Поскольку $d_{m,\frac{m-3}{2}}=0$, правая часть в этом равенстве обращается в нуль, откуда следует, что для любой $m-1$ раз дифференцируемой функции φ имеет место соотношение

$$L_m^{\frac{m-1}{2}}\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=0. \tag{28}$$

Полагая $\varphi=g^{\mu}$, мы получим далее:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=\frac{g'(t+r)-g'(t-r)}{r}=$$

$$=\frac{1}{m-1}L_m\left[g(t+r)+g(t-r)\right].$$

Подставив это выражение в уравнение (23), мы получим:

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}\left[g(t+r)+g(t-r)\right]=0.$$

Отсюда мы заключаем, рассуждая так же, как и в конце предыдущего пункта, что каждая из двух функций $g(t+r)$ и $g(t-r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}[u]=0,$$

что и доказывает нашу теорему.

§ 7. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Общая теорема о среднем значении Асджейрсона (Asgeirsson). Изложенный в § 6 метод решения с помощью обращения уравнения для среднего значения функции получает новое освещение с помощью простой, но имеющей глубокий смысл теоремы о среднем значении, открытой Лейфуром Асджейрсоном [1]) для любых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно гл. III, § 4, п. 2 мы можем любое не вырождающееся однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами привести к виду

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\ldots+u_{y_my_m}-cu,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$ — независимые переменные. Приведение дифференциального уравнения к этому виду требует только

---

[1]) См. Leifur Asgeirsson, геттингенская диссертация (1932), *Math. Ann.*, т. 113 (1936), стр. 321.

линейного преобразования координат и отщепления от неизвестной функции множителя вида $e^{\lambda(x)}$, где $\lambda(x)$ — некоторая линейная функция от независимых переменных. Легко далее устранить также и коэффициент c, который мы можем, не ограничивая общности, считать неотрицательным. Для этого достаточно ввести искусственно новую переменную $z = x_{n+1}$ и положить $u = ve^{\sqrt{c}x_{n+1}}$. Наше дифференциальное уравнение примет тогда вид

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n+1}x_{n+1}} = u_{y_1y_1} + \ldots + u_{y_my_m}.$$

Не ограничивая общности, мы можем поэтому записать рассматриваемое дифференциальное уравнение в форме

$$\Delta_x u = \Delta_y u, \tag{1}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=1}^{m} u_{y_iy_i}, \tag{1'}$$

допуская при этом, что функция u, которую мы здесь пишем вместо введенной выше функции v, может не содержать некоторых из переменных x_i или y_i.

Таким образом, позволительно считать, что число переменных x_i равняется числу переменных y_i.

Назовем дифференциальное уравнение (1) уравнением *ультрагиперболического* типа.

В предположении, что u не содержит ни одной из переменных y, мы получаем уравнение Лапласа; если же u зависит только от одного из переменных y, то получается волновое уравнение.

Пусть теперь u есть некоторое решение дифференциального уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемое во всей рассматриваемой области пространства x, y. С помощью этой функции u образуем следующие интегралы, взятые по поверхности единичной сферы $\beta_1^2 + \ldots + \beta_m^2 = 1$:

$$\mu(x, y, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int_{\Omega_m} \ldots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1, \ldots, y_m)\, d\omega_m \tag{2}$$

и

$$\nu(x, y, r) = \\ = \frac{1}{\omega_m} \int_{\Omega_m} \ldots \int u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \beta_1 r, \ldots, y_m + \beta_m r)\, d\omega_m. \tag{3}$$

Таким образом, $\nu(x, y, r)$ обозначает среднее значение функции u на поверхности сферы, описанной из точки y радиусом r в пространстве переменных y_i при постоянных значениях переменных $x_1, \ldots x_m$, а $\mu(x, y, r)$ соответственно обозначает среднее значение u в пространстве переменных x при постоянных значениях пере-

менных $y_1, \ldots, y_m$. Далее, мы предполагаем, что функции ν и μ продолжены на отрицательные значения r в качестве четных функций.

Составим также среднее значение

$$w(x, y; r, s) = \\ = \frac{1}{\omega_m^2} \int_{\Omega_m} \cdots \int \int_{\Omega'_m} \cdots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1 + \beta'_1 s, \ldots, y_m + \\ + \beta'_m s)\, d\omega_m d\omega'_m, \tag{4}$$

т. е. среднее значение по сфере радиуса r в пространстве переменных x и по сфере радиуса s в пространстве переменных y. Очевидно, что

$$\mu(x, y, r) = w(x, y; r, 0); \quad \nu(x, y, r) = w(x, y; 0, r).$$

Теорема о среднем значении, которую мы должны доказать, заключается просто в том, что

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r), \tag{5}$$

т. е. *среднее значение функции u, взятое при постоянных x в пространстве y по сфере радиуса r, равняется среднему значению u, взятому при постоянных y в пространстве x по сфере того же радиуса r.*

Имеет место даже более общее соотношение

$$w(x, y, r, s) = w(x, y, s, r), \tag{6}$$

т. е. *результат двойного усреднения является симметрической функцией от радиусов r и s.*

Докажем сначала первую, более частную, теорему о среднем значении. Согласно § 6 оба средних значения μ и ν удовлетворяют дифференциальному уравнению Дарбу

$$\Delta_x \mu - \frac{m-1}{r} \mu_r - \mu_{rr} = 0; \quad \Delta_y \nu - \frac{m-1}{r} \nu_r - \nu_{rr} = 0, \tag{7}$$

причем в первое уравнение переменные y входят в качестве параметров, а во второе уравнение в качестве параметров входят переменные x. Из уравнения (1) следует далее, что $\Delta_x \mu = \Delta_y \mu$ и $\Delta_y \nu = \Delta_x \nu$, так что имеет место также уравнение

$$\Delta_x \nu - \frac{m-1}{r} \nu_r - \nu_{rr} = 0.$$

Кроме того, из самого определения функций μ и ν следует:

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y), \qquad \mu_r(x, y, 0) = 0;$$
$$\nu(x, y, 0) = u(x, y), \qquad \nu_r(x, y, 0) = 0.$$

Таким образом, функции μ и ν, рассматриваемые как функции от переменных x и r с переменными y в качестве параметров, являются решениями одной и той же задачи Коши для уравнения Дарбу и поэтому на основании теорем единственности § 4, п. 2 должны быть тождественно равны между собой.

Вторая, общая теорема о среднем значении (6) получится теперь следующим образом: двойное среднее значение w также удовлетворяет уравнению $\Delta_x w = \Delta_y w$ и уравнениям Дарбу

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr}; \qquad \Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss},$$

откуда следует, что

$$\frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}. \tag{8}$$

При $s = 0$ мы рассматриваем $w(x, y, r, 0)$ как известную функцию; кроме того, имеем $w_s(x, y, r, 0) = 0$. Этими начальными условиями функция $w(x, y, r, s)$ однозначно определяется, что можно доказать, рассуждая точно так же, как в § 4, п. 2.

Если мы положим $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ и $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, то обе функции u и v удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (8) с начальными условиями $u(r, 0) = w(r, 0)$; $u_s(r, 0) = 0$ и $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. Но из доказанной выше теоремы о среднем значении (5) следует, что $w(0, r) = w(r, 0)$; поэтому функции u и v удовлетворяют одинаковым начальным условиям при $s = 0$. В силу теоремы единственности функции u и v должны быть, таким образом, тождественно равными между собой, т. е. $v(r, s) = w(x, y; s, r) = w(x, y; r, s)$, и наша теорема доказана.

Так как теорема о среднем значении (5) имеет место для любой сферы радиуса r, то, интегрируя по r, мы непосредственно получим соответствующую *теорему о среднем значении для внутренности шара*, а именно:

$$\int\limits_{\rho < r} \cdots \int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m =$$
$$= \iint\limits_{\rho < r} u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{5'}$$

причем оба интеграла берутся по внутренности шара

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2.$$

Отсюда получается, далее, соответствующая теорема для случая $n > m$, т. е. для дифференциального уравнения

$$u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n} = u_{y_1 y_1} + \ldots + u_{y_m y_m}.$$

В самом деле, если в написанном для случая $n = m$ соотношении (5′) взять в качестве u функцию, не зависящую от переменных $y_{m+1}, \ldots, y_n$, то мы и получим более общую теорему, выражающуюся так:

$$\int\limits_{\rho < r} \cdots \int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$
$$= \frac{\omega_{n-m}}{n-m} \int\limits_{\rho_1 < r} \cdots \int (r^2 - \rho_1^2)^{\frac{n-m}{2}} u(x_1, \ldots, x_n; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{5''}$$

где $\rho_1^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2$, $\rho^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$; в случае $n = m$ мы должны множитель $\frac{\omega_{n-m}}{n-m}$ заменить единицей.

2. Другое доказательство теоремы о среднем значении. Мы получим другое доказательство общей теоремы о среднем значении (6) при более сильных требованиях дифференцируемости, рассматривая составленный с помощью функции $v(a, b)$ интеграл

$$w(r, s) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v(\alpha r, \beta s)(1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}}(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\alpha\, d\beta. \quad (9)$$

Если w — заданная функция, имеющая непрерывные производные достаточно высокого порядка, то согласно § 6 существует одна и только одна четная функция v, удовлетворяющая интегральному уравнению (9). При этом на основании формулы (6), § 6, п. 2 имеем:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [v_{aa}(\alpha r, \beta s) - v_{bb}(\alpha r, \beta s)](1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}}(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\alpha\, d\beta =$$
$$= \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} - \frac{m-1}{s} w_s - w_{ss}.$$

Поэтому из уравнения (8) предыдущего пункта непосредственно следует, что $v_{aa} = v_{bb}$, откуда $v(a, b) = g(a+b) + h(a-b)$.

Подставив это выражение для $v(a, b)$ в правую часть формулы (9), мы получим выражение для $w(r, s)$, симметрическое относительно r и s, откуда и вытекает, что $w(r, s) = w(s, r)$, и наша теорема доказана.

3. Применение теоремы о среднем значении к волновому уравнению. Применим теорему о среднем значении к решению задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ при начальных условиях $u(x, 0) = \psi(x)$; $u_t(x, 0) = 0$, т. е. рассмотрим снова задачу о нахождении четных относительно времени t решений волнового уравнения. Для этой цели будем рассматривать волновое уравнение как частный случай ультрагиперболического уравнения (1), полагая $y_1 = t$ и введя дополнительное требование, чтобы решение u не зависело от $y_2, \ldots, y_m$. Применим теперь теорему о среднем значении к произвольной точке x пространства переменных x и началу координат $y_i = 0$ пространства переменных y.

Мы получим:

$$\frac{1}{\omega_m}\int_{\Omega_m}\ldots\int u(x_1+\beta_1 t, \ldots, x_m+\beta_m t;\ 0)\, d\omega_m =$$
$$= \frac{1}{\omega_m}\int_{\Omega_m}\ldots\int u(x_1, \ldots, x_m;\ t\beta_1)\, d\omega_m. \quad (10)$$

Среднее значение, стоящее в левой части этого равенства, совпадает с выражением $Q(x, t)$, которое мы рассматривали уже раньше и которое представляет среднее значение начальной функции ψ. При

данных начальных условиях функция $Q(x, t)$ является, таким образом, известной функцией.

Среднее же значение, стоящее в правой части формулы (10), в котором подинтегральное выражение, кроме параметров x, зависит только от одной величины $t\beta_1$, может быть снова представлено в виде простого интеграла, а именно:

$$\frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x_1, \ldots, x_m, \rho)(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}} d\rho.$$

Таким образом, из теоремы о среднем значении непосредственно получается интегральное уравнение

$$Q(x, t) = \frac{2\omega_{m-1}}{\omega_m t^{m-2}} \int_0^t u(x, \rho)(t^2-\rho^2)^{\frac{m-3}{2}} d\rho, \tag{11}$$

которое совпадает с интегральным уравнением, рассмотренным в § 6, п. 2 и решенным нами там с помощью операции дифференцирования целого или полуцелого порядка.

Итак, теорема о среднем значении дает более глубокое обоснование метода решения, изложенного в § 6. Это применение теоремы о среднем значении по существу сводится к тому, что путем введения добавочных искусственных параметров времени $y_2, \ldots, y_m$ мы приводим волновое уравнение к такому виду, при котором пространственные параметры $x_1, \ldots x_m$ и параметры времени $y_1, \ldots y_m$ оказываются совершенно равноправными.

4. Решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения. В качестве дальнейшего применения теоремы о среднем значении Асджейрсона приведем следующий метод решения формулированной в § 4, п. 1 характеристической задачи Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{12}$$

Значения функции u заданы на конусе $K = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, т. е. задана функция

$$\psi(x, y, z) = u(x, y, z, \sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Требуется найти решение u уравнения (12), регулярное в области $K \leqslant 0$ и принимающее на конусе $K = 0$ заданные значения.

Построим сначала решение этой задачи вдоль оси $x = y = z = 0$ конуса K; применяя теорему о среднем значении, мы получим:

$$2\pi t \int_0^{2t} u(0, 0, 0, r)\, dr = t^2 \iint_\Omega \psi(\alpha t, \beta t, \gamma t)\, d\omega$$

или же

$$4\pi \int_0^t u(0, 0, 0, r)\, dr = t \iint_\Omega \psi\left(\frac{\alpha}{2} t, \frac{\beta}{2} t, \frac{\gamma}{2} t\right) d\omega,$$

причем интеграл, стоящий справа, берется по поверхности единичной сферы в пространстве α, β, γ. Отсюда мы непосредственно получаем, продифференцировав это уравнение, следующее выражение:

$$u(0, 0, 0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \psi\left(\frac{\alpha t}{2}, \frac{\beta t}{2}, \frac{\gamma t}{2}\right) d\omega + \frac{t}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} (\alpha\psi_x + \beta\psi_y + \gamma\psi_z)\, d\omega. \quad (13)$$

При этом мы должны также и во втором интеграле в качестве аргументов функций ψ_x, ψ_y, ψ_z взять $\frac{\alpha}{2}t, \frac{\beta}{2}t, \frac{\gamma}{2}t$.

Чтобы определить значение u в любой точке P области $K<0$, не лежащей на оси t, достаточно преобразовать точку P в точку P', лежащую на оси t, с помощью *преобразования Лоренца*, т. е. преобразования, оставляющего неизменным характеристический конус. Пусть P имеет координаты $x=x_0$, $y=0$, $z=0$, $t=t_0$, причем $|x_0|<|t_0|$. Тогда мы достигнем нашей цели с помощью следующего преобразования Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}x' + \frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t'; \quad y=y', \quad z=z', \\ t &= -\frac{x_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}x' + \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}t'. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

При этом преобразовании точка P переходит в точку P' с координатами $x'=y'=z'=0$, $t'=\sqrt{t_0^2-x_0^2}$.

Формула (13) остается при этом преобразовании в силе, ибо при преобразовании Лоренца (14) дифференциальное уравнение не изменяет своего вида. Формулу (13) мы должны теперь применить к функции

$$v(x', y', z', t') = u(x, y, z, t)$$

с начальными значениями

$$\chi(x', y', z') = \psi(x, y, z).$$

Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} u(x_0, 0, 0, t_0) &= v(0, 0, 0, \sqrt{t_0^2-x_0^2}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} \chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}\right) d\omega + \\ &+ \frac{\sqrt{t_0^2-x_0^2}}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} (\alpha\chi_{x'} + \beta\chi_{y'} + \gamma\chi_{z'})\, d\omega, \end{aligned}$$

причем в последнем интеграле в качестве аргументов функций $\chi_{x'}$, $\chi_{y'}$, $\chi_{z'}$ мы должны взять величины $\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}$, $\frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2-x_0^2}$,

$\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}$. Если мы затем снова выразим χ через ψ, то легко получим:

$$u(x_0, 0, 0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega} \psi\left[\frac{1}{2}(x_0 - \alpha t_0), \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right] d\omega +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} (x_0 - \alpha t_0)\psi_x\, d\omega + \frac{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} (\beta\psi_y + \gamma\psi_z)\, d\omega. \quad (15)$$

При этом аргументами функций ψ_x, ψ_y, ψ_z являются так же, как и в функции ψ, величины

$$\frac{1}{2}(x_0 - \alpha t_0), \qquad \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \qquad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}.$$

Если точка $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ занимает произвольное положение в пространстве, находясь внутри области $K < 0$, то мы должны предварительно с помощью поворота системы координат преобразовать эту точку в точку, лежащую в плоскости $y = z = 0$. Таким образом, задавая функцию ψ, мы однозначно определяем значение функции u во всех точках P области $K < 0$. Далее, из формулы (15) следует, что *значение u в некоторой точке P зависит только от начальных значений ψ в точках эллипса, вдоль которого некоторая плоскость пересекает характеристический конус, причем этот эллипс совпадает с линией пересечения начального конуса с характеристическим конусом, выходящим из точки P.*

Предложим читателю в виде задачи проверить, действительно ли полученное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию. Попутно заметим, что точно таким же образом можно решить характеристическую задачу Коши для ультрагиперболического дифференциального уравнения.

5. Другие применения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов. Теорема о среднем значении Асджейрсона содержит как частные случаи другие известные теоремы о среднем значении из теории гармонических функций и теории гиперболических дифференциальных уравнений. Так, например, мы получим теорему о среднем значении из теории гармонических функций, рассматривая гармоническую функцию $u(x_1, \ldots, x_m)$ как такое специальное решение дифференциального уравнения (1), которое не зависит ни от одной из переменных y_i. Применяя теорему о среднем значении (5) для произвольной точки x пространства переменных x_i и начала координат $y_i = 0$ пространства y_i, мы получим известную теорему о среднем значении из теории гармонических функций. Эта теорема получается также непосредственно из более общей теоремы (5″) при $m = 0$.

Менее тривиальную теорему о среднем значении для гармонических функций мы получим следующим образом: пусть $u(x_1, \ldots, x_m)$ какое-нибудь решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Введем искусственно вместо m координат x_i $2m$ новых координат ξ_i и η_i с помощью

системы уравнений $x_i = \xi_i \operatorname{ch} \alpha_i + \eta_i \operatorname{sh} \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ могут иметь произвольные значения. Всякая функция $u(x)$ преобразуется тогда в функцию $\omega(\xi, \eta)$ от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \ldots, \eta_m$, а дифференциальное уравнение $\Delta u = 0$ преобразуется в ультрагиперболическое дифференциальное уравнение $\Delta_\xi \omega = \Delta_\eta \omega$. Применим теперь теорему Асджейрсона в форме (5′) для точки $\xi_i = \eta_i = 0$ к шару K_1:

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 \leqslant r^2$$

в пространстве ξ и соответствующему шару K_2:

$$\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2 \leqslant r^2$$

в пространстве η. Этим шарам соответствуют в пространстве переменных x софокусные эллипсоиды:

$$(S_1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} \leqslant r^2$$

и

$$(S_2) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha_i} \leqslant r^2.$$

Средние значения функции u в шаровых областях K_1 и K_2 переходят в средние значения этой функции в эллипсоидальных областях S_1 и S_2. Так как, с другой стороны, мы можем с помощью соответствующего выбора величин α_i и r представить посредством приведенных выше уравнений любую пару софокусных эллипсоидов, то мы получаем непосредственно следующую теорему:

Для семейства софокусных эллипсоидов среднее значение регулярной гармонической функции, взятое по внутренности какого-нибудь эллипсоида из этого семейства, является постоянным для всего данного семейства. При $m = 3$ эта теорема по существу эквивалентна классическим результатам теории притяжения эллипсоидов.

В заключение заметим, что наше последнее применение теоремы о среднем значении может быть подчинено следующему общему принципу. Рассмотрим группу линейных преобразований, преобразующих ультрагиперболическое дифференциальное уравнение (1) само в себя. Эта группа линейных преобразований состоит из тех и только тех линейных преобразований, при которых характеристическая форма

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

сохраняет свой вид с точностью до постоянного множителя, так что характеристический конус нашего дифференциального уравнения инва-

риантен относительно этой группы линейных преобразований. Эта [1]) еще недостаточно изученная группа содержит, разумеется, в качестве подгрупп не только группу преобразований подобия, но и группы Лоренца в соответствующих подпространствах с меньшим числом измерений. Комбинирование теоремы о среднем значении с предварительным линейным преобразованием из этой «ультралоренцовой группы» дает возможность получить ряд дальнейших теорем о среднем значении для решений различных частных видов ультрагиперболического дифференциального уравнения.

§ 8. О негиперболических задачах Коши

Рассмотренная в предыдущем параграфе теорема о среднем значении Асджейрсона является ценным методом исследования, позволяющим уяснить те своеобразные обстоятельства, которые имеют место в отношении задач Коши для ультрагиперболических дифференциальных уравнений, а также для гиперболических дифференциальных уравнений в случае начальных многообразий непространственного типа. В частности, мы выясним, в силу какого обстоятельства такого рода задачи Коши не являются корректными и могут оказаться неразрешимыми (см. гл. III, § 7).

1. Нахождение функции по ее средним значениям на сфере. Рассмотрим предварительно следующий вопрос: в окрестности точки $t = 0$ пространства x, t требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $f(x_1, \ldots, x_m, t)$, удовлетворяющую следующим условиям.

Во-первых, $f(x_1, \ldots, x_m, t)$ должна быть четной относительно t, т. е.

$$f(x, t) = f(x, -t), \tag{1}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

---

[1]) В случае $m = 3$ эта группа была рассмотрена Феликсом Клейном в его книге «Высшая геометрия», изд. 2, Берлин, 1926 (имеется русский перевод) как группа преобразований множества всех прямых трехмерного пространства самого в себя.

Исходя из этой группы, можно получить дальнейшие применения теоремы о среднем значении Асджейрсона. Это было сделано Ф. Джоном для случая $m = 2$ и ультрагиперболического уравнения $u_{x_1y_2} = u_{x_2y_1}$. (См. его работу в *Bull. Amer. math. Soc.*) Мы рассматриваем x_1, x_2, y_1, y_2 как координаты (в смысле линейчатой геометрии) прямой в трехмерном пространстве ξ, η, ζ. Тогда оказывается, что самое общее решение этого дифференциального уравнения, определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым требованиям регулярности в бесконечности, задается интегралами от произвольной функции от ξ, η, ζ, взятыми по прямым пространства ξ, η, ζ. Теорема о среднем значении Асджейрсона может быть в этом случае применена к обоим семействам прямолинейных образующих произвольного однополостного гиперболоида пространства ξ, η, ζ и выражается следующим образом: интеграл от любого решения u, взятый по многообразию, образуемому в пространстве x_1, x_2, y_1, y_2, одним семейством прямолинейных образующих гиперболоида, равняется интегралу от u, взятому по многообразию, составленному из прямых другого семейства.