но это выражение с помощью очень простого преобразования приводится к виду (82).

Чтобы применить наш результат к телеграфному уравнению

$$\Delta u = u_{it} + u_t \tag{83}$$

с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \varphi(x)$, достаточно положить $u = ve^{-\frac{t}{2}}$; тогда мы получим для v дифференциальное уравнение

$$v_{tt} = \Delta v + \frac{1}{4} v, \tag{84}$$

т. е. уравнение (76) при $c = \frac{1}{2}$.

Приведем, например, решения телеграфного уравнения при $m = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned}
&m = 1: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho, \\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{2}[\varphi(x + \rho) + \varphi(x - \rho)]; \\
&m = 2: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t \frac{\rho \operatorname{ch} \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} Q(x, \rho)\, d\rho, \\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x_1 + \beta_1\rho, x_2 + \beta_2\rho)\, d\omega_2; \\
&m = 3: \quad u = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \rho^2 J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right) Q(x, \rho)\, d\rho, \\
&\text{где } Q(x, \rho) = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x_1 + \beta_1\rho, x_2 + \beta_2\rho, x_3 + \beta_3\rho)\, d\omega_3.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

§ 6. Метод средних значений. Волновое уравнение и уравнение Дарбу

Задача Коши для волнового уравнения и другие связанные с этим задачи могут быть решены также и другим методом, основанным на составлении средних значений по поверхности сферы в пространстве x. Перейдем к изложению этого метода и остановимся на некоторых его приложениях [1]).

---

[1]) По вопросу о применениях метода средних значений и другим вопросам, затрагиваемым в этом и следующих двух параграфах, укажем на работы Фрица Джона (Fritz John), *Math. Ann.*, т. 109 (1934), стр. 488 и т. 111 (1935), стр. 542.

1. Дифференциальное уравнение Дарбу для средних значений. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \psi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от m переменных x_i. Рассмотрим функцию

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = v(x, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int \psi(x_i + \beta_i r)\, d\omega_m = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \psi\, do, \qquad (1)$$

выражающую среднее значение функции ψ на поверхности сферы, описанной из точки x радиусом r.

В этом интеграле β обозначает единичный вектор с компонентами $\beta_1, \ldots, \beta_m$, Ω_m — единичную сферу в m-мерном пространстве с элементом поверхности $d\omega_m$ и площадью всей поверхности ω_m, а O_m — поверхность сферы, описанной из точки x радиусом r, с элементом поверхности do. Тогда эта функция v удовлетворяет *дифференциальному уравнению Дарбу* (см. § 4, п. 2)

$$v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - \Delta v = 0 \qquad (2)$$

и начальным условиям

$$v_r(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = \psi(x). \qquad (2')$$

Чтобы продолжить функцию v в качестве решения дифференциального уравнения и на отрицательные значения r с сохранением условия непрерывной дифференцируемости, мы полагаем $v(-r) = v(r)$, так что *v является четным относительно r решением уравнения Дарбу.*

Для доказательства составим производную

$$v_r(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_{\Omega_m} \ldots \int \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) d\omega = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, do = \\ = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \iint\limits_{G_m} \ldots \int \Delta\psi\, dg,$$

где G_m обозначает внутренность сферы O_m, dg — пространственный элемент объема $dx_1 \ldots dx_m$, а $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — производную по внешней нормали к поверхности сферы O_m, причем последнее преобразование произведено на основании интегральной теоремы Гаусса. Дифференцируя снова по r, мы получим:

$$v_{rr} = -\frac{m-1}{\omega_m r^m} \iint\limits_{G_m} \ldots \int \Delta\psi\, dg + \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int\limits_{O_m} \ldots \int \Delta\psi\, do = \\ = -\frac{m-1}{r} v_r + \Delta v,$$

что и требовалось доказать.

Если мы, в частности, предположим, что функция $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_1)$ зависит только от одной переменной x_1, то ее среднее значение может быть представлено в форме:

$$v(x_1, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi(x_1 + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta. \tag{3}$$

Таким образом, если $\varphi(x_1)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, то функция $v(x_1, r)$, определенная формулой (3), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - v_{xx} = 0, \tag{4}$$

где первый аргумент функции v обозначен через x, вместо x_1.

Из теорем единственности, доказанных в § 4, п. 2, следует, что формулы (1) и (3) дают единственные решения уравнения Дарбу (2) или (4), удовлетворяющие начальным условиям (2′).

2. Связь с волновым уравнением и решение волнового уравнения. Установим теперь однозначно обратимую зависимость между уравнением Дарбу и волновым уравнением.

Продифференцировав формулу (3) два раза по x, мы получим:

$$v_{xx} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta.$$

Но отсюда в силу уравнения Дарбу (4) следует, далее, что

$$\frac{m-1}{r} v_r + v_{rr} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta.$$

Заметим, что входящий в эту формулу в аддитивной форме параметр x не играет роли и может быть отброшен. Мы можем теперь формулировать полученный результат следующим образом:

Если функции $v(r)$ и $\varphi(r)$ связаны между собой интегральным преобразованием

$$v(r) = \int_{-1}^{1} \varphi(r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta, \tag{5}$$

то между функциями $v'' + \frac{m-1}{r} v'$ и φ'' существует такая же интегральная зависимость, т. е.

$$v'' + \frac{m-1}{r} v' = \int_{-1}^{1} \varphi''(r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta, \tag{6}$$

так что при этом интегральном преобразовании операции φ'' над функцией $\varphi(r)$ соответствует операция $v'' + \frac{m-1}{r} v'$ над функцией $v(r)$.

Эта теорема дает нам возможность получить искомую связь между уравнением Дарбу и волновым уравнением. Пусть u является некоторым четным относительно t и дважды непрерывно дифференцируемым решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию $u_t(x, 0) = 0$. Тогда функция

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u(x_1, \ldots, x_m, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta$$

будет четным решением уравнения Дарбу, удовлетворяющим начальным условиям

$$v_r(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = u(x, 0) = \psi(x).$$

В самом деле, применяя доказанную выше теорему, мы получим:

$$\Delta v = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \Delta u(x, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta =$$

$$= \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u_{tt}(x, r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta = v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r;$$

начальные же условия $v_r(x, 0) = 0$ и $v(x, 0) = \psi$ выполняются в силу самого определения функции v как среднего значения на сфере.

Но для уравнения Дарбу мы можем в силу формулы (1) сразу написать решение рассматриваемой задачи Коши в виде

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Таким образом, четное относительно t решение u волнового уравнения должно удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_0^1 u(x_1, \ldots, x_m; r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\beta = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Мы сейчас покажем, что это интегральное уравнение однозначно разрешимо относительно функции u. Задача решения этого интегрального уравнения сводится к обращению соотношения (5), связывающего функции $v(r)$ и $\varphi(r)$. Чтобы разрешить уравнение (5) относительно $\varphi(r)$, если функция v — произвольно заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, мы можем поступить так: положим $r = \sqrt{s}$; $r\beta = \sqrt{\sigma}$.

Уравнение (5) принимает тогда следующий вид:

$$s^{\frac{m-2}{2}} v(\sqrt{s}) = \int_0^s \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} (s-\sigma)^{\frac{m-3}{2}} d\sigma.$$

Полагая, далее,

$$w(s) = s^{\frac{m-2}{2}} v(\sqrt{s}); \qquad \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} = \chi(\sigma),$$

мы получим:

$$w(s) = \int_0^s \chi(\sigma)(s-\sigma)^{\frac{m-3}{2}} d\sigma. \tag{7}$$

Если m *нечетное*, то мы однозначно определим функцию $\chi(s)$, дифференцируя уравнение (7) $\frac{m-1}{2}$ раз, что нам дает следующее выражение для $\chi(s)$:

$$\left(\frac{m-3}{2}\right)!\,\chi(s) = \frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{ds^{\frac{m-1}{2}}} w(s), \tag{8}$$

откуда мы получаем решение $\varphi(r)$ первоначального интегрального уравнения (5) в следующем виде:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!}\, r\, \frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{(dr^2)^{\frac{m-1}{2}}} [r^{m-2} v(r)]. \tag{9}$$

Если же m четное, то уравнение (7) представляет собой *интегральное уравнение Абеля*, которое легко решается операторным методом Хивисайда с помощью символических дробных степеней оператора дифференцирования (в смысле Хивисайда) p (см. гл. III, дополнения § 2, п. 5). В данном случае приходится применять степень p с «полуцелым» показателем $\frac{m-1}{2}$. Для этой цели мы сначала дифференцируем уравнение (7) $\frac{m-2}{2}$ раз, а затем решаем получающееся уравнение Абеля с показателем $\alpha = \frac{1}{2}$ с помощью оператора $p^{1/2}$ [см. гл. III, дополнения § 2, п. 5, формула (38)]. Таким путем мы получим решение уравнения (7) в случае четного m в следующем виде:

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{w^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\sigma)}{\sqrt{s-\sigma}} d\sigma. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{d}{dr^2} \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \frac{d^{\frac{m-2}{2}}}{(d\rho^2)^{\frac{m-2}{2}}} [\rho^{m-2} v(\rho)]\, d\rho. \tag{11}$$

Полагая теперь

$$\varphi(r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} u(x, r),$$

мы окончательно получим решение нашей задачи Коши для волнового уравнения в случае *четного* m в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial^{\frac{m-2}{2}}}{(\partial r^2)^{\frac{m-2}{2}}} [r^{m-2} Q(x, r)]\, dr, \quad (12)$$

где

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \ldots \int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\, d\omega_m. \quad (13)$$

В случае же *нечетного* m формула решения получается в виде

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} t \frac{\partial^{\frac{m-1}{2}}}{(\partial t^2)^{\frac{m-1}{2}}} [t^{m-2} Q(x, t)], \quad (14)$$

с тем же выражением для $Q(x, t)$.

Таким образом, мы получили новые явные формулы для решения волнового уравнения, совпадение которых с формулами § 5 легко доказать методом полной индукции от m к $m+2$.

3. Задача излучения для волнового уравнения. Установленные в п. 2 соотношения дают нам также возможность получить новую интересную форму для решений волнового уравнения, соответствующих *процессам излучения*. Мы исходим из следующего вопроса: какие решения волнового уравнения зависят только от $r^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$ и времени t. Эти решения должны быть четными относительно r и, как легко видеть, должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$u_{tt} - \frac{m-1}{r} u_r - u_{rr} = 0, \quad (15)$$

которое в точности совпадает с дифференциальным уравнением Дарбу (2), если только переставить между собой, по сравнению с п. 2, пространственную координату r и координату времени t.

Согласно п. 1 решение уравнения (15) имеет вид

$$u(r, t) = \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\beta)(1 - \beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta, \quad (16)$$

где φ — произвольная функция.

Если m нечетное, то, разлагая $(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}$ по биному Ньютона, мы получим:

$$u(r, t)=\frac{1}{r^{m-2}}\sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}}\binom{\frac{m-3}{2}}{\nu} r^{m-3-2\nu}(-1)^{\nu}\int_{-r}^{r}\varphi(t+\rho)\rho^{2\nu}d\rho. \qquad (17)$$

Обозначим через g функцию, для которой $g^{(m-2)}(x)=\varphi(x)$. С помощью интегрирования по частям мы сможем тогда привести функцию u к виду

$$u(r, t)=\frac{1}{r^{m-2}}\sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} A_\nu r^\nu [(-1)^\nu g^{(\nu)}(t+r)-g^{(\nu)}(t-r)], \qquad (18)$$

причем коэффициенты A_ν мы найдем, подставив это выражение для u в дифференциальное уравнение (15). С точностью до некоторого общего множителя, который можно, разумеется, положить равным единице, мы получим:

$$A_\nu=\binom{\frac{m-3}{2}}{\nu}\frac{2^\nu}{\nu!}:\binom{m-3}{\nu} \qquad (19)$$

(ср. § 5, п. 6).

Далее, легко убедиться, что в выражении (18) слагаемые

$$\frac{1}{r^{m-2}}\sum(-1)^\nu A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t+r) \quad \text{и} \quad \frac{1}{r^{m-2}}\sum A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t-r),$$

каждое в отдельности, также удовлетворяют волновому уравнению. В самом деле, поведение произвольной функции g в точке $t+r$ совершенно не зависит от поведения этой функции в точке $t-r$, если только $r\neq 0$; поэтому значения произвольной функции g и ее производных сколь угодно высокого порядка в точках $t+r$ и $t-r$ независимы между собой, и в результате подстановки выражения (18) в дифференциальное уравнение (15) мы должны получить тождество относительно значений g и ее производных в точках $t+r$ и $t-r$; следовательно, каждая из двух частей получающегося выражения, составленных из значений g и ее производных в одной из двух точек $t+r$ и $t-r$, должна равняться тождественно нулю, что и доказывает наше утверждение.

4. Теорема Фридрихса. При $m=1$ уравнение Дарбу совпадает с волновым уравнением и имеет в качестве четных решений функции вида $g(t+r)+g(t-r)$, где g — произвольная функция. При значениях $m>1$ ни уравнение Дарбу, ни волновое уравнение не имеют в качестве решений проходящих волн такого простого вида. Однако, имеет место следующая замечательная теорема:

Введем для дифференциального выражения Дарбу сокращенное обозначение

$$L_m[u(r, t)] = u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - u_{tt}. \tag{20}$$

Тогда при нечетном m и для произвольной функции g от одного переменного как функция $g(t+r)$, так и функция $g(t-r)$ удовлетворяют $\frac{m+1}{2}$ раз итерированному дифференциальному уравнению Дарбу

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}[u] = 0. \tag{21}$$

Чтобы доказать эту теорему, покажем прежде всего, что для любой функции φ и любого целого $\nu \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$L_m \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)(1-\beta^2)^\nu d\beta = d_{m,\nu} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu+1} d\beta, \tag{22}$$

где

$$d_{m,\nu} = \frac{m-3-2\nu}{2\nu+2}\,^{1)}.$$

В самом деле, обозначим интеграл, стоящий в левой части, через $w(r, t)$. В силу результата, полученного нами в п. 1, имеем $L_{2\nu+3}w = 0$; так как $L_m = L_{2\nu+3} + \frac{m-2\nu-3}{r}\frac{d}{dr}$, то мы получаем:

$$L_m w = \frac{m-2\nu-3}{r} w_r = \frac{m-2\nu-3}{r} \int_{-1}^{1} \beta\varphi'(t+r\beta)(1-\beta^2)^\nu d\beta.$$

Интегрируя справа по частям, мы находим:

$$L_m w = \frac{m-3-2\nu}{2\nu+2} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu+1} d\beta,$$

что и доказывает соотношение (22).

Применяя повторно формулу (22), мы получим:

$$L_m^{\frac{m-1}{2}}\left(\int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)\, d\beta\right) =$$

$$= d_{m,0}\, d_{m,1}, \ldots, d_{m,\frac{m-3}{2}} \int_{-1}^{1} \varphi^{(m-1)}(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-1}{2}} d\beta.$$

---

[1]) При $\nu = \frac{m-3}{2}$ получается в качестве частного случая результат п. 1.

Поскольку $d_{m,\frac{m-3}{2}}=0$, правая часть в этом равенстве обращается в нуль, откуда следует, что для любой $m-1$ раз дифференцируемой функции φ имеет место соотношение

$$L_m^{\frac{m-1}{2}}\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=0. \tag{28}$$

Полагая $\varphi=g^{\mu}$, мы получим далее:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=\frac{g'(t+r)-g'(t-r)}{r}=$$

$$=\frac{1}{m-1}L_m\left[g(t+r)+g(t-r)\right].$$

Подставив это выражение в уравнение (23), мы получим:

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}\left[g(t+r)+g(t-r)\right]=0.$$

Отсюда мы заключаем, рассуждая так же, как и в конце предыдущего пункта, что каждая из двух функций $g(t+r)$ и $g(t-r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}[u]=0,$$

что и доказывает нашу теорему.

§ 7. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Общая теорема о среднем значении Асджейрсона (Asgeirsson). Изложенный в § 6 метод решения с помощью обращения уравнения для среднего значения функции получает новое освещение с помощью простой, но имеющей глубокий смысл теоремы о среднем значении, открытой Лейфуром Асджейрсоном [1]) для любых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно гл. III, § 4, п. 2 мы можем любое не вырождающееся однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами привести к виду

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\ldots+u_{y_my_m}-cu,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ — независимые переменные. Приведение дифференциального уравнения к этому виду требует только

---

[1]) См. Leifur Asgeirsson, геттингенская диссертация (1932), *Math. Ann.*, т. 113 (1936), стр. 321.