

является соединением всех выпуклых оболочек характеристических конусов, вершины которых лежат в B .

Выясним теперь с более глубокой точки зрения причину того обстоятельства, что при исследовании дифференциальных уравнений кристаллооптики нам пришлось взять за основу не самый характеристический конус, а его выпуклую оболочку. Подчеркнем при этом, что пример дифференциальных уравнений кристаллооптики является в этом отношении типичным для задач более сложного характера. Допустим, что дана задача Коши, обладающая следующими свойствами: решение $u(S)$ в точке S пространства x, t зависит от начальных значений в момент $r < t$ в области B_r , вырезаемой из плоскости $t = r$ конусом с вершиной в S , причем форма и ориентировка этого конуса не зависят от положения вершины S . При этих условиях область B_r должна быть выпуклой. Для доказательства заметим прежде всего, что все области B_r подобны между собой; обозначим область B_0 через B . Если P есть некоторая точка области B , а S' — какая-нибудь точка, лежащая на луче PS , то область зависимости B'_0 для точки S' должна содержаться в области B_0 . Области B_0 и B'_0 подобны и подобно расположены с центром подобия в точке P . Если мы будем теперь неограниченно приближать точку S' к точке P , то область B'_0 будет стягиваться в точку P . С другой стороны, когда точка S' приближается к точке S , область B'_0 непрерывно расширяется и в пределе совпадает со всей областью B_0 . Отсюда следует, что любую точку P области B_0 можно соединить с любой другой точкой этой области прямолинейным отрезком, целиком лежащим внутри B_0 , что и доказывает выпуклость области B_0 .

В дополнениях к этой главе, § 2 мы приведем другую теорему, освещающую необходимость введения выпуклых оболочек с другой точки зрения.

§ 5. Гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы решим в явном виде задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами гиперболического типа с n независимыми переменными, не пользуясь непосредственно теорией характеристик, и исследуем полученные решения.

Волновое уравнение с двумя и тремя независимыми переменными было нами рассмотрено уже раньше в гл. III, § 6, а также в гл. VI, § 2, п. 8. Теперь мы должны получить общие формулы для случая n переменных¹⁾.

¹⁾ См. Hadamard, Propagation des ondes, Париж, 1903, и указываемую там литературу, особенно работы Вольтерра, *Acta Math.*, т. 18 и *Tedone Annal. di Mat.*, серия 3, т. 1, стр. 1, где впервые были даны решения в явном виде.

Мы полагаем снова $n = m + 1$ и рассматриваем переменную $x_n = t$ как координату времени. В силу общих рассуждений гл. III, § 3, п. 2 мы можем ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - cu = 0, \quad (1)$$

где c — константа. Сначала мы остановимся на случае $c = 0$, т. е. рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (2)$$

и затем покажем, что решение общего дифференциального уравнения вида (1) может быть приведено к решению дифференциального уравнения (2). Предметом нашего исследования является решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2), в которой начальные условия заданы в форме: $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$.

Через x мы здесь ради краткости обозначаем систему значений x_1, \dots, x_m , а под $\varphi(x)$ мы подразумеваем функцию, удовлетворяющую следующим требованиям: при m нечетном функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой по меньшей мере $\frac{m+1}{2}$ раз, а при m четном $\frac{m+2}{2}$ раз. Эти требования нами будут в дальнейшем обоснованы в процессе наших вычислений.

Если u является решением задачи Коши, формулированной выше, то функция $v = u_t$ является решением другой, соответствующей ей, задачи Коши, в которой начальные условия имеют вид $v(x, 0) = \varphi(x)$ и $v_t(x, 0) = 0$. Поэтому в силу принципа суперпозиции достаточно получить явное решение первой задачи Коши, из которого мы в силу только что сделанного замечания непосредственно сможем составить решение задачи при любых заданных начальных значениях u и u_t .

Чтобы получить искомое решение, мы сначала применяем эвристический процесс и с помощью *метода Фурье* выводим чисто формально нужное нам выражение для решения задачи и затем проверяем, действительно ли полученное выражение является решением. (В § 6 мы изложим другой способ получения решения.) Установив это, мы исследуем форму решения и делаем отсюда ряд принципиальных заключений; полученные нами результаты приводят нас затем также и к решению задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения, а также общего дифференциального уравнения (1) и, в частности, телеграфного дифференциального уравнения. Заметим с самого начала, что рассмотрения § 4 обеспечивают *единственность* получающихся решений.

В наших дальнейших вычислениях нам придется пользоваться некоторыми формулами преобразования поверхностных интегралов в m -мерном пространстве, которые мы сейчас вкратце перечислим.

Пусть в m -мерном пространстве задана сфера $x_1^2 + \dots + x_m^2 = r^2$ радиуса r с поверхностью O_m и элементом поверхности $d\sigma_m$.

Положим $x_i = r\beta_i$, так что $\beta_1^2 + \dots + \beta_m^2 = 1$. Таким образом, β есть точка единичной сферы Ω_m с элементом поверхности $d\omega_m$. Площадь поверхности Ω_m обозначим через ω_m .

Тогда имеют место следующие формулы:

$$O_m = r^{m-1} \omega_m; \quad \omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

а для интеграла от некоторой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ по поверхности O_m мы получаем:

$$\int_{O_m} \dots \int f dO_m = r^{m-1} \int_{O_m} \dots \int f(r\beta_1, \dots, r\beta_m) d\omega_m,$$

причем стоящий в правой части интеграл должен быть взят по поверхности Ω_m единичной сферы.

Этот интеграл может быть, далее, преобразован по следующей формуле:

$$\int_{O_m} \dots \int f dO_m = r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_m) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} {}^1),$$

причем $\rho^2 = x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2$, а стоящий в правой части интеграл должен быть взят по внутренности сферы $\rho = r$ в $m-1$ -мерном пространстве.

Наконец, мы можем этот интеграл записать и в таком виде:

$$\begin{aligned} & \int_{O_m} \dots \int f dO_m = \\ & = r^{m-1} \int_{-1}^1 (1 - \beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta_m \int_{O_{m-1}} \dots \int f(r\beta_1, \dots, r\beta_m) d\omega_{m-1}, \end{aligned}$$

причем в правой части внутренний интеграл берется по поверхности единичной сферы Ω_{m-1} в $m-1$ -мерном пространстве.

1) Точнее,

$$\begin{aligned} & \int_{O_m} \dots \int f dO_m = r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_{m-1}, \sqrt{r^2 - \rho^2}) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} + \\ & + r \int_{\rho \leq r} \dots \int f(x_1, \dots, x_{m-1} - \sqrt{r^2 - \rho^2}) \frac{dx_1 \dots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

(Прим. перев.)

Если, в частности, f зависит только от одной переменной, например, x_m , то мы получаем:

$$\int \dots \int f d\alpha_m = \omega_{m-1} r^{m-1} \int_{-1}^1 f(r\beta_m) (1 - \beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta_m,$$

1. Построение решения. Следуя общему принципу, изложенному в гл. III, § 6, п. 3, мы пытаемся найти искомое решение рассматриваемой задачи Коши в следующем виде:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int A(\alpha_1, \dots, \alpha_m) e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \sin \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m, \quad (3)$$

где

$$\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2}.$$

Мы считаем здесь, как и в дальнейшем, допустимой операцию дифференцирования под знаком интеграла, равно как и другие операции переменны порядка действий (что сможет быть нами обосновано лишь впоследствии при проверке результата), и получаем в силу нашего начального условия при $t = 0$:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \rho A(\alpha_1, \dots, \alpha_m) e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Применяя теперь формулу обращения интеграла Фурье, мы получим непосредственно следующее выражение для $A(\alpha)$:

$$\rho A = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) e^{-i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m)} d\xi_1 \dots d\xi_m. \quad (4)$$

Если заменить теперь в формуле (3) функцию $A(\alpha)$ полученным выражением и изменить, чисто формально, порядок интегрирований, то мы получили бы

$$u = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_m \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int e^{i[\alpha_1(x_1 - \xi_1) + \dots + \alpha_m(x_m - \xi_m)]} \cdot \frac{\sin \rho t}{\rho} d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Однако, при $m > 2$ внутренний интеграл расходится, так как, переходя к полярным координатам, мы получим:

$$d\alpha_1 \dots d\alpha_m = \rho^{m-1} d\omega_m d\rho,$$

где $d\omega_m$ обозначает элемент поверхности единичной сферы в m -мерном пространстве.

Чтобы избежнуть этой формальной трудности, мы применяем следующий искусственный прием.

Рассмотрим при нечетном $m \geq 3$ выражение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha)}{\rho^{m-2}} e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \cos \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m, \quad (5)$$

а при четном $m \geq 2$ выражение

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha)}{\rho^{m-2}} e^{i(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)} \sin \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m. \quad (5')$$

Отсюда мы получаем чисто формально при нечетном $m \geq 3$

$$u(x, t) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} v(x, t),$$

а при четном $m \geq 2$

$$u(x, t) = (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} w(x, t).$$

Для этих новых выражений v и w внутренние интегралы сходятся, и мы получаем как для нечетного m , так и для четного m следующий результат:

$$u = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) K_m(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad (6)$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}$, а K_m имеет вид

$$K_m(r, t) = \begin{cases} \frac{\pi \omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \left(\frac{t^2}{r^2} - 1 \right)^{\frac{m-3}{2}}, & \text{если } r < t, \\ 0, & \text{если } r > t. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство мы проведем только для случая нечетного m , так как для четного m оно протекает совершенно аналогично и, кроме того, полученный результат будет впоследствии распространен на четное m .

Сначала мы вводим вместо x_1, \dots, x_m полярные координаты

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \text{ и } \beta_1, \dots, \beta_m, \text{ где } \beta_1^2 + \dots + \beta_m^2 = 1,$$

так что β_1, \dots, β_m являются параметрами на единичной сфере в m -мерном пространстве.

Подставляя теперь выражение для $A(\alpha)$ из формулы (4) в формулу (5), мы получим:

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) d\xi_1 \dots d\xi_m \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m)}}{\rho^{m-1}} \cos \rho t d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Внутренний интеграл мы можем теперь записать в следующем виде:

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \int_0^\infty M(\rho r) \cos \rho t d\rho, \quad (8)$$

причем $M(r)$ обозначает взятое по поверхности m -мерной единичной сферы среднее значение:

$$M(r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int e^{i(\beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_m \xi_m)} d\omega, \text{ а } r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}. \quad (9)$$

Так как этот интеграл инвариантен относительно ортогональных преобразований координат, то мы можем для его вычисления положить $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_m = 0$, что нам дает:

$$M(r) = \frac{1}{\omega_n} \int \dots \int e^{i\beta_1 r} d\omega_m,$$

откуда

$$M(r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^1 (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{i\beta_1 r} d\beta_1. \quad (10)$$

Полагая теперь в формуле (8) $\rho r = s$, мы получим:

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m r} \int_0^\infty M(s) \cos \frac{st}{r} ds = \frac{\omega_m}{2(2\pi)^m r} \int_{-\infty}^\infty M(s) e^{\frac{ist}{r}} ds.$$

В силу формулы (10) мы получаем далее после простого преобразования

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\sin \lambda \left(\beta_1 + \frac{t}{r} \right)}{\beta_1 + \frac{t}{r}} d\beta_1.$$

На основании элементарных свойств интеграла Дирихле, стоящего в правой части этого равенства (см. т. I, стр. 71), мы получим:

$$S_m(r, t) = \begin{cases} \frac{\pi \omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \left(1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{\frac{m-3}{2}}, & \text{если } r > t, \\ 0 & \text{если } r < t. \end{cases} \quad (11)$$

¹⁾ В силу одного из интегральных представлений бесселевой функции $J_\lambda(r)$ (Курант-Гильберт, т. I, стр. 460) мы получаем:

$$M(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \frac{J_{\frac{m-2}{2}}(r)}{r^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Итак, выражение для v может быть представлено в виде

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m) S_m(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Введем теперь полярные координаты

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}, \quad \beta_1, \dots, \beta_m$$

и обозначим через $Q(x_1, \dots, x_m; r)$ среднее значение функции φ на сфере, описанной из точки x радиусом r , так что

$$\begin{aligned} Q(x, r) &= \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m = \\ &= \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x + \beta r) d\omega_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы получим тогда:

$$v = \omega_m \int_0^{\infty} Q(x, r) r^{m-1} S_m(r, t) dr$$

или в развернутом виде:

$$v = \frac{\pi \omega_{m-1} \omega_m}{(2\pi)^m} \int_t^{\infty} r (r^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} Q(x, r) dr.$$

Так как, далее, выражение

$$\int_0^{\infty} (r^2 - t^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr$$

представляет собой при нечетном $m \geq 3$ полином степени $m-3$ относительно t , так что $m-2$ -ая производная по t от этого выражения тождественно равна нулю, то мы получим для

$$u = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} v$$

следующее представление:

$$u(x, t) = C_m \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr,$$

где C_m — некоторая константа.

Это выражение для u равносильно формуле (6). Константу C_m мы можем найти либо с помощью предыдущих формул, либо проще, полагая $\varphi = 1$, $u = t$, так что $Q = 1$.

Это дает нам для C_m значение $C_m = \frac{1}{(m-2)!}$.

Мы получаем, таким образом, решение рассматриваемой задачи Коши в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr. \quad (13)$$

Точно такую же формулу мы получаем и в случае четного m , отправляясь от выражения $w(x, t)$, определяемого формулой (5'). Однако, в этом случае вычисления несколько усложняются, хотя по существу они совершенно аналогичны предыдущим. Мы предпочитаем поэтому доказать справедливость формулы (13) в случае четного числа измерений другим способом, применяя так называемый «метод спуска», к изложению которого мы переходим.

2. Метод спуска¹⁾. Метод спуска, играющий большую роль в исследованиях Адамара, основывается на том простом соображении, что, имея решение нашей задачи для случая m независимых переменных, мы можем из него получить решение этой задачи для $m-1$ или меньшего числа измерений путем специального выбора начальных условий, спускаясь, так сказать, от более трудной задачи к более простой.

На основании теоремы единственности мы можем получить из формулы решения для случая m пространственных переменных формулу решения для $m-1$ пространственных переменных, вводя предположение, что начальная функция $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, входящая в первую формулу, не зависит, например, от x_m . Тогда соответствующее решение u также не будет зависеть от x_m , и мы получим, таким образом, решение задачи Коши для $m-1$ пространственных переменных. Таким же образом мы можем спуститься от случая m пространственных переменных к случаю $m-2$ пространственных переменных, введя в формуле (13) предположение, что φ зависит только от x_1, \dots, x_{m-2} и т. д.

Мы можем, естественно, ожидать, что при этом процессе спуска формула (13) сама собой перейдет в совершенно аналогичную формулу, получающуюся путем замены m через $m-1$ или соответственно $m-2$. Переходим к доказательству этого предположения.

Заменим m через $m+1$ и рассмотрим для функции $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, зависящей только от m переменных, ее среднее значение в пространстве $m+1$ измерений:

$$Q_{m+1}(x_1 \dots x_m; r) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_{m+1}.$$

¹⁾ Ср. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, New Haven, 1923, и дополненное французское издание: Problème de Cauchy, Paris, 1932. См. также гл. III, § 6, п. 5.

Так как

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{2}{\omega_m r^{m-1}} \int_{\rho < r} \dots \int \frac{\varphi(x_1 + \alpha_1, \dots, x_m + \alpha_m)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dx_1 \dots dx_m,$$

а $\omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$, то мы получаем отсюда:

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r \frac{\rho^{m-1} Q_m(x, \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (14)$$

причем

$$Q_m(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m,$$

так что $Q_m(x, r)$ обозначает соответствующее среднее значение функции φ в m -мерном пространстве.

Точно так же мы получаем в обозначениях, не требующих теперь пояснений,

$$Q_m(x, r) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-2}} \int_0^r \frac{\rho^{m-2} Q_{m-1}(x, \rho)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho,$$

если функция φ зависит только от $m-2$ переменных, x_1, \dots, x_{m-2} . Комбинируя обе формулы, мы приходим к следующему соотношению между Q_{m+1} и Q_{m-1} :

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(x, r) &= \frac{4\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \int_0^\rho \frac{s^{m-2} Q_{m-1}(x, s)}{\sqrt{\rho^2 - s^2}} ds = \\ &= \frac{4\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^r s^{m-2} Q_{m-1}(x, s) ds \int_s^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2} \sqrt{\rho^2 - s^2}}. \end{aligned}$$

С помощью подстановки $\rho^2 - s^2 = z(r^2 - s^2)$ и на основании формулы

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z} \sqrt{1-z}} = \pi$$

мы приводим предыдущее соотношение к следующему виду:

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{m-1}{r^{m-1}} \int_0^r \rho^{m-2} Q_{m-1}(x, \rho) d\rho. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) дают нам возможность произвести операцию однократного или двукратного спуска. Легко непосредственно убедиться в том, что при двукратном спуске формула (13) переходит в точно такую же формулу, в которой только вместо m стоит $m - 2$. Соответствующий результат для однократного спуска получается с помощью следующих небольших преобразований.

Подстановка вместо $Q_{m+1}(x, r)$ выражения (14) в формуле (13), составленной для $m + 1$, дает нам

$$u = C \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} t \int_0^t \rho^{m-1} Q_m(x, \rho) d\rho \int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr,$$

где C — некоторая константа. Произведем подстановку

$$\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) = \left(1 - \frac{r^2}{t^2}\right) z,$$

введя вместо r переменную интеграции z . Мы получаем:

$$\int_\rho^t \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2} \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr = \frac{(t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}}}{2t\rho^{m-2}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{m-4}{2}} dz. \quad (16)$$

Таким образом,

$$u = C_m \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - \rho^2)^{\frac{m-3}{2}} \rho Q_m(x, \rho) d\rho;$$

путем специального выбора функций φ и $u(\varphi = 1, u = t)$ мы получим, как и раньше, значение константы $C_m = \frac{1}{(m-2)!}$.

Итак, мы доказали, что полученные решения сохраняют свой вид при спуске к низшим значениям m . Поэтому действительно является достаточным доказать формулу (13) для нечетного m , ибо с помощью однократного спуска мы тогда убедимся в справедливости этой формулы также и для четных значений m .

3. Исследование решения. Принцип Гюйгенса. Прежде чем приступить к проверке полученных выражений как решений нашей задачи Коши, мы представим их в другой форме, которая дает возможность глубже исследовать поведение этих функций. Для этой цели рассмотрим сначала в случае нечетного числа измерений m выражения вида

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{(2\lambda+1)!} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^\lambda r G(r) dr \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

причем зависимость величин U и G от переменных x нас здесь не интересует. Легко доказать рекуррентную формулу:

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda + 1} (tU'_{\lambda-1} + 2\lambda U_{\lambda-1}). \quad (18)$$

Так как

$$U_0 = tG(t),$$

то отсюда следует, что

$$U_\lambda = t \sum_{v=0}^{\lambda} a_{\lambda,v} t^v G^{(v)}(t), \quad (19)$$

где $a_{\lambda,v}$ — некоторые численные коэффициенты.

Если мы обозначим через $P_\lambda(t)$ многочлен

$$P_\lambda(t) = \sum_{v=0}^{\lambda} a_{\lambda,v} t^v,$$

то мы можем записать выражение для U_λ в следующей символьической форме:

$$U_\lambda(t) = tP_\lambda(tG), \quad (20)$$

где степени G должны быть заменены соответствующими производными. Мы можем теперь записать наше решение (13) рассматриваемой задачи Коши для нечетного $m = 2\lambda + 3$ в следующем виде:

$$u = tP_{\frac{m-3}{2}}(tG), \quad (21)$$

где

$$G(t) = Q(x, t) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x + \beta t) d\omega_m.$$

В случае четного числа измерений m мы также можем получить символьическое выражение для функции u , применяя изложенный в п. 2 метод спуска. Действительно, спускаясь от нечетного числа измерений $m+1$ к m , мы непосредственно получаем:

$$u = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG), \quad (22)$$

где, однако, под G мы должны теперь подразумевать выражение

$$G = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \dots, x_m + \beta_m t) d\omega_{m+1},$$

которое в силу п. 2 может быть представлено в виде

$$G(t) = \frac{2}{V^\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{t^{m-1}} \int_0^t \frac{r^{m-1} Q(x, r)}{V t^2 - r^2} dr. \quad (22')$$

Таким образом, решение u выражается через производные по t этой функции $G(x, t)$ до порядка $\frac{1}{2}(m-2)$ включительно.

Однако, мы можем легко, по аналогии с нашими рассуждениями в случае нечетного числа измерений, получить соответствующее выражение через производные интеграла

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{r Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr,$$

который при $m = 2$ сам является искомым решением задачи.

Для этой цели положим:

$$Z_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!} \frac{\partial^{2\lambda}}{\partial t^{2\lambda}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} r Q(r) dr. \quad (23)$$

Для Z_λ мы получим рекуррентную формулу

$$\left. \begin{aligned} Z_\lambda &= \frac{1}{2\lambda} [(2\lambda - 1) Z_{\lambda-1} + t Z'_{\lambda-1}], \\ Z_0 &= H. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Отсюда следует:

$$Z_\lambda = \sum_{v=0}^{\lambda} b_{\lambda,v} t^v H^{(v)}(t) \quad (25)$$

или же, если ввести полиномы

$$\prod_{\lambda}(t) = \sum_{v=0}^{\lambda} b_{\lambda,v} t^v,$$

то мы получим в символической форме:

$$Z_\lambda = \prod_{\lambda}(tH). \quad (26)$$

Таким образом, решение задачи Коши в случае четного числа измерений может быть представлено в виде

$$u = \prod_{\frac{m-2}{2}}(tH), \quad (27)$$

где

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{r Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Формулы (21) и (27) показывают, что функция u непрерывна, если начальная функция при четном m имеет непрерывные производные до порядка $\frac{m-2}{2}$ включительно, а при нечетном m — непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m-3}{2}$.

Для того же, чтобы обеспечить возможность еще двух дальнейших дифференцирований функции u , как этого требует дифференциальное уравнение (2), мы должны еще предположить, что началь-

ная функция в случае четного m имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+2}{2}$, а при нечетном m — до порядка $\frac{m+1}{2}$).

Значение выведенных нами формул заключается прежде всего в том, что из них совершенно непосредственно вытекает следующая очень важная теорема:

Для задач Коши, связанных с волновым уравнением, принцип Гюйгенса имеет место в случае нечетного числа m измерений пространства, тогда как в пространстве четного числа измерений принцип Гюйгенса не имеет места.

При этом принцип Гюйгенса, о котором здесь идет речь, формулируется так: Значения решений зависят только от границы области зависимости на плоскости $t = 0$, т. е. только от начальных значений φ вдоль границы основания характеристического конуса, и не зависят от значений φ внутри этого основания.

Мы, таким образом, доказали, что установленный нами раньше при $m = 2$ и $m = 3$ различный характер соответствующих волновых уравнений в отношении принципа Гюйгенса является не случайным фактом, а общим законом²⁾.

Покажем теперь, что полиномы P и Π могут быть очень просто представлены в явном виде, что дает нам возможность получить новые явные выражения для рассматриваемых решений задачи Коши. Чтобы проще всего получить явные выражения для полиномов P_λ , положим в общем выражении для U_λ $G(t) = e^t$; тогда мы получим $U_\lambda = te^t P_\lambda(t)$. Рекуррентная формула (18) для U_λ дает нам тогда следующую рекуррентную формулу для P_λ :

$$P_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda + 1} (tP'_{\lambda-1} + (2\lambda + 1 + t)P_{\lambda-1}), \quad (28)$$

причем

$$P_0 = 1.$$

Мы получаем, таким образом,

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1 + \frac{t}{3}; \quad P_2 = 1 + \frac{9}{15}t + \frac{1}{15}t^2. \quad (29)$$

Свободный член в наших полиномах всегда равен единице. Эти выражения для полиномов P_λ дают нам возможность сразу написать соответствующие явные формулы решений задачи Коши для первых нечетных значений m :

$$\left. \begin{aligned} m = 3; \quad u &= tQ(x, t), \\ m = 5; \quad u &= tQ(x, t) + \frac{1}{3}t^2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}, \\ m = 7; \quad u &= tQ(x, t) + \frac{9}{15}t^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{15}t^3 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

¹⁾ Мы здесь не касаемся вопроса о том, насколько эти требования действительно необходимы для разрешимости задачи Коши независимо от вида формулы решения. См. дополнения, § 4.

²⁾ Несколько нам известно, этот общий закон был впервые четко формулирован Вольтерра (см. сноску на стр. 437).

Совершенно аналогичным способом мы можем найти и полиномы Π_λ ; положим $H = e^t$, тогда $Z_\lambda = e^t \Pi_\lambda(t)$.

Отсюда получается для Π_λ следующая рекуррентная формула:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_\lambda &= \frac{1}{2\lambda} (t\Pi'_{\lambda-1} + (2\lambda - 1 + t)\Pi_{\lambda-1}), \\ \Pi_0 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Мы можем, например, вычислить:

$$\Pi_0 = 1; \quad \Pi_1 = \frac{1}{2}(1+t); \quad \Pi_2 = \frac{1}{8}(3+5t+t^2). \quad (32)$$

Заметим, что вообще сумма первых двух коэффициентов $b_{\lambda 0} + b_{\lambda 1} = 1$, откуда легко получается, что решение $u = \Pi_{\frac{m-2}{2}}(tH)$ действительно удовлетворяет начальным условиям $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$. Для первых трех четных размерностей мы получаем

$$\left. \begin{aligned} m=2; \quad u &= H(x, t), \\ m=4; \quad u &= \frac{1}{2}\left(H + t \frac{\partial H}{\partial t}\right), \\ m=6; \quad u &= \frac{1}{8}\left(3H + 5t \frac{\partial H}{\partial t} + t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где всюду вместо H следует подставить выражение

$$H = \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr.$$

Если мы те же решения (33) представим с помощью полиномов P_λ , то мы получим:

$$\left. \begin{aligned} m=2; \quad u &= tG, \quad \text{где } G = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{rQ(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \\ m=4; \quad u &= tG + \frac{1}{3}t^2 \frac{\partial G}{\partial t}, \quad \text{где } G = \frac{3}{2t^3} \int_0^t \frac{r^3 Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr, \\ m=6; \quad u &= tG + \frac{9}{15}t^2 \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{15}t^3 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad \text{где } G = \frac{15}{8t^5} \int_0^t \frac{r^5 Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr. \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

Полиномы P_λ и Π_λ могут быть, далее, представлены следующим элементарным способом. Введем сначала вместо U_λ и Z_λ новые выражения R_λ и S_λ , полагая

$$\left. \begin{aligned} R_\lambda &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2\lambda + 1)}{2^\lambda} U_\lambda = \frac{2\Gamma\left(\frac{2\lambda + 3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} U_\lambda, \\ tS_\lambda &= \lambda! Z_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Рекуррентные формулы (18) и (24) переходят тогда в следующие:

$$R_\lambda = \lambda R_{\lambda-1} + \frac{t}{2} R'_{\lambda-1} = \lambda R_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{dt^2} R_{\lambda-1}; \quad R_0 = U_0 = tG. \quad (35)$$

$$S_\lambda = \lambda S_{\lambda-1} + t^2 \frac{d}{dt^2} S_{\lambda-1}; \quad S_0 = \frac{1}{t} Z_0 = \frac{1}{t} H. \quad (35')$$

При этом мы обозначаем символом $\frac{d}{dt^2} = \frac{d}{dt^2}$ дифференциальный оператор $\frac{1}{2t} \frac{d}{dt^2}$. Рекуррентное уравнение (35) имеет своим решением выражение $R_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda} R_0)$. Мы получаем отсюда:

$$R_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1} G); \quad S_\lambda = \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda-1} H). \quad (36)$$

Поэтому решение (13) нашей задачи Коши может быть представлено также и в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } m \text{ нечетном} \quad u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-3}{2}} (t^{m-2} Q); \\ \text{при } m \text{ четном} \quad u = \frac{t}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} (t^{m-3} H). \end{array} \right\} \quad (37)$$

Во втором случае мы можем, применяя метод спуска, представить решение и в следующем виде:

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} (t^{m-1} G), \quad (38)$$

где вместо G мы должны подставить выражение (22'). Заметим попутно, что наши полиномы могут быть также легко представлены с помощью производящей функции. Рассмотрим функцию

$$E(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(t)}{n!} x^n.$$

Из функционального уравнения (35) получается для функции E следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$(1-x) E_x - t^2 \frac{\partial E}{\partial (t^2)} = E,$$

общее решение которого имеет вид $E = \frac{1}{1-x} F\left(\frac{t^2}{1-x}\right)$. При $x=0$ мы получаем $E(0, t) = R_0(t) = F(t^2)$. Таким образом, функция

$$E(x, t) = \frac{1}{1-x} R_0\left(\frac{t}{\sqrt{1-x}}\right) \quad (39)$$

представляет (в форме производящей функции) общее решение рекуррентной формулы (35).

В качестве производящей функции для полиномов P_λ получается отсюда в силу наших предыдущих обозначений функция

$$E(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2v+1)}{2^v v!} P_v(t) x^v = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}. \quad (40)$$

Аналогичным способом мы находим для полиномов Π_λ производящую функцию

$$E(x, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \Pi_v(t) x^v = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)}}{\sqrt{1-x}}. \quad (41)$$

4. Проверка решения. Мы докажем теперь путем непосредственной проверки следующую теорему:

Пусть функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+1}{2}$ при t нечетном и до порядка $\frac{m+2}{2}$ при t четном. Тогда выражение

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr, \quad (42)$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m, \quad (43)$$

является решением волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$.

Точно так же выражение

$$u = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr \quad (44)$$

является решением волнового уравнения с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$.

Предпошлем сначала следующее замечание: положим

$$v = \int_0^t (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr. \quad (45)$$

Подставляя сюда вместо Q его выражение (43), мы получим:

$$v = \int_{r \leq t} \dots \int \varphi(\xi) K(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad (46)$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_m - \xi_m)^2},$$

а

$$K(r, t) = \frac{1}{\omega_m} \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}}.$$

Назовем функцию $K(r, t)$ ядром интегрального выражения v .

Ядро $K(r, t)$, во-первых, удовлетворяет само дифференциальному уравнению $K_{tt} - \Delta K = 0$ и, во-вторых, при $m > 3$ обращается в нуль на поверхности сферы $r = t$, причем порядок обращения в нуль равен $\frac{m-3}{2}$.

Предположим сначала, что $m \geq 7$. В этом случае мы можем легко представить функцию v в виде интеграла с постоянной областью интегрирования. Для этого достаточно продолжить ядро K за пределы сферы, описанной из точки ξ радиусом $r = t$, полагая $K = 0$ при $r > t$. Так как по условию $\frac{1}{2}(m-3) \geq 2$, то ядро K , рассматриваемое как функция от x_1, x_2, \dots, x_m, t , непрерывно во всем x -пространстве; далее, за исключением точки $x = \xi$, оно имеет непрерывные в этой области производные первого порядка, а производные второго порядка могут иметь на сфере $r = t$ только разрывы первого рода. Поэтому K как функция от x_1, \dots, x_m, t всюду, кроме точки $x = \xi$, и при любых значениях параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $K_{tt} - \Delta K = 0$.

То, что v удовлетворяет заданным начальным условиям, следует непосредственно из выражений (21) и (22), так как, как мы заметили уже раньше, первый коэффициент полинома P (и сумма первых двух коэффициентов полинома Π) равен единице. Остается только доказать, что v удовлетворяет дифференциальному уравнению. Мы к этому придем, доказав сначала, что v удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_{tt} - \Delta v = (m-2)t^{m-3}\varphi$, откуда мы непосредственно получим искомый результат, продифференцировав это уравнение $m-2$ раз по t . Переходя к доказательству, мы воспользуемся тем, что в силу замечания, сделанного выше, мы можем, дополняя ядро K функцией, тождественно равной нулю за пределами соответствующих сфер, представить v в форме

$$v = \int_G \dots \int \varphi(\xi) K(r, t) d\xi_1 \dots d\xi_m,$$

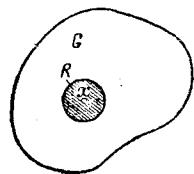
где G обозначает постоянную, т. е. не зависящую от t и x область интегрирования, содержащую все рассматриваемые шары $r^2 < t^2$.

Далее, рассмотрим достаточно малую сферу R , содержащую заданную точку x , и остаточную область $D = G - R$.

Функцию v мы представим теперь в виде суммы $v = y + z$, где

$$y = \int_R \dots \int \varphi K d\xi_1 \dots d\xi_m; \quad z = \int_D \dots \int \varphi K d\xi_1 \dots d\xi_m.$$

Очевидно, что $z_{tt} - \Delta z = 0$, ибо второй интеграл, взятый по постоянной области D , мы имеем право дифференцировать под знаком интеграла, а K всюду в D удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению.



Черт. 39.

Рассмотрим, далее, выражение

$$w = \frac{t^{m-3}}{\omega_m} \int_R \dots \int \frac{\varphi}{r^{m-2}} d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad (47)$$

в котором интеграл, стоящий справа, сходится и в силу ограничений, наложенных на функцию φ , удовлетворяет дифференциальному уравнению ¹⁾

$$\Delta w = -(m-2) t^{m-3} \varphi.$$

Составим разность

$$\begin{aligned} y - w &= \frac{1}{\omega_m} \int_R \dots \int \varphi \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} - (t^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}} d\xi_1 \dots d\xi_m = \\ &= \frac{1}{\omega_m} \int_R \dots \int \varphi \frac{S(r, t)}{r^{m-4}} d\xi_1 \dots d\xi_m. \end{aligned}$$

$S(r, t)$ является функцией, дважды непрерывно дифференцируемой по r и t (в частности, полиномом, если m нечетное); поэтому мы имеем право составить выражение $(y - w)_{tt} - \Delta(y - w)$, дифференцируя под знаком интеграла (см. гл. IV, § 1), причем получающееся после дифференцирования подинтегральное выражение становится при переходе к полярным координатам ограниченным. Отсюда следует, что при $R \rightarrow 0$

$$(y - w)_{tt} - \Delta(y - w) \rightarrow 0.$$

Совершенно очевидно, что выражение w_{tt} стремится при этом также к нулю. Таким образом, мы получаем, что при $R \rightarrow 0$

$$y_{tt} - \Delta y \rightarrow -\Delta w = -(m-2) t^{m-3} \varphi.$$

Так как, с другой стороны, при любом R имеет место равенство $v_{tt} - \Delta v = y_{tt} - \Delta y$, то мы получаем окончательно:

$$v_{tt} - \Delta v = -(m-2) t^{m-3} \varphi,$$

¹⁾ Ср. наши рассмотрения в гл. IV, § 1, которые, как это совершенно очевидно, легко распространяются на случай любого числа независимых переменных.

откуда и следует, что функция u действительно является решением волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

и цель нашей проверки достигнута.

Результат этой проверки, произведенной при условии $m \geq 7$, мы могли бы непосредственно распространить и на значения $m < 7$ с помощью метода спуска. Однако, нам пришлось бы при этом сохранить необходимое при $m = 7$ требование, чтобы функция φ имела непрерывные производные вплоть до порядка $\frac{m+1}{2} = 4$ также и для меньших значений m . Поэтому мы предпочитаем в случае $m < 7$ дополнить проведенное выше доказательство следующим добавочным рассмотрением.

Мы продолжаем ядро K таким же образом, как и раньше, и разбиваем снова v на сумму $v = y + z$. Если мы теперь непосредственно вычислим выражение $z_{tt} - \Delta z$, то легко убедиться, что получится следующая формула:

$$\begin{aligned} z_{tt} - \Delta z = & \int \dots \int_D \varphi [K_{tt} - \Delta K] d\xi_1 \dots d\xi_m + \\ & + \int \dots \int_{r=t} \varphi \left[2(K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K \right] do, \end{aligned}$$

причем последний интеграл должен быть взят по сфере, описанной из точки x радиусом $r = t$.

Далее, простой расчет показывает, что если $m \geq 2$, то

$$2(K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K = 0 \quad \text{при } r = t.$$

Поэтому $z_{tt} - \Delta z = 0$. Дальнейшие рассуждения остаются при $m \geq 3$ такими же, как и выше. Наконец, при $m = 2$

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_R \int \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi_1 d\xi_2,$$

так что в этом случае ядро

$$K = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

в области R всюду регулярно, и мы непосредственно получаем, что $y_{tt} - \Delta y = 0$.

5. Интегрирование неоднородного уравнения. Чтобы проинтегрировать неоднородное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \quad (48)$$

с заданной правой частью $f(x, t)$, мы снова применим уже изложенный нами раньше в гл. III, § 6, п. 4 *метод вариации постоянных* или *метод толчков*, причем мы задаем нулевые начальные условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \quad (48')$$

Функция f пусть снова имеёт непрерывные производные до порядка $\frac{m+1}{2}$ или соответственно $\frac{m+2}{2}$. Обозначим через $v(x, t, \tau)$ решение однородного дифференциального уравнения $v_{tt} - \Delta v = 0$, зависящее от параметра τ и удовлетворяющее начальным условиям

$$v(x, 0, \tau) = 0; \quad v_t(x, 0, \tau) = f(x, \tau).$$

Тогда ¹⁾

$$u = \int_0^t v(x, t - \tau, \tau) d\tau. \quad (49)$$

Применяя теперь наши предыдущие результаты, мы можем на основании формулы (49) непосредственно получить в явном виде решение задачи Коши для неоднородного уравнения (48) с начальными условиями (48').

Образуем среднее значение

$$Q(x, r, \tau) = \frac{1}{\omega_m} \int f(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r, \tau) d\omega_m.$$

Тогда

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t [(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}] r Q(x, r, \tau) dr.$$

Отсюда

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \int_0^t d\tau \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^{t-\tau} [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, \tau) dr$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, t-\tau) dr, \quad (50)$$

причем преобразование в правой части произведено на том основании, что мы имеем право изменить здесь порядок операций дифференцирования и интегрирования по t в силу следующего соотношения, имеющего место при $\tau = t$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^y}{\partial t^y} \int_0^{t-\tau} [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r, \tau) dr = \\ & = \frac{\partial^y}{\partial t^y} \left[(t-\tau)^{m-1} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r(t-\tau), \tau) dr \right] = 0 \\ & \quad (y = 0, 1, \dots, m-2). \end{aligned}$$

¹⁾ Ср. с интегралом Диомеля, гл. III, дополнения, § 1, п. 3.

Решение u можно также представить с помощью полиномов P_λ , а именно:

$$u = \int_0^t (t-\tau) P_{\frac{m-3}{2}} [(t-\tau) Q(x, t-\tau; \tau)] d\tau, \text{ если } m \text{ нечетное}, \quad (51)$$

и

$$u = \int_0^t (t-\tau) P_{\frac{m-2}{2}} [(t-\tau) G(x, t-\tau; \tau)] d\tau, \text{ если } m \text{ четное}, \quad (52)$$

причем

$$G = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{(t-\tau)^{m-1}} \int_0^{t-\tau} \frac{\rho^{m-1} Q(x, \rho, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} d\rho.$$

Так, например, в согласии с результатами гл. III мы получаем при $m=2$:

$$u = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\rho Q(x, \rho, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{\rho \leq \tau} \frac{f(\xi, \eta; t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} d\xi d\eta, \quad (53)$$

$$(\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2),$$

а при $m=3$:

$$u = \int_0^t \rho Q(x, \rho, t-\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\rho \leq t} \int \frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-\rho)}{\rho} d\xi d\eta d\zeta, \quad (54)$$

$$(\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2).$$

6. Проблема излучения. Результат п. 5 позволяет нам теперь решить с помощью простого предельного перехода и *проблему излучения* для общего волнового уравнения в m -мерном пространстве. Мы формулируем проблему излучения следующим образом: *Требуется найти при $t > 0$ решение однородного волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$, которое при $t = 0$ всюду, кроме начала координат x -пространства, обращается в нуль вместе с производной u_t , а в точке $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} = 0$ имеет особенность такого рода, что*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = -g(t), \quad (55)$$

где интеграл в левой части берется в момент t по сфере K_ϵ , описанной из начала координат радиусом ϵ , $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает производную по нормали к этой сфере, $d\sigma$ — элемент поверхности сферы, а радиус ϵ стремится к нулю. Функция $g(t)$ выражает *интенсивность лучеиспускания* в виде заданной функции времени.

Мы строим искомое решение путем предельного перехода, отпра-вляясь от полученного в предыдущем номере решения $u = u_h$, для $f(x, t) = \varphi(x)g(t)$, причем $\varphi = 0$, если $r > h$, и $\varphi \geq 0$, если $r < h$, а

$$\int_{r < h} \dots \int \varphi dx_1 \dots dx_m = 1, \quad \text{где } r^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2.$$

Искомую функцию излучения мы получим как предел решения u_h при $h \rightarrow 0$. На основании формулы (50) имеем:

$$u_h = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t g(t-\tau) d\tau \int_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr,$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \dots, x_m + \beta_m r) d\omega_m.$$

Внутренний интеграл мы можем теперь представить в виде

$$\int_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r Q(x, r) dr = \frac{1}{\omega_m} \int_{s < \tau} \dots \int \frac{(\tau^2 - s^2)^{\frac{m-3}{2}}}{s^{m-2}} \varphi(s) d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$(s^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_m - \xi_m)^2).$$

Совершая, далее, переход к пределу при $h \rightarrow 0$ и полагая $r^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$, мы получим:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\tau (\tau^2 - s^2)^{\frac{m-3}{2}} s Q(x, s) ds = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq \tau, \\ \frac{(\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\omega_m r^{m-2}}, & \text{если } r < \tau. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $r > t$ $u = 0$, а при $r < t$

$$u = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_r^t g(t-\tau) (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} d\tau.$$

В окончательном виде мы можем искомую функцию излучения представить в форме

$$u = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^{t-r} g(\tau) [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{m-3}{2}} d\tau. \quad (56)$$

Предложим читателю в виде задачи произвести проверку этого решения. Легко убедиться, что u удовлетворяет дифференциальному уравнению, заданным начальными условиям, а для интенсивности лучиспускания при $r \rightarrow 0$ получается соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r^{m-2} u) = \frac{1}{\omega_m (m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t g(\tau) (t-\tau)^{m-3} d\tau =$$

$$= \frac{g(t)}{(m-2) \omega_m} \quad (m > 2),$$

откуда непосредственно вытекает заданное условие разрыва (55). В рассмотренных уже раньше частных случаях $m=2$ и $m=3$ получается снова

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau \quad (57)$$

и

$$u = \frac{1}{4\pi r} g(t-r). \quad (58)$$

Мы можем, далее, получить выражение в явном виде для функции излучения. Для этой цели мы рассматриваем выражения:

$$V_\lambda = \frac{1 \cdot 3 \dots (\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}} \int_0^{t-r} g(\tau) [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{\lambda}{2}} d\tau \text{ при } m \text{ нечетном} \quad (59)$$

и

$$W_\lambda = \frac{2 \cdot 4 \dots \lambda}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial t^\lambda} \int_0^{t-r} g(\tau) [(t-\tau)^2 - r^2]^{\frac{\lambda-1}{2}} d\tau \text{ при } m \text{ четном}, \quad (60)$$

где $\lambda = 0, 2, 4, \dots$

Через V_λ и W_λ функция излучения u выражается так:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } m \text{ нечетном} \quad u &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \frac{1}{r^{m-2}} V_{m-3}, \\ \text{при } m \text{ четном} \quad u &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \frac{1}{r^{m-2}} W_{m-2}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Для V_λ и W_λ легко получаются следующие рекуррентные формулы:

$$V_\lambda = (\lambda-1) V_{\lambda-2} - r V'_{\lambda-2}; \quad V_0 = g(t-r), \quad (62)$$

$$W_\lambda = (\lambda-2) W_{\lambda-2} - r W'_{\lambda-2}; \quad W_0 = \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau, \quad (63)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r , а $\lambda = 0, 2, 4, \dots$. Эти рекуррентные формулы дают нам, далее, следующие выражения для V_λ и W_λ :

$$V_\lambda = \sum_{v=0}^{\frac{\lambda}{2}} A_{\lambda,v} r^v V_0^{(v)}, \quad (64)$$

$$W_\lambda = \sum_{v=0}^{\frac{\lambda}{2}} B_{\lambda,v} r^v W_0^{(v)}, \quad (65)$$

где $A_{\lambda, v}$ и $B_{\lambda, v}$ — некоторые фиксированные числовые коэффициенты, легко вычисляемые с помощью специального выбора начальных функций. Прежде всего заметим, что, дифференцируя уравнения (62), мы получим, что V'_λ удовлетворяют той же рекуррентной формуле, что и W_λ , так что W_λ выражается через W_0 таким же образом, как V'_λ через V'_0 . Дифференцируя (64) по r , мы получим:

$$V'_\lambda = \sum_{v=0}^{\frac{\lambda}{2}-1} [(v+1)A_{\lambda, v+1} + A_{\lambda, v}] r^v V_0^{(v+1)} + A_{\lambda, \frac{\lambda}{2}} r^{\frac{\lambda}{2}} V_0^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}.$$

Сравнивая с (65), мы сможем выразить $B_{\lambda, v}$ через $A_{\lambda, v}$:

$$\left. \begin{aligned} B_{\lambda, v} &= (v+1)A_{\lambda, v+1} + A_{\lambda, v} \quad (v = 0, 1, \dots, \frac{\lambda}{2}-1), \\ B_{\lambda, \frac{\lambda}{2}} &= A_{\lambda, \frac{\lambda}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Итак, достаточно вычислить коэффициенты $A_{\lambda, v}$.

Для этой цели выберем в качестве функции $V_0 = g(t-r)$ в формуле (64) функцию $\frac{(t-r)^\alpha}{\alpha!}$, где $\alpha \leq \frac{\lambda}{2}$, и положим затем $t=r$.

Мы получим:

$$V_\lambda(t, t) = A_{\lambda, \alpha} (-1)^\alpha t^\alpha. \quad (67)$$

С другой стороны, мы получаем при этом выборе $g(t)$ в силу формулы (59):

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \frac{1 \cdot 3 \dots (\lambda+1)}{(\lambda+1)! \alpha!} \frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}} \int_r^t (t-\tau)^\alpha (\tau^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}} d\tau = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \dots (\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \frac{\partial^{\lambda-\alpha}}{\partial t^{\lambda-\alpha}} (t^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Произведя дифференцирование по правилу Лейбница, мы найдем:

$$V_\lambda = \frac{1 \cdot 3 \dots (\lambda+1)}{(\lambda+1)!} \binom{\lambda-\alpha}{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)! \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2}-1\right) \dots (\alpha+1)(2t)^\alpha.$$

Сравнение с формулой (67) дает тогда:

$$A_{\lambda, \alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}} \frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha! \left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}, \quad (68)$$

а для $B_{\lambda, \alpha}$ мы получим в силу (66) выражение:

$$B_{\lambda, \alpha} = \frac{\alpha}{\lambda-\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}} \frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha! \left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}. \quad (69)$$

Мы можем теперь представить искомую функцию излучения в явном виде следующим образом:

при m нечетном

$$u = \frac{r^{2-m}}{(4\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \sum_{v=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(m-3-v)!}{v! \left(\frac{m-3}{2}-v\right)!} (2r)^v g^{(v)}(t-r); \quad (70)$$

при четном $m \geq 2$

$$u = \frac{r^{2-m}}{2^{m-1} \pi^{\frac{m}{2}}} \sum_{v=1}^{\frac{m-2}{2}} \frac{(-1)^v (m-3-v)!}{(v-1)! \left(\frac{m-2}{2}-v\right)!} (2r)^v \frac{\partial^v G(r,t)}{\partial r^v}, \quad (71)$$

где во втором случае вместо функции $G(r, t)$ следует подставить интеграл

$$G(r, t) = \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau,$$

т. е. функцию излучения u для случая $m = 2$. Если в формуле (70) заменить выражения $g^{(v)}(t-r)$ выражениями $(-1)^v g^{(v)}(t+r)$, то мы получим решения, соответствующие аналогичному *процессу лучепоглощения*.

Выражения, имеющие вид (70) или (71), мы называем проходящими волнами высшей ступени (ср. исследование понятия волны в § 10).

В рассматриваемой нами проблеме излучения мы снова получаем следующую замечательную теорему: *При нечетном m имеет место принцип Гюйгенса*, т. е. действие возмущения, локализованного в начале координат, на точку x в момент t зависит исключительно от значения возмущения в один единственный момент времени, а именно, в момент $t-r$, который как раз настолько времени предшествует моменту t , сколько нужно для того, чтобы возмущение, выходящее из начала координат со скоростью, равной единице, дошло в момент t до рассматриваемой точки P пространства. Таким образом, если процесс имеет характер мгновенного возмущающего толчка, имевшего место в начале координат в течение короткого резко ограниченного промежутка времени, т. е. если функция $g(t)$ только в течение небольшого промежутка времени отлична от нуля, то мы можем это явление наблюдать в какой-нибудь точке r только ровно через r единиц времени.

Однако, в случае четного числа измерений рассматриваемого пространства принцип Гюйгенса уже теряет силу, как это непосредственно следует из формулы (71). В случае возмущающего толчка, т. е. резко ограниченного во времени начального возмущения в центре возмущения $x=0$, процесс лучеиспускания происходит

следующим образом. В точке, находящейся на расстоянии r от центра возмущения, до момента $t = r$ возмущение попрежнему не наблюдается; однако, проявившись через $t = r$ единиц времени, влияние возмущения на точку r не исчезает через короткий промежуток, как в случае нечетного m , но продолжает действовать в течение всего последующего времени $t > r$, т. е. при любом $t > r$ решение u в точке r остается отличным от нуля.

Таким образом, при передаче в пространстве четного числа измерений сигналов, удовлетворяющих волновому уравнению, отсутствует возможность совершенно отчетливо их приема в другом месте, ибо отчетливость принятого сигнала нарушается сопровождающимся эхом, продолжающимся более или менее долго после получения сигнала. Это обстоятельство, а также дальнейшие рассмотрения в § 10, показывают, что трехмерное пространство обладает существенными отличительными свойствами с точки зрения физического процесса передачи сигналов.

Решения проблемы излучения в случаях $m = 2$ и $m = 3$ нами уже были получены в гл. III, § 6. В случае $m = 5$ формула (70) дает:

$$u = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^3} [g(t-r) + rg'(t-r)],$$

а при $m = 4$ имеем по формуле (71):

$$u = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau.$$

В заключение заметим еще, что рекуррентные формулы (62) и (63) могут быть записаны также и в следующем символическом виде:

$$\frac{V_\lambda}{r^{\lambda+1}} = -2 \frac{d}{dr^2} \left(\frac{V_{\lambda-2}}{r^{\lambda-1}} \right); \quad \frac{W_\lambda}{r^\lambda} = -2 \frac{d}{dr^2} \left(\frac{W_{\lambda-2}}{r^{\lambda-2}} \right). \quad (72)$$

Отсюда сразу получаются решения этих рекуррентных уравнений:

$$V_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^{\lambda+1} \left(\frac{d}{dr^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{V_0}{r} \right); \quad W_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^\lambda \left(\frac{d}{dr^2} \right)^{\frac{\lambda}{2}} W_0. \quad (73)$$

$\lambda = 2, 4, \dots$

Далее, мы можем в силу предыдущих формул представить решение проблемы излучения в следующем явном виде:

при m нечетном

$$u = \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}}}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}} \left(\frac{d}{dr^2} \right)^{\frac{m-3}{2}} \left(\frac{g(t-r)}{r} \right), \quad (74)$$

а при m четном

$$u = \frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{d}{dr^2} \right)^{\frac{m-2}{2}} \int_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau. \quad (75)$$

7. Задача Коши для уравнения $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ и телеграфного уравнения. На основании результатов, полученных нами в п. 5, мы можем теперь, применяя метод спуска, легко решить задачу Коши и для общего гиперболического линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Мы можем ограничиться дифференциальным уравнением:

$$\Delta u + c^2 u = u_{tt} \quad (76)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \varphi(x). \quad (76')$$

К этому виду приводится самый общий случай, как это было показано в гл. III, § 3. Решение этой задачи в явном виде получается снова чрезвычайно просто, если применить метод спуска.

Повысим искусственно число независимых переменных до $m+2$, полагая $x_{m+1} = z$ и $x_{m+2} = t$, и рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\Delta v = v_{tt} \quad (77)$$

с неизвестной функцией $v(x_1, \dots, x_{m+1}, t)$ при начальных условиях

$$v(x, 0) = 0; \quad v_t(x, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m) e^{cz_{m+1}} = \varphi(x) e^{cz}. \quad (77')$$

Полагая, далее,

$$v = e^{cz} u(x_1, \dots, x_m, t), \quad (78)$$

мы получим, что u будет решением первоначальной задачи Коши (76). В самом деле, наши предыдущие формулы решения показывают, что решение v задачи Коши (77) должно иметь вид $e^{cz} u(x_1, \dots, x_m, t)$. Если же мы подставим функцию v в дифференциальное уравнение (77), то мы получим непосредственно, что u удовлетворяет первоначальному дифференциальному уравнению (76); в то же время u удовлетворяет начальным условиям (76'). В силу доказанных в § 4 теорем единственности существует только одно решение нашей задачи u , так что

$$u = v e^{-cz}.$$

Мы можем теперь на основании результата п. 5 сразу написать выражение для функции v , а вместе с тем и для функции u .

В случае четного m , а, следовательно, нечетного $m+1$, мы получаем:

$$v = t P_{\frac{m-2}{2}}(t G^*),$$

где

$$G^*(t) = \frac{e^{cz}}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \dots, x_m + \beta_m t) e^{ct\beta_{m+1}} d\omega_{m+1},$$

откуда

$$u = t P_{\frac{m-2}{2}}(t G),$$

где

$$G(t) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \dots, x_m + \beta_m t) e^{ct\beta_{m+1}} d\omega_{m+1},$$

причем через $d\omega_{m+1}$ мы, как и раньше, обозначаем элемент поверхности единичной сферы $\beta_1^2 + \dots + \beta_{m+1}^2 = 1$ в пространстве $m+1$ измерений. Так как функция φ не зависит от последней переменной $z = x_{m+1}$, то мы получим, учитывая, что

$$t^{m-1} d\omega_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\xi_1 \dots d\xi_m = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho^{m-1} d\omega_m d\rho,$$

следующее соотношение:

$$G(x, t) = \frac{\omega_m}{\omega_{m+1}} \frac{1}{t^{m-1}} \int_{-t}^t \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} e^{cVt^2 - \rho^2} Q(x, \rho) d\rho$$

или

$$G(x, t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{t^{m-1}} \int_0^t \frac{\rho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \operatorname{ch}(c\sqrt{t^2 - \rho^2}) Q(x, \rho) d\rho, \quad (79)$$

причем

$$Q(x, \rho) = \frac{1}{\omega_m} \int \dots \int \varphi(x_1 + \beta_1 \rho, \dots, x_m + \beta_m \rho) d\omega_m.$$

Итак, наше искомое решение имеет вид

$$u = tP_{\frac{m-2}{2}}(tG), \quad (80)$$

где G задается формулой (79).

Таким же образом в случае нечетного m мы получаем решение вида

$$u = tP_{\frac{m-1}{2}}(tG), \quad (81)$$

где

$$G(x, t) = \frac{m}{t^m} \int_0^t \rho^{m-1} J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2}) Q(x, \rho) d\rho, \quad (82)$$

причем J_0 обозначает бесселеву функцию нулевого порядка.

В самом деле, имеем:

$$v = tP_{\frac{m-1}{2}}(tG^*),$$

где

$$G^*(x, t) = \frac{2e^{cz}}{\omega_{m+2} t^m} \int_{\rho^2 + \xi_{m+1}^2 \leq t^2} \dots \int \frac{\varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m)}{\sqrt{t^2 - \rho^2 - \xi_{m+1}^2}} e^{c\xi_{m+1}} d\xi_1 \dots d\xi_{m+1}.$$

Интегрирование по ξ_{m+1} от $-\sqrt{t^2 - \rho^2}$ до $+\sqrt{t^2 - \rho^2}$ дает во внутреннем интеграле выражение $\pi J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2})$, так что

$$G(x, t) = G^*(x, t) e^{-cz} =$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_{m+2}} \frac{1}{t^m} \int_{\rho \leq t} \dots \int \varphi(x + \xi) J_0(ic\sqrt{t^2 - \rho^2}) d\xi_1 \dots d\xi_m;$$

но это выражение с помощью очень простого преобразования приводится к виду (82).

Чтобы применить наш результат к телеграфному уравнению

$$\Delta u = u_{tt} + u_t \quad (83)$$

с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$, достаточно положить $u = ve^{-\frac{t}{2}}$; тогда мы получим для v дифференциальное уравнение

$$v_{tt} = \Delta v + \frac{1}{4} v, \quad (84)$$

т. е. уравнение (76) при $c = \frac{1}{2}$.

Приведем, например, решения телеграфного уравнения при $m=1, 2, 3$:

$$m=1: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t J_0\left(\frac{i}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho) d\rho,$$

где $Q(x, \rho) = \frac{1}{2} [\varphi(x + \rho) + \varphi(x - \rho)]$;

$$m=2: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t \frac{\rho \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 - t^2}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} Q(x, \rho) d\rho,$$

где $Q(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x_1 + \beta_1 \rho, x_2 + \beta_2 \rho) d\omega_2$;

$$m=3: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \rho^2 J_0\left(\frac{i}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho) d\rho,$$

где $Q(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x_1 + \beta_1 \rho, x_2 + \beta_2 \rho, x_3 + \beta_3 \rho) d\omega_3$.

§ 6. Метод средних значений. Волновое уравнение и уравнение Дарбу

Задача Коши для волнового уравнения и другие связанные с этим задачи могут быть решены также и другим методом, основанным на составлении средних значений по поверхности сферы в пространстве x . Перейдем к изложению этого метода и остановимся на некоторых его приложениях¹⁾.

¹⁾ По вопросу о применении метода средних значений и другим вопросам, затрагиваемым в этом и следующих двух параграфах, укажем на работы Фрица Джона (Fritz John), *Math. Ann.*, т. 109 (1934), стр. 488 и т. 111 (1935), стр. 542.