

риантен относительно этой группы линейных преобразований. Эта¹⁾ еще недостаточно изученная группа содержит, разумеется, в качестве подгрупп не только группу преобразований подобия, но и группы Лоренца в соответствующих подпространствах с меньшим числом измерений. Комбинирование теоремы о среднем значении с предварительным линейным преобразованием из этой «ультралоренцовой группы» дает возможность получить ряд дальнейших теорем о среднем значении для решений различных частных видов ультрагиперболического дифференциального уравнения.

§ 8. О негиперболических задачах Коши

Рассмотренная в предыдущем параграфе теорема о среднем значении Асджейрсона является ценным методом исследования, позволяющим уяснить те своеобразные обстоятельства, которые имеют место в отношении задач Коши для ультрагиперболических дифференциальных уравнений, а также для гиперболических дифференциальных уравнений в случае начальных многообразий непространственного типа. В частности, мы выясним, в силу какого обстоятельства такого рода задачи Коши не являются корректными и могут оказаться неразрешимыми (см. гл. III, § 7).

1. Нахождение функции по ее средним значениям на сфере. Рассмотрим предварительно следующий вопрос: в окрестности точки $t = 0$ пространства x, t требуется найти непрерывно дифференцируемую функцию $f(x_1, \dots, x_m, t)$, удовлетворяющую следующим условиям.

Во-первых, $f(x_1, \dots, x_m, t)$ должна быть четной относительно t , т. е.

$$f(x, t) = f(x, -t), \quad (1)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

¹⁾ В случае $m = 3$ эта группа была рассмотрена Феликсом Клейном в его книге «Высшая геометрия», изд. 2, Берлин, 1926 (имеется русский перевод) как группа преобразований множества всех прямых трехмерного пространства самого в себя.

Исходя из этой группы, можно получить дальнейшие применения теоремы о среднем значении Асджейрсона. Это было сделано Ф. Джоном для случая $m = 2$ и ультрагиперболического уравнения $u_{x_1 y_1} = u_{x_2 y_2}$. (См. его работу в *Bull. Amer. math. Soc.*) Мы рассматриваем x_1, x_2, y_1, y_2 как координаты (в смысле линейчатой геометрии) прямой в трехмерном пространстве ξ, η, ζ . Тогда оказывается, что самое общее решение этого дифференциального уравнения, определенное во всем пространстве и удовлетворяющее некоторым требованиям регулярности в бесконечности, задается интегралами от произвольной функции от ξ, η, ζ , взятыми по прямым пространства ξ, η, ζ . Теорема о среднем значении Асджейрсона может быть в этом случае применена к обоим семействам прямолинейных образующих произвольного однополостного гиперболоида пространства ξ, η, ζ и выражается следующим образом: интеграл от любого решения u , взятый по многообразию, образуемому в пространстве x_1, x_2, y_1, y_2 , одним семейством прямолинейных образующих гиперболоида, равняется интегралу от u , взятому по многообразию, составленному из прямых другого семейства.

Во-вторых, интегралы

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_m, r) &= g(x, r) = \\ &= \int \dots \int f(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m, \tau) d\sigma = Q[f], \end{aligned} \quad (2)$$

взятые по поверхности сферы O_r :

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 + \tau^2 = r^2,$$

описанной из точки $(x, 0)$ как из центра радиусом r , должны иметь заданные значения, если точка $(x, 0)$ лежит в некоторой области пространства x, t .

Другими словами, мы должны найти четную относительно t функцию $f(x, t)$, если известна функция $g(x, r)$.

Задавая функцию g , мы вместе с тем задаем функцию

$$G(x, r) = \int_0^r g(x, \rho) d\rho, \quad (3)$$

т. е. интеграл от неизвестной функции f , взятый по всей внутренности сферы радиуса r , описанной из соответствующей точки плоскости $t=0$ в $m+1$ -мерном пространстве x, t . Мы можем теперь дифференцировать функцию $G(x, r)$ по x_i , если только предположить непрерывность функции f .

Рассматривая G как интеграл по внутренности сферы и исходя из определения

$$G_{x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m, r) - G(x_1, \dots, x_m, r)}{h},$$

мы получим:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \int \dots \int f(x_1 + \xi_1, \dots, x_m + \xi_m, \tau) \xi_i d\sigma. \quad (4)$$

Таким образом, нам известно значение не только интеграла от самой неизвестной функции f по поверхности сферы O_r радиуса r , но также значение интеграла

$$\begin{aligned} &\int \dots \int f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) \eta_i d\sigma = \\ &= x_i g(x_1, \dots, x_m, r) + r G_{x_i} = D_i g = Q[x_i f], \end{aligned} \quad (5)$$

где через $\eta_i = x_i + \xi_i$ и τ обозначены координаты точки, перемещающейся по поверхности сферы $\sum_1^m \xi_i^2 + \tau^2 = r^2$ радиуса r с центром $(x, 0)$.

Итак, произведя над функцией g операцию D_i , мы найдем по формуле (2), примененной вместо функции f к функции $x_i f$, сред-

нее значение этой новой функции $Q[x_i f]$ на поверхности сферы O_r . Операции D_i над g соответствует таким образом умножение f на x_i .

Применяя вторично этот процесс к функции $x_i f$ вместо функции f и повторяя его затем какое угодно число раз, мы получим, что, задавая интегралы g , мы вместе с тем определяем значения всех интегралов вида

$$\int_{O_r} \dots \int f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \dots, \eta_m) d\sigma = P(D_1, \dots, D_m) g,$$

где P — какой угодно полином от η_1, \dots, η_m .

Представив теперь элемент поверхности сферы O_r в виде

$$d\sigma = \frac{r d\xi_1 \dots d\xi_m}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2}},$$

мы приводим предыдущий интеграл к виду

$$r \int_{O_r} \dots \int [f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) + f(\eta_1, \dots, \eta_m, -\tau)] P(\eta_1, \dots, \eta_m) \frac{d\xi_1 \dots d\xi_m}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_m^2}},$$

так что для функции

$$\varphi(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) = \frac{r [f(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) + f(\eta_1, \dots, \eta_m, -\tau)]}{\sqrt{r^2 - (\eta_1 - x_1)^2 - \dots - (\eta_m - x_m)^2}}$$

известны интегралы $\int_{O_r} \dots \int \varphi(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \dots, \eta_m) d\eta_1 \dots d\eta_m$

от произведения φ на какой угодно полином $P(\eta_1, \dots, \eta_m)$, взятые по области $(\eta_1 - x_1)^2 + \dots + (\eta_m - x_m)^2 \leq r^2$.

В силу того, что внутри сферы $(\eta_1 - x_1)^2 + \dots + (\eta_m - x_m)^2 = r^2$ совокупность всех полиномов $P(\eta_1, \dots, \eta_m)$ образует полную систему функций, то, зная значения интегралов

$$\int_{O_r} \dots \int \varphi(\eta_1, \dots, \eta_m, \tau) P(\eta_1, \dots, \eta_m) d\eta_1 \dots d\eta_m = P(D_1, \dots, D_m) g,$$

мы этим самым единственным образом определяем функцию φ . Но в силу четности f мы имеем:

$$\varphi = \frac{2rf(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \tau)}{\sqrt{r^2 - (\eta_1 - x_1)^2 - \dots - (\eta_m - x_m)^2}},$$

так что и функция f также однозначно определена.

Итак, мы доказали, что *непрерывная и четная относительно t функция f однозначно определяется заданием ее средних значений g на сferах O_r* . При этом мы можем определить значение f на сфере радиуса r с центром $(x, 0)$, если нам известны средние значения g функции f на сферах, описанных из достаточно близкого центра $(y, 0)$ радиусом ρ для всех значений $\rho < r + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число. Если отбросить условие (1), то мы получим,

что, во всяком случае, функция $f(x, t) + f(x, -t)$ будет однозначно определена в соответствующей области.

Обратим теперь внимание на следующий важный факт: для того, чтобы вычислить оператор $D_i g$ для какой-нибудь системы значений x_1^0, \dots, x_m^0, r^0 , достаточно знать только среднее значение $g(x, r)$ функции $f(x, t)$ для значений r и x_i , удовлетворяющих условиям

$$0 \leq r \leq r^0; \quad \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2, \quad (6)$$

где ε — сколь угодно малое число. То же относится и к вычислению всех символьических полиномов $P(D_1, \dots, D_m)g$. Поэтому, задавая в области, определенной условиями (6), значения функции g , мы однозначно определяем предполагаемую четной функцию f во всем шаре

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leq r_0^2.$$

Но из того, что в этом шаре известна функция f , следует, обратно, что для любой точки $(x, 0)$ плоскости $t = 0$, лежащей внутри этого шара, мы можем однозначно определить соответствующее значение интеграла $g(x, r)$, взятого по сфере радиуса r с центром в точке $(x, 0)$, если только выполняется условие

$$r + \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} \leq r_0. \quad (7)$$

Мы резюмируем этот результат следующим образом:

Заданием g в цилиндрической области (6) сколь угодно малой толщины ε функция g однозначно определяется также и во всем двойном конусе (7) (см. черт. 40). Это впрочем относится также и к случаю любой необязательно четной непрерывной функции f .

2. Применение к задаче Коши. Рассмотрим ультрагиперболическое уравнение

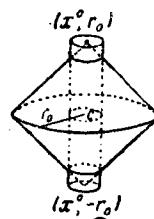
$$\sum_{i=1}^l u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} + u_{tt}, \quad (8)$$

причем мы выделяем переменную $x_n = x_{m+1} = t$ и считаем, что $n \geq 2$. Условие $l = n$ может и не соблюдаться.

Пусть требуется найти четное относительно t решение, принимающее на плоскости $t = 0$ заданные начальные значения. Предположим, например, что при $t = 0$

$$u_t(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad u = \psi(x, y).$$

Рассмотрим начальные значения в области пространства x, y , для которой точка y лежит в некоторой области G пространства R пере-



Черт. 40.

менных y , тогда как точка x лежит внутри сколь угодно малого шара

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2. \quad (9)$$

Когда x и y перемещаются по соответствующим областям, точка (x, y) покрывает в $m+l$ -мерном пространстве переменных x_i и y_i область, называемую «произведением» области G пространства y на сколь угодно малую шаровую область пространства x . Если мы будем рассматривать решение u как функцию от x и t с переменными y как параметрами, то наши начальные данные однозначно определяют значения интегралов от функции u , взятых по сферам пространства x, t , центры которых x_i, t удовлетворяют условиям

$$t = 0, \quad \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2,$$

а радиусы которых не превосходят некоторого постоянного числа r^0 (r^0 есть радиус наибольшего шара в пространстве R , целиком содержащегося в области G и имеющего центром данную точку y этой области). В самом деле, при $n > l$ это следует непосредственно из теоремы о среднем значении Асджеирсона [см. формулу (5'') предыдущего параграфа]. Если же $n < l$, то эта теорема о среднем значении нам дает сперва только интегралы

$$\int \dots \int_{V_r} u(x' + x, t) \left(r^2 - t^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{l-n}{2}} dx dt,$$

взятые по внутренности V_r , какого угодно шара в пространстве x, t радиуса $r \leq r_0$, центр которого $x'_1, \dots, x'_m, t = 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^m (x'_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2.$$

Если мы обозначим через $J(r)$ интеграл от u , взятый по такой сфере радиуса r , то наша теорема о среднем значении дает нам, таким образом, значение интеграла

$$\int_0^r J(p) (r^2 - p^2)^{\frac{l-n}{2}} dp.$$

Но если нам известна для всех значений $r < r^0$ функция

$$\varphi(r) = \int_0^r J(p) (r^2 - p^2)^{\frac{l-n}{2}} dp,$$

то, решая это интегральное уравнение Абеля относительно $J(r)$ приведенным выше (см. § 6, п. 1) методом, мы однозначно определим

также и функцию $J(r)$ в промежутке $0 \leq r \leq r^0$. Таким образом, наше утверждение доказано и для случая $l > n$.

Применяя теперь результаты, полученные нами в п. 1, мы заключаем, что искомая четная функция $u(x, y, t)$ однозначно определена во всем шаре

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leq r^{0^2}.$$

В частности, отсюда следует, что при $t = 0$ начальные значения $u(x, y, 0)$ однозначно определены в сфере

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq r^{0^2} \quad (10)$$

начального m -мерного пространства R_m , если они заданы в «произведении» области G пространства y на шаровую область

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2$$

пространства R_m .

Таким образом, мы получаем следующий замечательный результат:

Если для четного относительно t решения ультрагиперболического уравнения (8) заданы начальные значения u в области пространства x, y , для которой переменные y заполняют некоторую область G , а переменные x сколь угодно малый шар

$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2$ (ср. п. 1), то этим самым начальные значения u определяются однозначно всюду во всем шаре

$$\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq r^{0^2},$$

причем значение r^0 мы находим указанным выше способом.

Тот же результат имеет место и для решений, не являющихся четными функциями t .

Отсюда следует невозможность произвольного задания начальных значений $u(x, y, 0)$.

Если, например, для дифференциального уравнения

$$u_{yy_1} + u_{yy_2} - u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad (11)$$

начальные значения $u(y_1, y_2, x, 0)$ заданы в круге G : $(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \leq a^2$ плоскости y и промежутке $|x - x^0| \leq \varepsilon$, т. е. внутри бесконечно тонкого цилиндрического диска (пространства y_1, y_2, x), параллельного плоскости y_1, y_2 , то этим самым значения начальной функции $u(y_1, y_2, x, 0)$ определены также во всем двойном конусе

$$\sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2} + |x - x^0| \leq a.$$

Если в соответствии с этим мы в волновом уравнении переставим между собой пространственную переменную u и переменную времени t , записав это уравнение в форме

$$u_{yy} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{tt} = 0, \quad (12)$$

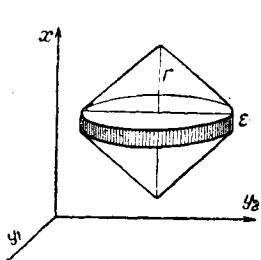
и зададим функцию $u(y, x_1, x_2, t)$ при $t = 0$ внутри бесконечно тонкого цилиндра, параллельного оси y :

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq \varepsilon^2, \quad |y - y^0| \leq a,$$

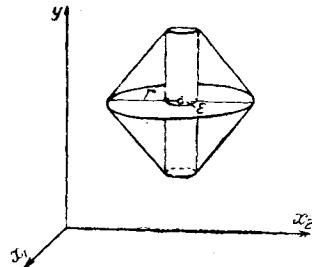
то этим самым начальная функция $u(y, x_1, x_2, 0)$ однозначно определяется во всем двойном конусе

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + |y - y^0| \leq a.$$

Мы видим, таким образом, что для волнового уравнения невозможно произвольно задать начальные значения на плоскости непространственного типа.



Черт. 41.



Черт. 42.

Если для общего дифференциального уравнения (8) начальная функция $u(y_1, y_2, \dots, y_l; x_1, \dots, x_m, 0)$ задана в области, определенной условиями

$$\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2 \leq a^2, \quad \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \leq \varepsilon^2,$$

то она вместе с тем однозначно определена во всей области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} \leq a,$$

а соответствующее решение $u(x, y, t)$ определяется однозначно в области

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2} + t^2 \leq a.$$

Для уравнения Лапласа ($l = 0$)

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_m x_m} + u_{tt} = 0 \quad (13)$$

это означает следующее:

Если для четного относительно t решения задана начальная функция $u(x, 0)$ внутри сколь угодно малого шара

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq \epsilon^2,$$

то этими данными функция $u(x, t)$ однозначно определена во всей области

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 + t^2 \leq a^2,$$

так что, в частности, начальная функция $u(x, 0)$ однозначно определена в области

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq a^2.$$

Этот результат остается в силе и в том случае, если отбросить условие четности функции $u(x, y, t)$.

Эта последняя теорема непосредственно вытекает из аналитичности рассматриваемых решений, которая нами была в свое время доказана. Для гиперболических же и ультрагиперболических дифференциальных уравнений взаимная связь между значениями решения на начальной плоскости не может быть так просто объяснена; начальные функции в этом случае не должны быть обязательно аналитическими функциями. Таким образом, рассматривая значения решений таких дифференциальных уравнений на какой-нибудь плоскости, мы встречаемся с замечательным явлением существования таких неаналитических функций, для которых значения функции внутри некоторой бесконечно тонкой по одному направлению области однозначно определяют поведение функции в существенно более широкой области рассматриваемого пространства¹⁾.

§ 9. Решение задачи Коши методом Адамара²⁾

При изложенных выше методах решения задачи Коши для случая постоянных коэффициентов понятие характеристик не играло (за исключением примера, приведенного в § 2, п. 8) никакой роли в самом процессе нахождения решения. Лишь при определении областей зависимости нам приходилось в неявной форме опираться на понятие характеристики. В противоположность этому в методе Адамара, который мы теперь кратко изложим независимо от предыдущего, *характеристические многообразия* вообще и *характеристический коноид*, в частности, образуют основной исходный пункт.

¹⁾ См. по этому вопросу статью Ф. Джона (F. John), *Math. Ann.*, т. 111, стр. 542, в которой для случая уравнения Дарбу с помощью другого метода получены более полные результаты.

²⁾ Для предельного случая задачи излучения этот метод несколько упрощается. Мы рассматриваем этот случай в § 10.