{ik}+ev+f=0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение по $x_n$ в пределах от $x_n=-\varepsilon$ до $x_n=+\varepsilon$, мы получим $v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon)-$ $-v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon)+\ldots=0$, где многоточием обозначено выражение, абсолютное значение которого, как легко видеть, меньше $A\varepsilon$, где $A$ — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $r$. Итак, при фиксированном $\varepsilon$ и любом $r$ имеет место неравенство

$$|v_n^r(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon)-v_n^r(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon)|\leqslant A\varepsilon.$$

Поэтому, переходя к пределу при $r\to\infty$, мы получаем:

$$|u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon)-u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon)|\leqslant A\varepsilon.$$

Заставляя теперь $\varepsilon$ стремиться к нулю, мы непосредственно убеждаемся в том, что внешняя производная $u_n$ не имеет разрывов при переходе через $M$ вопреки нашему предположению. Итак, доказано, что при наличии разрывов рассматриваемого типа должно выполняться условие $a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)=0$, т. е. $M$

[1]) См. дополнения, § 4.

должно быть характеристическим многообразием, что и требовалось доказать.

Предложим читателю в качестве задачи доказать аналогичную теорему для того случая, когда сама функция $u$ разрывна при переходе через поверхность $M$ [1]).

Здесь мы рассмотрим еще только тот случай, когда поверхность $M$ является такой поверхностью разрыва функции $u$, вдоль которой $u$ обращается в бесконечность вида

$$u = U\varphi^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\alpha$ — отрицательный показатель, а $U$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда имеет место теорема: *Поверхность $\varphi = 0$ должна быть характеристическим многообразием.*

Для доказательства произведем в дифференциальном выражении $L[u]$ подстановку $u = U\varphi^{\alpha}$. $L[u]$ примет тогда следующий вид:

$$\alpha(\alpha-1)U\varphi^{\alpha-2}\left(\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k\right) + \alpha\varphi^{\alpha-1}\left\{L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}\varphi_i U_k\right\} + \\ + \varphi^{\alpha}L[U].$$

Умножим уравнение $L[u] = 0$ на $\varphi^{2-\alpha}$ и заставим $\varphi$ стремиться к нулю; тогда мы получим в пределе для $\varphi$ характеристическое условие

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0, \tag{5}$$

которое должно иметь место при $\varphi = 0$.

Если мы допустим, что не только поверхность $\varphi = 0$, но и все семейство функций $\varphi = \text{const}$. является характеристическим (мы можем поверхность $\varphi = 0$ всегда включить в такое семейство), то первый член написанного выше дифференциального уравнения для $U$ тождественно равен нулю. Умножим $L[u]$ на $\varphi^{1-\alpha}$ и заставим $\varphi$ стремиться снова к нулю. Мы получим тогда дальнейшее соотношение: $L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}\varphi_i U_k = 0$, представляющее собой условие, которому должна удовлетворять функция $U$ на поверхности $\varphi = 0$.

С помощью обозначений § 1, п. 2 мы можем записать это условие в виде

$$2\frac{\partial U}{\partial s} + AU = 0, \tag{6}$$

где

$$A = L'[\varphi] = \sum a_{ik}\varphi_{ik} + \sum b_i\varphi_i.$$

Это соотношение для $U$ выражает следующий факт:

*Коэффициент $U$ разрыва непрерывности удовлетворяет вдоль характеристического луча обыкновенному однородному линейному дифференциальному уравнению.*

Вдоль данного луча мы можем рассматривать $A$ как функцию от $s$. Если при $s = 0$ $U = U_0$, то мы получим вдоль луча

$$U(s) = U_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^s A(\tau)\,d\tau}.$$

---

[1]) См. дополнения, § 4.

*Разрыв $U$ распространяется, таким образом, вдоль характеристических лучей по заранее известному закону и притом $U$ либо нигде не обращается в нуль, либо тождественно равняется нулю.*

Особенно наглядный вид принимают все эти взаимосвязи, если снова положить $n=m+1$, $x_n=t$, $\varphi=\psi-t$ и допустить, что коэффициенты $a_{ik}$ зависят только от $x_1,\ldots,x_m$, так что $a_{in}=0$ при $i\neq n$, а $a_{nn}=1$.

Мы получаем тогда в качестве условия для поверхности разрыва дифференциальное уравнение в частных производных

$$\sum_{i,k}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k=1, \tag{7}$$

которое должно выполняться тождественно относительно $x_1, x_2,\ldots, x_m$.

Характеристический параметр $s$ совпадает в этом случае с параметром времени $t$. Далее, имеет место соотношение

$$2\frac{\partial U}{\partial t}+AU=0,$$

выполняющееся тождественно относительно $x_1,\ldots, x_m$.

**3. Поведение дифференциального уравнения на характеристическом многообразии. Распространение разрывов вдоль лучей.** Уравнение распространения разрыва (6) имеет место для коэффициентов всех рассмотренных в п. 1 видов разрыва. Мы это докажем, как нами было уже намечено раньше в § 1, п. 2, путем проведения более подробного анализа содержания дифференциального уравнения

$$\sum a_{ik}u_{ik}+\sum b_iu_i+cu=0 \tag{8}$$

вдоль данного многообразия $\varphi=0$ и, в частности, вдоль характеристического многообразия. Не ограничивая общности рассмотрений, мы можем допустить, что рассматриваемое многообразие $\varphi=0$ или семейство поверхностей $\varphi=c$ преобразовано в координатную плоскость $x_n=0$ или соответственно в семейство плоскостей $x_n=c$. Для того, чтобы иметь право формулировать получающиеся таким путем теоремы для любых многообразий $\varphi=c$, нам достаточно будет воспользоваться доказанными выше теоремами об инвариантности. Запишем наше дифференциальное уравнение в виде

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n-1} b_iu_i+cu+a_{nn}u_{nn}+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_{in}+b_nu_n=0. \tag{9}$$

Соединив члены, содержащие только внутренние относительного многообразия $x_n=0$ производные, т. е. производные по переменным $x_1,\ldots, x_{n-1}$, обозначим их сумму через $J$. Мы получаем тогда

$$J+a_{nn}u_{nn}+b_nu_n+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_{in}=0. \tag{10}$$

Согласно § 1, п. 2 трансверсальное к поверхностям $x_n = c$ дифференцирование задается уравнениями

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = a_{in}.$$

Полагая на поверхности $x_n = 0$ для краткости $u_n = v$, мы можем записать наше дифференциальное уравнение в виде

$$J + a_{nn} v_n + 2\frac{\partial v}{\partial s} + b_n v = 0. \tag{11}$$

Если многообразие $M$ характеристично, то на нем $a_{nn} = 0$, а $\frac{\partial}{\partial s}$ является внутренней производной. Таким образом, из уравнения (11) следует:

*Если $M$ — характеристическое многообразие, то уравнение* (11) *является условием, которому должна удовлетворять внешняя относительно $M$ производная $v$ функции $u$.*

В том случае, когда поверхность $M$, заданная уравнением $x_n = 0$ является характеристическим многообразием, уравнение (11) на поверхности $M$ принимает вид

$$J + 2\frac{\partial v}{\partial s} + b_n v = 0. \tag{12}$$

Но, как мы видели выше в § 1, п. 2, выражение

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i$$

инвариантно относительно преобразования координат.

Так как при $\varphi = x_n$ $L'[\varphi] = b_n$, то мы можем теперь уравнение (12) представить в следующем виде, справедливом для любого характеристического многообразия $\varphi = 0$

$$J + 2\frac{\partial v}{\partial s} + Av = 0, \tag{13}$$

причем

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_{ik} + \sum_{i} b_i \varphi_i$$

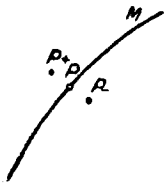
является выражением известным на многообразии $M$. Уравнение (13) представляет собой на характеристическом многообразии $M$ обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для внешней производной $v = u_\varphi$, причем такое обыкновенное дифференциальное уравнение имеет место вдоль каждого из характеристических лучей с параметром $s$, образующих характеристическое многообразие $M$.

Мы получим теперь искомые уравнения для разрывов вдоль $M$ следующим образом. Допустим сначала, что на $M$ функция $u$ и все ее тангенциальные (внутренние) производные непрерывны, тогда как внешняя производная $u_\varphi = v$ делает скачок $(u_\varphi) = (v) = \varkappa$.

Рассмотрим значения этой меры разрыва $\varkappa$ вдоль некоторого луча, лежащего на $M$, с параметром $s$ и напишем уравнение (11) для двух точек $P_+$, $P_-$, лежащих по две различные стороны от поверхности $M$, вычтем эти уравнения друг из друга и заставим точки $P_+$ и $P_-$ неограниченно приближаться к некоторой точке $P$ поверхности $M$. Рассматривая снова тот случай, когда $M$ приведена к виду $x_n=0$, так что на $M$ имеем $a_{nn}=0$, и учитывая, что $J$ меняется непрерывно при переходе через $M$, мы получим в пределе

$$2\frac{\partial\varkappa}{\partial s}+A\varkappa=0, \quad \text{где} \quad A=b_n=L'[\varphi]. \tag{14}$$

Итак, *мера разрыва $\varkappa$ распространяется вдоль характеристического луча по тому же закону, что и $U$ в уравнении* (6). *Так же, как и $U$, величина $\varkappa$ обладает тем свойством, что если $\varkappa$ отлична от нуля в одной точке луча, то она остается отличной от нуля во всех точках этого луча.*



Черт. 34.

Перейдем теперь к тому случаю, когда все первые производные, а также внутренние производные второго порядка функции $u$ остаются непрерывными при переходе через $M$. (Внутренними производными второго порядка мы здесь считаем все производные второго порядка, получающиеся путем внутреннего дифференцирования какой-нибудь производной первого порядка.) Тогда *разрывы вторых производных* полностью определяются согласно п. 1 заданием скачка

$$\varkappa=(u_{\varphi\varphi})=(v_\varphi)$$

второй внешней производной $u_{\varphi\varphi}$. *Как и раньше, эта мера разрыва удовлетворяет уравнению распространения разрыва* (14), если включить характеристическое многообразие $\varphi=0$ в семейство характеристических многообразий $\varphi=c$, чем не ограничивается общность наших рассмотрений (см. § 1, п. 2).

Для доказательства достаточно снова исходить из уравнения (11), предварительно приведя уравнение $\varphi=c$ семейства характеристических многообразий к виду $x_n=c$, продифференцировать уравнение (11) по $x_n$ и повторить предыдущее рассуждение. Мы должны при этом принять во внимание, что величины $J$, $\frac{\partial J}{\partial x_n}$, $\frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n}$, $\frac{\partial b_n}{\partial x_n}$, $v$ меняются непрерывно при переходе через $M$, тогда как $a_{nn}$ обращается в нуль на $M$, так что остается только выражение $2\frac{\partial v_n}{\partial s}+b_nv_n$. Приравнивая нулю скачок этого выражения и возвращаясь к общему виду уравнения характеристического многообразия $\varphi=0$, мы получим уравнение распространения разрыва (14).

Подчеркнем, что меры разрыва производных высших порядков, если такие производные оказываются разрывными, удовлетворяют тому же уравнению распространения разрыва; точно так же это

уравнение остается в силе и в том случае, когда речь идет о разрыве самой функции $u$, если предположить, что разрыв функции $u$ имеет характер, описанный в п. 2.

**4. Физическая интерпретация. Граница тени.** Физический смысл понятия характеристического луча и его связь с понятием фронта волны лучше всего выясняются, если снова выделить переменную $x_n = x_{m+1} = t$ как параметр времени. Тогда характеристические поверхности представляют собой перемещающиеся в $x$-пространстве $R_m$ *фронты волны* $t = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а характеристические лучи — некоторые соответствующие фронтам волны пересекающие их линии. Уравнение (14) п. 3 выражает следующее: если на каком-нибудь из таких движущихся фронтов волны в какой-нибудь точке в начальный момент времени $t$ имеется заданный разрыв непрерывности соответствующего решения $u(x_1, \ldots, x_m, t)$, то интенсивность разрыва распространяется по закону, формулируемому уравнением (14), вдоль характеристического луча, выходящего из рассматриваемой начальной точки. Если, например, в момент $t = 0$ на поверхности $\psi = 0$ точки разрыва производных первого порядка образуют небольшое пятно, тогда как на остальной части этой поверхности имеются только разрывы производных высших порядков, то это геометрическое место точек разрыва первого порядка будет распространяться вдоль соответствующей связки лучей в виде резко очерченного пятна. Таким путем мы получаем аналитическое описание явления *границы тени*.

Заметим, что в основе всего этого рассмотрения лежит определенное решение дифференциального уравнения $L[u] = 0$, относительно которого предполагается, что оно имеет перемещающуюся с течением времени поверхность разрыва.

**5. Коноид характеристических лучей. Связь с метрикой риманова пространства.** Совокупность всех характеристических лучей, соответствующих линейному дифференциальному уравнению

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu + d = 0, \tag{8'}$$

совпадает с совокупностью всех характеристик дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0, \tag{5}$$

причем мы можем положить $\varphi = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n$ и $\varphi = 0$. Мы предполагаем, как и в гл. I, § 4 и гл. II, § 3, что все лучи, выходящие из заданной точки пространства $x_1, \ldots, x_n$, образуют поверхность конического типа в данной точке, и мы называем эту поверхность *коноидом характеристических лучей*. Эта поверхность является интегральной поверхностью характеристического дифференциального уравнения (5) и, следовательно, характеристической поверхностью. Подчеркнем еще раз, что мы здесь рассматриваем это дифференциальное уравнение как уравнение в частных производных по $n - 1 = m$ независимым переменным, получающееся с помощью условия $\varphi = 0$, так что мы можем коноид характеристических лучей

рассматривать как поверхность в $n$-мерном пространстве $R_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$[1]).

Если задать этот коноид уравнением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то функция $\varphi$ удовлетворяет характеристическому условию (5) не тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а только в точках, лежащих на поверхности $\varphi = 0$.

Лучи, образующие коноид, определяются согласно § 1, п. 2 системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds} = \sum a_{ik}\varphi_k. \tag{15}$$

Если обозначить через $(A_{ik})$ матрицу, обратную относительно матрицы $(a_{ik})$, то имеет место тождество

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{i,k} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k.$$

Введем теперь в $n$-мерном пространстве $R_n$ мероопределение, задавая квадрат линейного элемента $d\sigma^2$ с помощью квадратичной формы

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k} A_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{16}$$

Тогда образующие коноид характеристические лучи будут «лучами нулевой длины», т. е. линиями, вдоль которых имеет место условие $d\sigma = 0$, или, другими словами, линиями, вдоль которых длина дуги между двумя какими-нибудь точками такой линии равна нулю. Обратно, все линии нулевой длины введенного нами мероопределения являются характеристическими лучами дифференциального уравнения $L(u) = 0$.

Все эти понятия и факты приобретают особенно наглядный характер, если снова выделить переменную $t = x_n = x_{m+1}$ как координату времени и рассматривать специальный тип дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}u_{ik} = 0, \tag{17}$$

---

[1]) Заметим, что мы не получим ничего нового, если будем рассматривать дифференциальное уравнение $\sum_1^n a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0$ как уравнение в частных производных относительно функции $\varphi$ от $n$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и в соответствии с этим введем в рассмотрение характеристические лучи этого уравнения в $n+1$-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $\varphi$. Действительно, в силу однородности этого дифференциального уравнения в $n+1$-мерном пространстве $R_{n+1}$ существует только $n-2$-мерное многообразие характеристических лучей, выходящих из фиксированной точки пространства $R_{n+1}$, и все эти лучи лежат в плоскости $\varphi = \text{const}$. Таким образом, многообразие характеристических лучей, которое, вообще говоря, для уравнений в частных производных первого порядка в $n+1$-мерном пространстве должно быть $n-1$-мерным, в этом случае вырождается в $n-2$-мерное многообразие. Мы избегаем этого вырождения, переходя к дифференциальному уравнению, содержащему $n-1$ независимых переменных и определяющему характеристические многообразия в $n$-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

причем матрица $(a_{ik})$ — определенная положительная матрица, а коэффициенты $a_{ik}$ не зависят от времени $t$.

Характеристики $t=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяют тогда дифференциальному уравнению в частных производных

$$\sum a_{ik}\psi_i\psi_k = 1. \tag{18}$$

Дифференциальные уравнения характеристических лучей фронта волны $t=\psi$ принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{19}$$

а совокупность всех возможных лучей совпадает с совокупностью всех характеристических кривых дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (18). Все лучи, выходящие из фиксированной точки пространства $R_m$, образуют в $R_n$ соответствующий коноид характеристических лучей. Представим уравнение коноида в виде

$$t = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{20}$$

или в более развернутой форме

$$t = \omega(x_1, \ldots, x_m;\ x_1^0, \ldots, x_m^0) = \omega(x;\ x^0), \tag{21}$$

где $x^0$ обозначает вершину коноида с координатами $x_i^0$.

Этот коноид определяет так называемые *шаровые фронты волны*, имеющие начальную точку $x^0$ *центром возмущения*, причем эти фронты волны задаются в пространстве $R_m$ уравнением $t=\omega$.

Вдоль лучей имеет место уравнение

$$\sum A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = \sum a_{ik}\psi_i\psi_k = 1, \tag{22}$$

где $(A_{ik})$ снова означает матрицу, обратную относительно матрицы $(a_{ik})$.

Если теперь ввести в $m$-мерном пространстве $R_m$ мероопределение с помощью квадратичной формы

$$d\rho^2 = \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{23}$$

выражающей квадрат линейного элемента пространства $R_m$, то $t$ равняется длине дуги на характеристических лучах, а поверхность $\psi=t$ действительно является сферой в смысле этого мероопределения, описанной из центра $x^0$ радиусом $t$, если измерять расстояние между двумя точками пространства $R_m$ вдоль характеристических лучей[1]).

---

[1]) Сравнивая дифференциальные уравнения характеристических лучей с результатами гл. II, § 9, мы тотчас же заметим, что характеристические лучи являются геодезическими линиями вариационной задачи

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k}\,dt = \min.$$

Соответствующее уравнению (17) мероопределение в пространстве $R_n$ задается квадратом линейного элемента

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\rho^2, \tag{24}$$

причем геодезическим линиям в $R_m$ соответствуют линии нулевой длины этого мероопределения в $R_n$.

Направление $dx_i$ мы назовем теперь направлением временного типа, если

$$dt^2 - \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0, \tag{25}$$

а элемент поверхности $\varphi(x_1, \ldots, x_m, t) = 0$ мы назовем элементом пространственного типа, если

$$\varphi_t^2 - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\varphi_i\varphi_k > 0 \tag{26}$$

(см. § 1, п. 2).

В частности, ось времени $dx_i = 0$ является действительно направлением временного типа, а само пространство $\varphi = t = 0$ является поверхностью пространственного типа.

Волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{27}$$

является частным случаем уравнения (17). Соответствующие выражения квадратов линейных элементов имеют вид

$$d\rho^2 = \sum dx_i^2 \quad \text{и} \quad d\sigma^2 = dt^2 - \sum dx_i^2. \tag{28}$$

**6. Построение фронта волны по способу Гюйгенса. Конус лучей и направление распространения волны.** Рассмотрим какой-нибудь возможный фронт волны, т. е. какое-нибудь решение $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ дифференциального уравнения (18). Принадлежащие точке $P_0$ шаровые волны обозначим снова через $t = \omega(x_1, \ldots, x_m, P_0)$. Чтобы построить фронт волны в момент $t$, если известно, что в момент $t = 0$ фронт волны совпадает с заданной начальной поверхностью $W_0$, мы можем произвести следующее построение, называемое *построением Гюйгенса*.

Опишем из каждой точки $P_0$ поверхности $W_0$ соответствующий шаровой фронт волны $t = \omega(x, P_0)$ и, заставив точку $P_0$ пробегать всю поверхность $W_0$, построим при фиксированном положительном $t$ огибающую всего этого семейства сфер пространства $x_1, \ldots, x_m$. Мы получим таким путем поверхность $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$, которая и будет искомым фронтом волны. Другими словами, *фронт волны в момент $t$ задается огибающей семейства сфер радиуса $t$ (в смысле введенного выше мероопределения), описанных вокруг точек фронта волны в момент $t = 0$.*

Доказательство этого положения получается непосредственно из теории полного интеграла и соответствующего способа решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка методом огибающих (см. гл. II, § 4 и 8).

Укажем на следующий парадоксальный на первый взгляд факт. Допустим, что $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ является некоторым решением дифференциального уравнения $L[u] = 0$ с фронтом волны $t = \psi$. Пусть этот фронт волны состоит из одной единственной поверхности, перемещающейся с течением времени в пространстве $R_m$.

Если же мы, отправляясь от начального фронта волны $W_0$, произведем построение Гюйгенса, то может оказаться, как в случае волнового уравнения, что огибающая семейства сфер состоит в момент $t > 0$ не из одной, а из двух «геометрически параллельных поверхностей» $W_t$ и $W'_t$, причем обе поверхности удовлетворяют характеристическому дифференциальному уравнению. Однако, только одна из них является по предположению геометрическим местом точек разрыва функции $u$ в момент $t$, а именно — та, которая действительно соответствует более позднему моменту времени $t > 0$, тогда как другая поверхность при нашем предположении соответствует уже минувшему моменту времени — $t$ [1]).

**7. Конус лучей и конус нормалей.** Чтобы нагляднее представить зависимость, существующую между лучами и фронтами волны, целесообразно воспользоваться следующим общим геометрическим понятием. Рассмотрим сначала случай постоянных коэффициентов и будем исходить из того, что характеристическое условие в данной точке дает нам непосредственно не конус Монжа, образуемый характеристическими лучами, а лишь условие для направлений возможных нормалей к характеристическим элементам поверхности. Проведем эти направления нормалей, рассматриваемые как векторы $\xi$ прямоугольного пространства $\xi_1, \ldots, \xi_n$, из начала координат и отождествим пространство $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с пространством $x_1, \ldots, x_n$. Тогда концы этих векторов образуют «конус нормалей», уравнение которого имеет вид

$$\sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k = 0. \tag{29}$$

Характеристические же направления и лучи, проведенные из начала координат, образуют конус Монжа

$$\sum_1^n A_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \tag{30}$$

который мы называем «*конусом лучей*».

Образующие конуса нормалей нормальны к касательным плоскостям конуса лучей, и наоборот. Между этими двумя поверхностями имеет место следующая взаимная зависимость: установим в связке лучей и плоскостей, проходящих через начало координат, коллинеацию, сопоставляющую каждому лучу его полярную плоскость относительно

---

[1]) Характеристическая поверхность *может*, но не должна обязательно содержать точки разрыва решения $u$, так что изложенной выше теории не противоречит тот факт, что построение огибающих может иногда давать куски поверхности, на которых волна в соответствующий момент не имеет разрывов.

мнимого конуса $\sum_1^n \xi_i^2 = 0$. Тогда каждый из обоих рассматриваемых конусов является огибающей полярных плоскостей лучей другого. Назовем такое преобразование преобразованием взаимными полярами. В частном случае дифференциального уравнения (17) мы получаем в качестве сечений обоих конусов с плоскостью $x_n = t = -1$ поверхности пространства $R_m$

$$N = \sum_1^m a_{ik}\xi_i\xi_k = 1$$

и соответственно

$$S = \sum_1^m A_{ik}\xi_i\xi_k = 1,$$

которые мы называем *«поверхностью нормалей»* и соответственно *«поверхностью лучей»*. Эти поверхности находятся между собой во взаимном соотношении, устанавливаемом с помощью коллинеации, сопоставляющей каждой точке пространства $R_m$ ее полярную плоскость относительно поверхности второго порядка $\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$. Каждая из двух поверхностей $S = 0$ и $N = 0$ является огибающей полярных плоскостей точек другой поверхности.

Заметим, что, например, в случае дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{x_1x_1} - \ldots - u_{x_nx_n} = 0$$

конус лучей совпадает с конусом нормалей и задается уравнением

$$t^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 = 0. \tag{31}$$

Для дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u_{yy} = 0$$

уравнение конуса нормалей имеет вид

$$\xi^2 + 2\eta^2 = \tau^2,$$

а уравнение конуса лучей

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = t^2.$$

Если коэффициенты $a_{ik}$ дифференциального уравнения не постоянны, то наши рассмотрения остаются без изменения; мы должны только для каждой точки пространства в отдельности рассматривать соответствующие конусы нормалей и лучей, а в $m$-мерном пространстве поверхность нормалей и поверхность лучей, уравнения которых меняются от точки к точке.

Чтобы получить возможность применить соответствующие соотношения к задачам высших порядков, которые мы будем рассматривать в § 3, мы установим в связке лучей и плоскостей, проходящих через

начало координат пространства переменных $\xi$ или $x$, взаимное соответствие между лучами и плоскостями связки с помощью рассмотренной выше коллинеации в пространстве $R_n$ и соответственным образом определим взаимное соответствие между точками и $n-2$-мерными плоскостями в подпространстве $x_n = t = -1$. С помощью такой коллинеации мы сопоставляем каждому конусу

$$N(\xi) = 0,$$

где $N$ — некоторая однородная функция координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, огибающую полярных плоскостей лучей этого конуса относительно мнимого конуса $\sum_1^n \xi_i^2 = 0$, а каждой поверхности $N(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$ огибающую полярных плоскостей точек этой поверхности относительно мнимой сферы $\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$. Это преобразование является снова взаимным. Далее, оно является преобразованием прикосновения, т. е. касательной плоскости к поверхности $N$ в точке $P$ оно сопоставляет на поверхности $S$ точку касания плоскости, соответствующей точке $P$, с поверхностью $S$. *Выпуклая поверхность $N$ преобразуется в выпуклую поверхность $S$.* Наконец, *коническая вершина поверхности $N$, т. е. особая точка, через которую проходит семейство касательных плоскостей к $N$, зависящее от $m-2$ параметров, преобразуется в плоский кусок поверхности $S$.*

**8. Пример. Волновое уравнение Пуассона в трехмерном пространстве.** Волновое уравнение Пуассона

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \tag{32}$$

служит очень поучительным примером для иллюстрации значения внутренних производных на характеристическом многообразии.

Пользуясь введенными нами понятиями, остановимся вкратце на решении задачи Коши для этого уравнения, задавая при $t = 0$ начальные значения $u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$ и $u_t(x, y, z, 0) = \psi_1(x, y, z)$. Мы уже рассматривали эту задачу раньше (гл. III, § 6, п. 2) и в § 5 остановимся на ней еще подробнее.

Введем следующие дифференциальные символы:

$$A_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad A_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad A_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t-\tau}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{t-\tau}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Тогда дифференциальные процессы $A_1$, $A_2$ и $A_3$ и характеристическая производная $\frac{\partial}{\partial s}$ будут на характеристическом конусе

$$(t-\tau)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

проходящем через точку $(0, 0, 0, \tau)$, внутренними дифференциальными процессами, тогда как $\frac{\partial}{\partial \nu}$ является нормальной производной относительно этого конуса. Связь между внутренними производными конуса $K$ и дифференциальным выражением $L[u]$ задается следующим тождеством, имеющим место на конусе $(t-\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\left.\begin{aligned} \Psi[u] = -(t-\tau)^2 L[u] - (t-\tau)\frac{\partial u}{\partial s} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left((t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \\ = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, u. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Заметим теперь, что поверхностный интеграл от $A_1[v]$, взятый по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$. в трехмерном пространстве, равен нулю для любой функции $v$, ибо, как легко убедиться, интеграл от $A_1[v]$, взятый по сечению сферы с плоскостью $x = \text{const}$., обращается в нуль в силу самого определения выражения $A_1[v]$ [1]). Точно так же обращаются в нуль взятые по поверхности такой сферы интегралы от $A_2[v]$, $A_3[v]$, а, следовательно, и от

$$\Psi[v] = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, v.$$

Составим теперь с помощью выражения $\frac{1}{t-\tau}\Psi[u]$ интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{\Psi[u]}{t-\tau}\, ds\, d\omega,$$

взятый по части поверхности конуса $K$, лежащей между плоскостью основания $t = 0$ и вершиной $P(0, 0, 0, \tau)$. В силу дифференциального уравнения $L[u] = 0$ и предыдущих замечаний мы получаем сначала

$$\iiint\limits_{(K)} \left\{\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left((t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right\} ds\, d\omega = 0.$$

Произведя интегрирование по $s$ от $s = t = 0$ до $s = t = \tau$, мы получим:

$$4\pi\tau^2 u(P) - \iint u\, d\omega + \tau \iint \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\omega = 0, \quad (34)$$

причем интегралы берутся по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$. Это и есть известная нам уже формула решения волнового уравнения Пуассона (гл. III, § 6).

Для неоднородного уравнения Пуассона мы таким же путем получаем формулу решения, найденную нами же раньше в гл. III, § 6, п. 4.

Изложенный метод решения принадлежит Бельтрами и основывается на том, что вдоль характеристического конуса дифференциальное уравнение может быть представлено в особенно простой форме

---

[1]) Введя цилиндрические координаты и полагая, например, $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, мы получим $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = y\frac{\partial v}{\partial z} - z\frac{\partial v}{\partial y} = A_1[v]$. (*Прим. перев.*)

с помощью внутренних дифференциальных операций. Эта форма дифференциального уравнения такова, что она дает возможность непосредственно путем интегрирования только по поверхности конуса получить выражение для значения функции в вершине конуса через начальные значения вдоль окружности основания, что и дает нам искомое решение и вместе с тем доказывает, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является *уравнением типа Гюйгенса.*

Из предыдущего следует далее, что для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка не существует аналогичного метода интегрирования, который давал бы решение задачи с помощью интегральных процессов, внутренних относительно характеристического коноида, ибо такой метод интегрирования существует только при условии справедливости принципа Гюйгенса, но, как известно, возможны случаи, когда принцип Гюйгенса не имеет места. Остается еще открытым вопрос о том, нельзя ли получить необходимые и достаточные условия справедливости принципа Гюйгенса путем исследования дифференциального уравнения вдоль характеристических многообразий изложенным выше способом и в случае выполнения этих условий вывести соответствующую формулу решения.

## § 3. Характеристики дифференциальных уравнений высших порядков

Понятие характеристики и характеристическое условие получаются в случае дифференциальных уравнений высших порядков, а также и для систем дифференциальных уравнений совершенно аналогично рассмотренному выше случаю дифференциальных уравнений второго порядка. Исходным пунктом служит задача Коши, в которой начальные значения заданы вдоль некоторого многообразия $M$: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Мы рассматриваем, далее, в какой-нибудь точке этого начального многообразия внешнюю производную, выводящую за пределы многообразия $M$, и спрашиваем себя, однозначно ли определяется эта внешняя производная с помощью начальных условий для функции $u$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению; если же нет, то не представляет ли собой данное дифференциальное уравнение для точки, лежащей на начальном многообразии $M$, дополнительное ограничение, которому должны быть подчинены начальные данные. Если второй случай этой альтернативы имеет место во всех точках многообразия $\varphi = 0$, то это многообразие называется характеристическим, и все рассмотрения предыдущих параграфов легко распространяются на этот случай. Мы ограничимся наиболее типичными частными случаями.

**1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.** Рассмотрим, например, линейное дифференциальное выражение четвертого порядка

$$L[u] = \sum_{i, k, l, m=1}^{n} a_{iklm} u_{iklm}, \tag{1}$$