с помощью внутренних дифференциальных операций. Эта форма дифференциального уравнения такова, что она дает возможность непосредственно путем интегрирования только по поверхности конуса получить выражение для значения функции в вершине конуса через начальные значения вдоль окружности основания, что и дает нам искомое решение и вместе с тем доказывает, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является *уравнением типа Гюйгенса.*

Из предыдущего следует далее, что для общего линейного дифференциального уравнения второго порядка не существует аналогичного метода интегрирования, который давал бы решение задачи с помощью интегральных процессов, внутренних относительно характеристического коноида, ибо такой метод интегрирования существует только при условии справедливости принципа Гюйгенса, но, как известно, возможны случаи, когда принцип Гюйгенса не имеет места. Остается еще открытым вопрос о том, нельзя ли получить необходимые и достаточные условия справедливости принципа Гюйгенса путем исследования дифференциального уравнения вдоль характеристических многообразий изложенным выше способом и в случае выполнения этих условий вывести соответствующую формулу решения.

§ 3. Характеристики дифференциальных уравнений высших порядков

Понятие характеристики и характеристическое условие получаются в случае дифференциальных уравнений высших порядков, а также и для систем дифференциальных уравнений совершенно аналогично рассмотренному выше случаю дифференциальных уравнений второго порядка. Исходным пунктом служит задача Коши, в которой начальные значения заданы вдоль некоторого многообразия M: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Мы рассматриваем, далее, в какой-нибудь точке этого начального многообразия внешнюю производную, выводящую за пределы многообразия M, и спрашиваем себя, однозначно ли определяется эта внешняя производная с помощью начальных условий для функции u, удовлетворяющей дифференциальному уравнению; если же нет, то не представляет ли собой данное дифференциальное уравнение для точки, лежащей на начальном многообразии M, дополнительное ограничение, которому должны быть подчинены начальные данные. Если второй случай этой альтернативы имеет место во всех точках многообразия $\varphi = 0$, то это многообразие называется характеристическим, и все рассмотрения предыдущих параграфов легко распространяются на этот случай. Мы ограничимся наиболее типичными частными случаями.

1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Рассмотрим, например, линейное дифференциальное выражение четвертого порядка

$$L[u] = \sum_{i, k, l, m=1}^{n} a_{iklm} u_{iklm}, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{iklm} являются заданными функциями от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$L[u] + b = 0, \tag{2}$$

где b означает выражение, которое помимо независимых переменных может содержать также неизвестную функцию u и ее производные до третьего порядка включительно. Мы рассматриваем это дифференциальное выражение и соответствующее дифференциальное уравнение вдоль начального многообразия M, заданного уравнением $\varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$, и вводим в пространстве R_n вместо переменных x, новые переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и λ_n, причем $\lambda_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, так что $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ снова обозначают «внутренние» относительно M переменные. При переходе к этим новым переменным дифференциальное выражение $L[u]$ принимает вид

$$L[u] = Q\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4} + \ldots,$$

где

$$Q = \sum_{i,k,l,m} a_{iklm}\varphi_i\varphi_k\varphi_l\varphi_m, \tag{3}$$

а многоточием обозначено выражение, уже не содержащее внешней производной четвертого порядка $\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}$. Мы теперь сразу видим, что действительно снова имеет место наша фундаментальная альтернатива: *либо выражение Q в некоторой точке P многообразия M отлично от нуля; тогда дифференциальное уравнение* (2) *однозначно определяет в точке P четвертую внешнюю производную $\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}$, если вдоль начального многообразия M заданы значения функции u и ее производных до третьего порядка включительно. Либо $Q = 0$; тогда $L[u]$ является в точке P внутренним дифференциальным выражением относительно полоски третьего порядка, соответствующей многообразию M, и дифференциальное уравнение* (2) *дает дополнительное ограничение, которому должна быть подчинена эта начальная полоска.*

Если условие $Q = 0$ выполняется вдоль всего начального многообразия M, то M называется *характеристическим многообразием. Характеристическое условие* имеет, таким образом, вид

$$\sum_{i,k,l,m=1}^{n} a_{iklm}\varphi_i\varphi_k\varphi_l\varphi_m = 0, \qquad \text{если } \varphi = 0. \tag{4}$$

Так же, как и для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, характеристическое условие равносильно дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка с неизвестной функцией $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ от $n-1$ независимых переменных

$x_1, \ldots, x_{n-1}$, если уравнение характеристического многообразия задано в форме $\varphi = x_n - \psi = 0$. Если же рассматривать уравнение (4) как дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции φ от n независимых переменных, то уравнение $\varphi = \text{const}$. даст нам семейство характеристических многообразий, зависящее от одного параметра, и наоборот.

Все это, очевидно, остается в силе для линейного дифференциального уравнения какого угодно порядка. Характеристическое условие всегда выражается требованием обращения в нуль некоторой однородной формы Q от частных производных φ_i функции φ.

Понятие *луча* или *бихарактеристики*, определяемой как характеристическая кривая дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (4), также непосредственно переносится на линейные дифференциальные уравнения высших порядков, так что остаются в силе все связанные с этим рассмотрения предыдущего параграфа. Так же, как и для уравнений второго порядка, мы получаем следующий результат:

Для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами характеристические лучи всегда являются прямыми линиями.

Подчеркнем здесь еще раз, что классификация дифференциальных уравнений по основным типам тесно связана с инвариантными свойствами формы $Q(\varphi)$ относительно группы афинных преобразований с вещественными коэффициентами (с «индексом инерции» и «дефектом» формы в квадратичном случае и с соответствующими обобщениями для форм высших порядков) (см. гл. III, § 4). Если $Q(\varphi)$ *определенная* форма, то не существует вещественных характеристик, и данное линейное дифференциальное уравнение называется уравнением *эллиптического* типа. Если же $Q(\varphi)$ — *невырождающаяся неопределенная* форма, то дифференциальное уравнение называется *гиперболическим*. Среди различных видов гиперболических уравнений следует, однако, выделить, имея в виду приложения к физике, *вполне гиперболический случай*, как это было сделано уже раньше в гл. III, § 4. Мы определяем понятие вполне гиперболического дифференциального уравнения с помощью следующего условия. Если речь идет о дифференциальном уравнении порядка k, то мы требуем, чтобы «конус нормалей» $Q = 0$ в пространстве $\xi_1, \ldots, \xi_n$, где $\xi_\nu = \varphi_\nu$, состоял из $\frac{k}{2}$ охватывающих друг друга вещественных полостей. Таким образом, порядок k должен быть четным. Все встречающиеся в физике дифференциальные уравнения высших порядков для различных процессов распространения энергии всегда являются вполне гиперболическими.

Например, дифференциальное уравнение

$$u_{tttt} - \Delta\Delta u = u_{tttt} - u_{xxxx} - 2u_{xxyy} - u_{yyyy} = 0$$

с неизвестной функцией $u(x, y, t)$ не является вполне гиперболическим, ибо соответствующий конус нормалей

$$t^4 - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

состоит не из двух, а только из одной вещественной полости.

В противоположность этому дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(4\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)u = 0$$

вполне гиперболично. Конус нормалей этого дифференциального уравнения задается уравнением

$$(t^2 - x^2 - y^2)(4t^2 - x^2 - y^2) = 0$$

и состоит из двух вещественных полостей, а именно, из двух круглых конусов. Поверхность нормалей состоит из двух концентрических окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. В случае квазилинейных или нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков все предыдущее остается в основном в силе, с тем только отличием, что характеристическое условие тогда относится не к точечному многообразию в пространстве независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, а к многообразию на заданной интегральной поверхности в пространстве $(u, x_1, \ldots, x_n)$ или же к заданной интегральной полоске совершенно так же, как это имело место в случае уравнений второго порядка или же в случае двух независимых переменных (см. гл. V, § 2).

2. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения гидродинамики. Рассмотрим в качестве примера нелинейной задачи систему *дифференциальных уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости* на плоскости и вместе с тем еще раз выясним значение понятия характеристик в случае системы дифференциальных уравнений и получим некоторые результаты, представляющие самостоятельный интерес. Случай стационарного движения нами уже был исследован в гл. V, § 2, п. 5. Если неизвестными функциями являются компоненты скорости и плотность жидкости $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $\rho(x, y, t)$, причем задана функция давления $p(\rho)$, удовлетворяющая условию $p'(\rho) > 0$, то *дифференциальные уравнения движения Эйлера* имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho u_t + \rho u u_x + \rho v u_y + p'\rho_x &= 0, \\ \rho v_t + \rho u v_x + \rho v v_y + p'\rho_y &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ — некоторое начальное многообразие, вдоль которого заданы u, v и ρ. Тогда этими начальными данными однозначно определяются вдоль начального многообразия также и все производные величин u, v и ρ и, в частности, внешние производные

u_φ, v_φ и ρ_φ, если только вдоль многообразия $\varphi = 0$ не имеет места характеристическое условие

$$\begin{vmatrix} \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \rho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \rho\varphi_x & \rho\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Путем простого вычисления это условие приводится к виду

$$\rho^2(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)\,[(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)] = 0. \quad (7)$$

Эти характеристические поверхности в пространстве x, y и t или соответствующие семейства кривых $t = \psi(x, y)$ на плоскости x, y, которые мы получаем, полагая $\varphi(x, y) = t - \psi(x, y)$, являются снова возможными многообразиями разрывов или фронтами волны для движения жидкости. Характеристическое условие может быть также записано в форме

$$\rho^2(1 - u\psi_x - v\psi_y)\,[(1 - u\psi_x - v\psi_y)^2 - p'(\psi_x^2 + \psi_y^2)] = 0 \quad (7')$$

или

$$\rho^2(t_\nu + ux_\nu + vy_\nu)\,[(t_\nu + ux_\nu + vy_\nu)^2 - p'(x_\nu^2 + y_\nu^2)] = 0, \quad (7'')$$

где t_ν, x_ν и y_ν обозначают направляющие косинусы нормали к поверхности $\varphi(x, y, t) = 0$. В зависимости от того, какой из множителей этих произведений обращается в нуль, мы получаем в качестве характеристик, с одной стороны, многообразия, определяемые уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \\ \text{или}\quad &t_\nu + ux_\nu + vy_\nu = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Проекции соответствующих лучей на плоскость x, y являются не чем иным, как *линиями тока потока жидкости*, а сами лучи в трехмерном пространстве x, y, t задаются уравнениями $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ и определяют как линии тока, так и скорость потока. С другой стороны, мы получаем характеристические многообразия второго типа, задаваемые уравнением

$$\left.\begin{aligned} &(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0 \\ \text{или}\quad &(t_\nu + ux_\nu + vy_\nu)^2 - p'(x_\nu^2 + y_\nu^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

при условии $\varphi = 0$.

Направления *лучей или бихарактеристик*, определяемые отношениями $dt : dx : dy$, представляют снова *«скорости распространения»* разрывов или лучевые скорости, а уравнение Монжа конуса лучей, принадлежащего к характеристическим многообразиям диф-

ференциального уравнения в частных производных (9), как легко убедиться, имеет следующий вид:

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = p'. \tag{10}$$

Величина $\sqrt{p'}$ называется в акустике или гидродинамике *скоростью звука*. Таким образом, уравнение (10) выражает следующий физический закон: *относительная скорость распространения разрывов по отношению к потоку равняется скорости звука.*

Все эти факты, равно как их связь с рассмотренным раньше случаем стационарного потока (см. гл. V, § 2, п. 5), могут быть выражены в особенно наглядной форме с помощью следующего геометрического построения.

При заданных u и v конус Монжа характеристического дифференциального уравнения в пространстве x, y и t, имеющий вершиной начало координат $x = y = t = 0$, дается уравнением

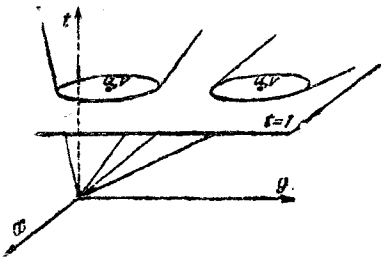
$$\left(\frac{x}{t} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{t} - v\right)^2 = p'(\rho).$$

Этот конус может быть построен путем центральной проекции окружности

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = p'(\rho),$$

лежащей в плоскости $t = 1$, из начала координат как центра проекции.

В зависимости от того, содержит ли эта окружность внутри себя точку $x = 0$, $y = 0$ или нет, т. е. в зависимости от того, имеет ли место неравенство $u^2 + v^2 < p'$ или же неравенство $u^2 + v^2 > p'$, ось t лежит внутри или вне рассматриваемого конуса, так что если скорость звука меньше скорости потока, то характеристический конус направлен настолько косо, что ось t остается вне его.



Черт. 35.

Чтобы перейти к стационарному случаю, мы должны приравнять нулю все производные по времени t. Поэтому из всех касательных плоскостей рассматриваемого конуса Монжа в стационарном случае возможными являются только те, для которых $\varphi_t = 0$, т. е. касательные плоскости, перпендикулярные к плоскости x, y и, следовательно, проходящие через ось t. Лучи, вдоль которых эти плоскости касаются конуса, дают нам два характеристических направления для стационарного случая.

Но через ось t можно провести две различные вещественные касательные плоскости к конусу Монжа тогда и только тогда, когда ось t лежит вне конуса, а согласно предыдущему это имеет

место только в том случае, когда скорость потока $\sqrt{u^2+v^2}$ больше скорости звука $\sqrt{p'}$. Мы, таким образом, исходя из общего случая, снова получили тот же результат, к которому мы пришли уже раньше в гл. V, § 2, рассматривая специально стационарный поток.

3. Дальнейшие примеры. Кристаллооптика. Уже в гл. III, § 4, мы вывели характеристическое условие для *уравнений Максвелла*, исходя из несколько иной точки зрения. Здесь мы рассмотрим обобщение уравнений Максвелла, имеющих место в эфире, на *кристаллооптические процессы*. Общие уравнения Максвелла, связывающие между собой магнитный вектор $\mathfrak{H}$, электрический вектор $\mathfrak{E}$, электрическое смещение $\mathfrak{D}$ и магнитное смещение $\mathfrak{B}$, имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H}=\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}},\quad \operatorname{rot}\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}, \tag{11}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t, а c — скорость света.

При этом $\mu\mathfrak{H}=\mathfrak{B}$, где μ — магнитная проницаемость, которую мы считаем постоянной, а между компонентами u_1, u_2, u_3 электрического вектора $\mathfrak{E}$ и электрическим смещением $\mathfrak{D}$ существует зависимость

$$\mathfrak{D}=(\varepsilon_1 u_1,\ \varepsilon_2 u_2,\ \varepsilon_3 u_3),$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — три диэлектрические постоянные по трем направлениям осей координат. Несовпадение этих трех констант и является характеристическим свойством кристаллической среды.

Исключая из этих уравнений вектор $\mathfrak{H}$ и введя константы

$$\sigma_i=\frac{\mu}{c^2}\varepsilon_i,$$

мы получим для электрического вектора три линейных дифференциальных уравнения

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1\ddot{u}_1&=\Delta u_1-\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\,\partial z},\\
\sigma_2\ddot{u}_2&=\Delta u_2-\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y\,\partial x},\\
\sigma_3\ddot{u}_3&=\Delta u_3-\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Поступая так же, как и раньше, и задавая характеристическое многообразие уравнением $\omega(x, y, z, t)=0$, мы получим характеристическое условие для системы дифференциальных уравнений (12) в форме

$$\begin{vmatrix}
\rho^2-\xi^2-\sigma_1\tau^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta\\
-\eta\xi & \rho^2-\eta^2-\sigma_2\tau^2 & -\eta\zeta\\
-\zeta\xi & -\zeta\eta & \rho^2-\zeta^2-\sigma_3\tau^2
\end{vmatrix}=0, \tag{13}$$

где $\tau = \omega_t$, $\xi = \omega_x$, $\eta = \omega_y$, $\zeta = \omega_z$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Уравнение (13) должно иметь место вдоль многообразия $\omega = 0$; если, в частности, $\omega = t - \pi(x, y, z)$, то $\tau = 1$, и мы получаем:

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi^2 - \sigma_1 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & \rho^2 - \eta^2 - \sigma_2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \rho^2 - \zeta^2 - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристические лучи являются прямыми линиями, как и вообще для всех дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементарными вычислениями мы получаем:

$$H(\xi, \eta, \zeta) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1 - \psi + \rho^2\varphi),$$

где

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\rho^2 - \xi^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \eta^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \zeta^2}{\sigma_3},$$

$$\varphi(\xi, \zeta, \eta) = \frac{\xi^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\eta^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\zeta^2}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Уравнение (13) мы можем теперь записать в виде

$$\tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0. \tag{14}$$

Если рассматривать ξ, η, ζ как прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, то поверхность $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ является *поверхностью нормалей* дифференциальных уравнений кристаллооптики; в пространстве с координатами ξ, η, ζ, τ уравнение $H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0$ дает *конус нормалей*, проектирующий из начала координат поверхность нормалей, помещенную в плоскости $\tau = 1$. Напомним еще раз геометрический смысл поверхности нормалей согласно нашим предыдущим рассмотрениям.

Выберем в пространстве x, y, z некоторую фиксированную точку, например, начало координат; так как коэффициенты постоянны, то выбор начальной точки не играет роли. Рассмотрим в этой точке все возможные касательные плоскости к характеристическим поверхностям, проходящим через эту точку; к каждой характеристической поверхности восставим перпендикулярный вектор, компоненты которого нам дают соответствующие этому направлению *нормальные скорости* характеристической поверхности. Концы этих векторов образуют тогда поверхность нормалей. Эта поверхность нормалей является поверхностью четвертого порядка и называется *волновой поверхностью Френеля*. Она не зависит от выбора рассматриваемой точки пространства.

Уравнение $H(\xi, \eta, \zeta) = 0$ поверхности нормалей может быть также представлено в одном из следующих двух видов:

$$\frac{\sigma_1\xi^2}{\rho^2 - \sigma_1} + \frac{\sigma_2\eta^2}{\rho^2 - \sigma_2} + \frac{\sigma_3\zeta^2}{\rho^2 - \sigma_3} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - \sigma_1} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - \sigma_2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - \sigma_3} = 1. \tag{16}$$

В дополнениях к настоящей главе мы подробнее остановимся на интегрировании дифференциальных уравнений кристаллооптики, и для этой цели нам придется глубже исследовать геометрические свойства поверхности нормалей и поверхности лучей. Здесь же мы только сформулируем следующий результат, который будет нами получен в дальнейшем:

Поверхность нормалей и поверхность лучей состоят каждая из двух вещественных замкнутых полостей, причем внутренняя полость является выпуклой. С помощью преобразования взаимными полярами внутренняя полость поверхности нормалей переходит в выпуклую оболочку внешней полости поверхности лучей. Соответствующие соотношения имеют место также и между конусом нормалей и конусом лучей в четырехмерном пространстве.

§ 4. Теоремы единственности и область зависимости для задач Коши [1])

1. Волновое уравнение. В гл. V, § 3 мы рассмотрели понятия *единственности*, *области зависимости* и области влияния. Эти фундаментальные рассмотрения непосредственно переносятся и на случай многих переменных. Мы считаем лишним снова повторять наши прежние рассуждения для этого случая и можем ограничиться проведением доказательств единственности для ряда особенно типичных примеров. В качестве первого примера мы рассмотрим волновое уравнение в двухмерном пространстве

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

и проведем для него доказательство единственности, которое в одном пункте отличается от соответствующего рассуждения в гл. V. Пусть C — произвольная начальная поверхность пространственного типа, заданная уравнением $\varphi(x, y, t) = 0$, так что на этой поверхности выполняется условие

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0 \quad \text{или} \quad t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

где x_ν, y_ν, t_ν обозначают компоненты нормального к поверхности единичного вектора, т. е.

$$x_\nu = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad y_\nu = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad t_\nu = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}.$$

Допустим, что решение u дифференциального уравнения вместе со своими первыми производными обращается в нуль на поверх-

---

[1]) Излагаемый в этом параграфе метод принадлежит Zaremba, *Rendic. Acc. Lincei*, серия 5, т. 14 (1915), стр. 904. Этот метод был впоследствии вновь получен и обобщен Рубиновичем, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, т. 30 (1920), стр. 65 и *Phys. Ztschr.*, т. 27 (1926), стр. 707, а также Friedrichs und Lewy, *Math. Ann.*, т. 98 (1928), стр. 192.