В дополнениях к настоящей главе мы подробнее остановимся на интегрировании дифференциальных уравнений кристаллооптики, и для этой цели нам придется глубже исследовать геометрические свойства поверхности нормалей и поверхности лучей. Здесь же мы только сформулируем следующий результат, который будет нами получен в дальнейшем:

Поверхность нормалей и поверхность лучей состоят каждая из двух вещественных замкнутых полостей, причем внутренняя полость является выпуклой. С помощью преобразования взаимными полярами внутренняя полость поверхности нормалей переходит в выпуклую оболочку внешней полости поверхности лучей. Соответствующие соотношения имеют место также и между конусом нормалей и конусом лучей в четырехмерном пространстве.

§ 4. Теоремы единственности и область зависимости для задач Коши [1])

1. Волновое уравнение. В гл. V, § 3 мы рассмотрели понятия *единственности*, *области зависимости* и области влияния. Эти фундаментальные рассмотрения непосредственно переносятся и на случай многих переменных. Мы считаем лишним снова повторять наши прежние рассуждения для этого случая и можем ограничиться проведением доказательств единственности для ряда особенно типичных примеров. В качестве первого примера мы рассмотрим волновое уравнение в двухмерном пространстве

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

и проведем для него доказательство единственности, которое в одном пункте отличается от соответствующего рассуждения в гл. V. Пусть C — произвольная начальная поверхность пространственного типа, заданная уравнением $\varphi(x, y, t) = 0$, так что на этой поверхности выполняется условие

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0 \quad \text{или} \quad t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

где x_ν, y_ν, t_ν обозначают компоненты нормального к поверхности единичного вектора, т. е.

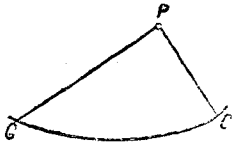
$$x_\nu = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad y_\nu = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}, \quad t_\nu = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}.$$

Допустим, что решение u дифференциального уравнения вместе со своими первыми производными обращается в нуль на поверх-

---

[1]) Излагаемый в этом параграфе метод принадлежит Zaremba, *Rendic. Acc. Lincei*, серия 5, т. 14 (1915), стр. 904. Этот метод был впоследствии вновь получен и обобщен Рубиновичем, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, т. 30 (1920), стр. 65 и *Phys. Ztschr.*, т. 27 (1926), стр. 707, а также Friedrichs und Lewy, *Math. Ann.*, т. 98 (1928), стр. 192.

ности C. Для этого достаточно предположить, что u и u_t равны нулю на C. Мы утверждаем: *при этих условиях u обращается в нуль тождественно во всех тех точках, для которых характеристический конус вместе с вырезаемой им из поверхности C частью этой поверхности образует замкнутую поверхность, ограничивающую некоторую область G.* Характеристическим конусом является в данном случае конус в пространстве x, y, t, образующие которого наклонены к плоскости $t=0$ под углом в 45°; эти прямые являются характеристическими лучами нашего уравнения.



Черт. 36.

Для доказательства мы берем за основу тождество

$$2u_tL[u] = -2(u_tu_x)_x - 2(u_tu_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y^2)_t + (u_t^2)_t. \qquad (2)$$

Проинтегрируем это уравнение по области G. Так как правая часть представляет собой выражение типа дивергенции, то по интегральной теореме Гаусса мы получим, учитывая начальные условия на поверхности C и дифференциальное уравнение $L[u]=0$, следующее интегральное соотношение:

$$0 = \iint\limits_M (u_x^2 t_\nu + u_y^2 t_\nu + u_t^2 t_\nu - 2u_t u_x x_\nu - 2u_t u_y y_\nu)\, do =$$

$$= \iint\limits_M \frac{1}{t_\nu}[(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2]\, do,$$

где M означает часть поверхности конуса, принадлежащую к границе области G, do — элемент поверхности, причем учтено, что на M имеет место соотношение $t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 = 0$. Из обращения в нуль последнего интеграла следует в силу знакопостоянства t_ν, что подинтегральное выражение равно нулю во всех точках поверхности M; следовательно, всюду на M имеют место уравнения $u_x t_\nu - u_t x_\nu = 0$ и $u_y t_\nu - u_t y_\nu = 0$; это означает, что на M обращаются в нуль две линейно независимые внутренние относительно M производные функции u. Поэтому функция u должна быть постоянной на M, а в силу начального условия u тождественно равна нулю во всех точках поверхности M. Отсюда, в частности, следует, что u обращается в нуль в точке P, что и требовалось доказать.

Вместе с тем наше предыдущее рассмотрение нам дает снова *область зависимости* для рассматриваемого дифференциального уравнения в следующем смысле: *значения решения u в точке P при заданных начальных значениях на поверхности C зависят только от начальных значений на той части C, которая вырезается из C характеристическим конусом, проведенным из точки P.*

Совершенно таким же образом решается вопрос о единственности и области зависимости в пространстве трех и большего числа измерений для общего дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + au_x + bu_y + cu_t + du = 0,$$

где коэффициенты a, b, c, d могут быть произвольными непрерывными функциями от t и пространственных переменных. За образец здесь снова следует принять доказательство, проведенное в гл. V.

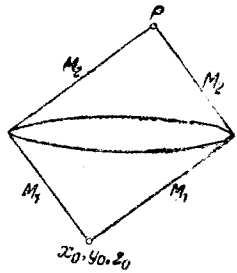
Мы здесь остановимся еще на доказательстве единственности для *«характеристической задачи Коши» в случае волнового уравнения*.

В задаче Коши этого типа начальные значения задаются уже не на начальном многообразии пространственного типа, удовлетворяющем условию $\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$, а на характеристическом многообразии специального вида, именно — на характеристическом полуконусе K:

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0 \qquad (t \geqslant t_0). \tag{3}$$

В этом случае, в соответствии с нашими прежними общими результатами, мы уже не можем задавать произвольно начальные значения функции u и ее внешней производной (определяя этим однозначно и все другие производные на начальной поверхности), а должны ограничиться заданием значений одной только функции u. При этом мы в качестве начальных значений функции u на поверхности конуса задаем значения, которые на этой поверхности принимает некоторая функция, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности поверхности конуса, включая вершину. *Докажем, что заданием значений u на полуконусе K, определенном уравнением* (3), *функция u однозначно определяется всюду внутри этого полуконуса, т. е. в области*

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0 \text{ и } t > t_0.$$



Черт. 37.

Доказательство непосредственно следует из приведенных нами выше формул. В самом деле, допустим, что начальные значения некоторого решения u обращаются в нуль на характеристическом конусе; проинтегрируем выражение (2) по области G, которая ограничена, с одной стороны, этим конусом, а, с другой стороны, характеристическим конусом, выходящим из какой-нибудь точки P; обозначим через M_1 и M_2 части поверхностей соответствующих конусов.

В этих обозначениях мы снова получим:

$$\iint\limits_{M_2} \frac{1}{t_\nu} \left[(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2\right] do = 0.$$

Действительно, интеграл по поверхности M_1 нижнего конуса равен нулю, так как подинтегральное выражение содержит только внутрен-

ние относительно M_1 производные функции u, которые в силу нашего предположения обращаются на M_1 в нуль (ибо $u\big|_{M_1} = 0$).

Отсюда следует, что и на поверхности M_2 конуса, принадлежащего к точке P, обе линейно независимые внутренние производные $u_x t_\nu - u_t x_\nu$ и $u_y t_\nu - u_t y_\nu$ также обращаются в нуль; таким образом, u постоянно и, следовательно, равно нулю на поверхности M_2, ибо u обращается в нуль вдоль линии пересечения поверхностей M_1 и M_2.

2. Дифференциальное уравнение $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (уравнение Дарбу). Приведем в качестве второго примера применения нашего общего метода с несколько видоизмененным ходом рассуждения доказательство единственности для дифференциального уравнения Дарбу, которое нам еще понадобится в дальнейшем. Уравнение Дарбу имеет вид

$$L[u] = u_{tt} + \frac{\lambda}{t} u_t - \Delta u = 0, \tag{4}$$

где λ может быть любой неотрицательной и непрерывно дифференцируемой функцией переменных x_i и t.

Характеристическое условие снова имеет вид

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \ldots - \varphi_{x_m}^2 = 0 \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \nu}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \nu}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial x_m}{\partial \nu}\right)^2 = 0, \tag{5'}$$

а уравнение характеристического конуса имеет вид

$$\varphi(x, t) = (t - \tau)^2 - \sum_{i=1}^{m} (x_i - \xi_i)^2 = 0.$$

Докажем, что если какое-нибудь дважды непрерывно дифференцируемое решение u дифференциального уравнения (4) *вместе со своей производной u_t обращается в нуль вдоль лежащего в плоскости $t = 0$ основания B характеристического конуса с вершиной в $P(t > 0)$, то функция u обращается в нуль в точке P, а также внутри области G, ограниченной этим конусом.*

Доказательство. Имеем:

$$0 = -2u_t L[u] = 2\sum_{i=1}^{m} (u_t u_{x_i})_{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}^2 + u_t^2\right)_t - \frac{2\lambda}{t} u_t^2.$$

Интегрируя по области G с элементом объема dv и применяя интегральную теорему Гаусса к выражению типа дивергенции, стоящему в правой части, мы получим, учитывая начальное условие вдоль основания B, следующее интегральное соотношение:

$$0 = \iiint\limits_G \frac{2\lambda}{t} u_t^2 dv + \iint\limits_M \left[-2u_t \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \nu} + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}^2\right) \frac{\partial t}{\partial \nu}\right] do,$$

где M — боковая поверхность конуса, do — элемент поверхности на M. Подинтегральное выражение в интеграле по поверхности M может быть в силу характеристического условия (5′) представлено в виде

$$\frac{1}{t_\nu}\sum_{i=1}^{m}\left(u_{x_i}\frac{\partial t}{\partial \nu}-u_t\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2.$$

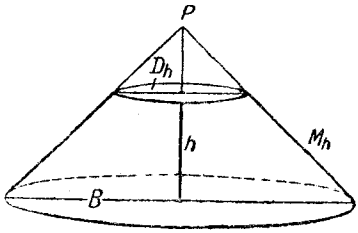
Так как по условию $\lambda \geqslant 0$, то мы получаем отсюда непосредственно, что всюду в G имеет место уравнение $u_t=0$, и, следовательно, u тождественно обращается в нуль всюду в области G, что и требовалось доказать.

3. Уравнения Максвелла для эфира. В качестве первого примера системы дифференциальных уравнений с четырьмя независимыми переменными мы снова рассмотрим систему уравнений Максвелла, полагая, что скорость света $c=1$ (см. гл. III, § 4).

Уравнения Максвелла имеют тогда следующий вид:

$$\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0;\quad \mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E}=0\ ^{1)}. \tag{6}$$

Рассмотрим для этой системы задачу Коши, принимая за начальное многообразие плоскость $t=0$ и задавая начальные значения векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$. *Мы должны доказать, что если обращаются в нуль начальные значения $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, то векторы $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ обращаются в нуль тождественно.*



Черт. 38.

Каждой точке P четырехмерного пространства x, y, z, t принадлежит характеристический конус, вырезающий из начальной плоскости $t=0$ трехмерный шар B. Пусть точка P имеет координаты $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $t=\tau$. Плоскость $t=h$, параллельная основанию, отсекает от этого четырехмерного конуса G усеченный конус G_h (черт. 38), ограниченный нижним основанием B, частью M_h боковой поверхности конуса и верхним основанием D_h, представляющим собой трехмерный шар в трехмерной плоскости $t=h$.

Применяя известную формулу векторного анализа $\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E}-\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H}=\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]$, мы получаем как следствие из уравнений Максвелла следующее тождество:

$$0=2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t-\operatorname{rot}\mathfrak{H})+2\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t+\operatorname{rot}\mathfrak{E})=(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)_t+2\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}].$$

---

[1]) К уравнениям Максвелла принадлежат, кроме того, добавочные условия

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathfrak{H}=0.$$

Легко показать, что если для векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (6), эти добавочные условия имеют место в момент $t=0$, то они выполняются и при любом t в силу дифференциальных уравнений (6).

Проинтегрируем это тождество по области G_h, сначала интегрируя по x, y, z при постоянном t, а затем по t в пределах от $t=0$ до $t=h$. Применяя интегральную теорему Гаусса и учитывая начальное условие $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$ при $t=0$, мы получим:

$$\iiint\limits_{M_h} (\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\, t_\nu do + 2\iiint\limits_{M_h} [\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]\, \mathfrak{x}_\nu do + \\ + \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\, dx\, dy\, dz = 0, \tag{7}$$

причем $\mathfrak{x}_\nu$ обозначает нормальный вектор в трехмерном пространстве x, y, z к сфере радиуса $\tau - t$ с центром в проекции точки P, а $t_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ есть t — компонента нормали к M_h.

Но в силу характеристического условия на боковой поверхности M_h характеристического конуса имеет место равенство $t_\nu^2 = \mathfrak{x}_\nu^2$, поэтому мы имеем на M_h:

$$(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\, t_\nu^2 + 2t_\nu \mathfrak{x}_\nu [\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}] = \mathfrak{E}^2 t_\nu^2 + 2\mathfrak{E}\,[\mathfrak{H}\times\mathfrak{x}_\nu]\, t_\nu + \mathfrak{H}^2\mathfrak{x}_\nu^2.$$

В силу тождества

$$[\mathfrak{H}\times\mathfrak{x}_\nu]^2 = \mathfrak{H}^2\mathfrak{x}_\nu^2 - (\mathfrak{H}\mathfrak{x}_\nu)^2$$

мы можем теперь правую часть предыдущего равенства представить в виде

$$\{\mathfrak{E}t_\nu + [\mathfrak{H}\times\mathfrak{x}_\nu]\}^2 + (\mathfrak{H}\mathfrak{x}_\nu)^2.$$

Окончательно мы получаем из уравнения (7) следующее интегральное соотношение:

$$0 = \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{M_h} \frac{1}{t_\nu} \{(\mathfrak{E}t_\nu + [\mathfrak{H}\times\mathfrak{x}_\nu])^2 + \\ + (\mathfrak{H}\mathfrak{x}_\nu)^2\}\, do.$$

Отсюда следует, что на D_h, а, следовательно, и всюду в G $\mathfrak{E}=\mathfrak{H}=0$, что и требовалось доказать. Вместе с тем мы получаем снова как следствие из нашего рассмотрения, что *область зависимости для нашей задачи Коши задается характеристическим конусом, т. е. значения векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ в точке P могут зависеть только от тех начальных значений, которые принадлежат к шаровой области B, вырезаемой из $t=0$ характеристическим конусом.*

4. Теорема единственности и область зависимости для дифференциальных уравнений кристаллооптики. Для дифференциальных уравнений кристаллооптики (12) из § 3 мы докажем следующую теорему, которая разрешает вопрос о единственности решения задачи Коши и области зависимости:

Проведем через точку P четырехмерного пространства x, y, z, t выпуклую оболочку конуса характеристических лучей кри-

сталлооптики. Пусть этот конус вырезает из плоскости $t=0$ область B (область B является выпуклой оболочкой соответствующей поверхности лучей, увеличенной по всем направлениям в некотором постоянном отношении). *Если в области B начальные значения векторов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}_t$ равны нулю, то $\mathfrak{E}$ обращается в нуль в точке P.*

Для доказательства умножим три дифференциальных уравнения (12) из § 3 соответственно на $2\dot{u}_1$, $2\dot{u}_2$, $2\dot{u}_3$ и сложим. Мы получим тогда

$$(\sigma_1\dot{u}_1^2+\sigma_2\dot{u}_2^2+\sigma_3\dot{u}_3^2)_t-2\dot{\mathfrak{E}}(\Delta\mathfrak{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E})=0$$

или же

$$(\sigma_1\dot{u}_1^2+\sigma_2\dot{u}_2^2+\sigma_3\dot{u}_3^2)_t=-2\dot{\mathfrak{E}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E}=$$
$$=-(\operatorname{rot}\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{E})_t-2\operatorname{div}[\operatorname{rot}\mathfrak{E}\times\dot{\mathfrak{E}}],$$

причем мы применяем формулу $\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}=\operatorname{div}[\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}]$. Отсечем снова плоскостью $t=h$ усеченный конус G_h от выпуклой оболочки G характеристического конуса, так что G_h ограничено двумя параллельными плоскими поверхностями B и D_h, подобными между собой, и частью M_h конической поверхности M. Проинтегрируем теперь полученное нами тождество по области G_h, причем сначала мы интегрируем по x, y, z при постоянном t, а затем интегрируем по t. Обозначим снова через do элемент поверхности на M_h, через $\mathfrak{x}_\nu$ — вектор трехмерного пространства x, y, z, нормальный к поверхности M_h (при фиксированном t), а через $(\mathfrak{x}_\nu, t_\nu)$ — компоненты четырехмерного единичного нормального вектора к поверхности M_h (в четырехмерном пространстве).

Мы получим тогда:

$$\iint\limits_{M_h}\frac{1}{t_\nu}\left\{(\sigma_1\dot{u}_1^2+\sigma_2\dot{u}_2^2+\sigma_3\dot{u}_3^2)\,t_\nu^2+2\mathfrak{x}_\nu\left[\operatorname{rot}\mathfrak{E}\times\dot{\mathfrak{E}}\right]t_\nu+(\operatorname{rot}\mathfrak{E})^2\,t_\nu^2\right\}do+$$
$$+\iint\limits_{D_h}\left\{\sigma_1\dot{u}_1^2+\sigma_2\dot{u}_2^2+\sigma_3\dot{u}_3^2+(\operatorname{rot}\mathfrak{E})^2\right\}dx\,dy\,dz=0. \qquad (8)$$

Подинтегральное выражение A первого интеграла мы преобразуем с помощью формулы $\mathfrak{x}_\nu[\operatorname{rot}\mathfrak{E}\times\dot{\mathfrak{E}}]=[\dot{\mathfrak{E}}\times\mathfrak{x}_\nu]\operatorname{rot}\mathfrak{E}$. Мы получаем:

$$A=\frac{1}{t_\nu}\left\{(\sigma_1\dot{u}_1^2+\sigma_2\dot{u}_2^2+\sigma_3\dot{u}_3^2)\,t_\nu^2+(t_\nu\operatorname{rot}\mathfrak{E}+[\dot{\mathfrak{E}}\times\mathfrak{x}_\nu])^2-[\dot{\mathfrak{E}}\times\mathfrak{x}_\nu]^2\right\}.$$

Выражая A через компоненты рассматриваемых векторов и полагая $\mathfrak{x}_\nu=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $t_\nu=\tau$, мы представим A в следующем виде:

$$\tau A=\tau^2\sum_i\sigma_i\dot{u}_i^2-\sum_i\xi_i^2\sum\dot{u}_i^2+(\sum_i\xi_i\,\dot{u}_i)^2+(t_\nu\operatorname{rot}\mathfrak{E}+[\dot{\mathfrak{E}}\times\mathfrak{x}_\nu])^2=$$
$$=Q+(t_\nu\operatorname{rot}\mathfrak{E}+[\dot{\mathfrak{E}}\times\mathfrak{x}_\nu])^2,$$

где Q является квадратичной формой от трех величин $\dot{u}_i = \lambda_i$, которую мы можем записать в следующем виде:

$$Q = \tau^2 \sum_i \sigma_i \lambda_i^2 - \rho^2 \sum_i \lambda_i^2 + (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2, \quad \text{где} \quad \rho^2 = \sum_i \xi_i^2.$$

Мы сейчас докажем, что на выпуклой оболочке характеристического конуса выполняется условие $Q \geqslant 0$. Тогда из уравнения (8) будет непосредственно следовать, что на D_h имеет место соотношение $\sum_{i=1}^{3} \sigma_i \dot{u}_i^2 = 0$, так что $\dot{u}_i = 0$ на D_h, а, следовательно, и всюду внутри нашего конуса. В силу начальных условий $u_i = 0$ при $t = 0$ мы получим отсюда, что и во всем рассматриваемом конусе $u_i = 0$, и наше доказательство будет закончено.

Остается только доказать справедливость вспомогательной теоремы о том, что $Q \geqslant 0$ на M_h. Мы в этом легко убедимся путем следующего рассуждения: пусть $\tau^2 = \varkappa$ есть максимум квадратичной формы $\rho^2 \sum_i \lambda_i^2 - (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2$ при добавочном условии $\sum \sigma_i \lambda_i^2 = 1$. Согласно элементарной теории собственных значений квадратичных форм значение этого максимума равняется наибольшему из корней τ^2 уравнения $\|Q\| = 0$ при заданных ξ_1, ξ_2, ξ_3, где $\|Q\|$ обозначает детерминант квадратичной формы Q. Заметим теперь, что уравнение конуса нормалей имело вид $\|Q\| = 0$. Один из корней равен поэтому нулю, а наибольший из двух других корней τ^2 при фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяет внутреннюю полость конуса нормалей. Таким образом, на внутренней полости конуса нормалей имеет место неравенство

$$\rho^2 \sum_i \lambda_i^2 - (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2 - \tau^2 \sum_i \sigma_i \lambda_i^2 \leqslant 0.$$

Но при упомянутом выше преобразовании взаимными полярами внутренней полости конуса нормалей соответствует выпуклая оболочка конуса лучей, что и доказывает нашу вспомогательную теорему.

Подчеркнем, что проведенное нами только что рассуждение может быть непосредственно обобщено и использовано для доказательства теоремы единственности в случае любого вполне гиперболического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

5. Замечания об области зависимости и области влияния. Необходимость условия выпуклости области зависимости. Заметим еще раз, что понятие *области зависимости* связано с понятием *области влияния* (см. гл. V, § 3). *Областью зависимости, соответствующей точке* P, называется та область начальных значений, которая влияет на значение решения рассматриваемой задачи в точке P. *Областью же влияния начальной области* B называется совокупность всех тех точек P, для которых область зависимости имеет с областью B общие точки. Поэтому из наших доказательств теорем единственности следует, что область влияния начальной области B

является соединением всех выпуклых оболочек характеристических конусов, вершины которых лежат в B.

Выясним теперь с более глубокой точки зрения причину того обстоятельства, что при исследовании дифференциальных уравнений кристаллооптики нам пришлось взять за основу не самый характеристический конус, а его выпуклую оболочку. Подчеркнем при этом, что пример дифференциальных уравнений кристаллооптики является в этом отношении типичным для задач более сложного характера. Допустим, что дана задача Коши, обладающая следующими свойствами: решение $u(S)$ в точке S пространства x, t зависит от начальных значений в момент $r<t$ в области B_r, вырезаемой из плоскости $t=r$ конусом с вершиной в S, причем форма и ориентировка этого конуса не зависят от положения вершины S. *При этих условиях область B_r должна быть выпуклой.* Для доказательства заметим прежде всего, что все области B_r подобны между собой; обозначим область B_0 через B. Если P есть некоторая точка области B, а S' — какая-нибудь точка, лежащая на луче PS, то область зависимости B_0' для точки S' должна содержаться в области B_0. Области B_0 и B_0' подобны и подобно расположены с центром подобия в точке P. Если мы будем теперь неограниченно приближать точку S' к точке P, то область B_0' будет стягиваться в точку P. С другой стороны, когда точка S' приближается к точке S, область B_0' непрерывно расширяется и в пределе совпадает со всей областью B_0. Отсюда следует, что любую точку P области B_0 можно соединить с любой другой точкой этой области прямолинейным отрезком, целиком лежащим внутри B_0, что и доказывает выпуклость области B_0.

В дополнениях к этой главе, § 2 мы приведем другую теорему, освещающую необходимость введения выпуклых оболочек с другой точки зрения.

§ 5. Гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы решим в явном виде задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами гиперболического типа с n независимыми переменными, не пользуясь непосредственно теорией характеристик, и исследуем полученные решения.

Волновое уравнение с двумя и тремя независимыми переменными было нами рассмотрено уже раньше в гл. III, § 6, а также в гл. VI, § 2, п. 8. Теперь мы должны получить общие формулы для случая n переменных[1]).

---

[1]) См. Hadamard, Propagation des ondes, Париж, 1903, и указываемую там литературу, особенно работы Вольтерра, *Acta Math.*, т. 18 и *Tedone Annal. di Mat.*, серия 3, т. 1, стр. 1, где впервые были даны решения в явном виде.