Если для четного относительно t решения задана начальная функция $u(x, 0)$ внутри сколь угодно малого шара

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

то этими данными функция $u(x, t)$ однозначно определена во всей области

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + t^2 \leqslant a^2,$$

так что, в частности, начальная функция $u(x, 0)$ однозначно определена в области

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant a^2.$$

Этот результат остается в силе и в том случае, если отбросить условие четности функции $u(x, y, t)$.

Эта последняя теорема непосредственно вытекает из аналитичности рассматриваемых решений, которая нами была в свое время доказана. Для гиперболических же и ультрагиперболических дифференциальных уравнений взаимная связь между значениями решения на начальной плоскости не может быть так просто объяснена; начальные функции в этом случае не должны быть обязательно аналитическими функциями. Таким образом, рассматривая значения решений таких дифференциальных уравнений на какой-нибудь плоскости, мы встречаемся с замечательным явлением существования таких неаналитических функций, для которых значения функции внутри некоторой бесконечно тонкой по одному направлению области однозначно определяют поведение функции в существенно более широкой области рассматриваемого пространства [1]).

§ 9. Решение задачи Коши методом Адамара [2])

При изложенных выше методах решения задачи Коши для случая постоянных коэффициентов понятие характеристик не играло (за исключением примера, приведенного в § 2, п. 8) никакой роли в самом процессе нахождения решения. Лишь при определении областей зависимости нам приходилось в неявной форме опираться на понятие характеристики. В противоположность этому в методе Адамара, который мы теперь кратко изложим независимо от предыдущего, *характеристические многообразия* вообще и *характеристический коноид*, в частности, образуют основной исходный пункт.

---

[1]) См. по этому вопросу статью Ф. Джона (F. John), *Math. Ann.*, т. 111, стр. 542, в которой для случая уравнения Дарбу с помощью другого метода получены более полные результаты.

[2]) Для предельного случая задачи излучения этот метод несколько упрощается. Мы рассматриваем этот случай в § 10.

Метод Адамара представляет собой углубление и далеко идущее обобщение метода Римана, рассмотренного нами в гл. V, § 4 для случая $n = 2$, и может быть также применен к любым линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами; метод Адамара может быть также распространен на системы дифференциальных уравнений и задачи высших порядков. Так как подробное проведение метода Адамара в общем случае потребовало бы слишком сложных вычислений, мы ограничимся частным случаем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при $n = 3$ и $n = 4$; однако, проводя подробно вычисления лишь для этого частного случая, мы рассмотрим существо этого метода с достаточной общностью. За подробностями отсылаем к книге Адамара [1]).

1. Предварительные замечания. Основное решение. Общий метод. При интегрировании дифференциального уравнения

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y) \tag{1}$$

с двумя независимыми переменными основную роль играла *функция Римана* (см. гл. V, § 4).

Адамар заметил, что понятие функции Римана тесно связано с понятием *основного решения*, введенного раньше только для эллиптических дифференциальных уравнений (см. гл. IV, § 1). Для уравнения Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ мы в качестве основного решения, соответствующего точке ξ, η, рассматривали решение, которое может быть представлено в виде $u = \log r + \varphi$, где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, а φ — регулярная функция. Для такого решения геометрическое место особых точек или «характеристический конус» задается уравнением $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = 0$ и состоит, таким образом, только из одной точки $x = \xi$ и $y = \eta$. Для гиперболического же дифференциального уравнения (1) *характеристическим конусом* является пара прямых $(x-\xi)(y-\eta) = 0$, и мы можем поэтому ожидать, что в этом случае роль основного решения будет играть решение вида

$$V = W \log \Gamma + \varphi, \tag{2}$$

где W и φ — регулярные функции, $\Gamma = (x-\xi)(y-\eta)$, причем $\sqrt{\Gamma} = r$ является *геодезическим расстоянием* точки (x, y) от точки (ξ, η), если положить в основу мероопределения соответствующий $L[u]$ линейный элемент $ds^2 = dx\,dy$. (В § 2 мы видели, что особенность этого вида может иметь место только на характеристическом многообразии.) Подставляя выражение V в однородное дифференциальное уравнение (1), мы получим:

$$0 = L(W)\log\Gamma + \frac{1}{x-\xi}(W_y + aW) + \frac{1}{y-\eta}(W_x + bW) + \\ + \textit{регулярная функция}.$$

---

[1]) См. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles néaires hyperboliques, Париж, 1932, а также английское издание.

Отсюда непосредственно следует, что функция $W(x, y; \xi, \eta)$ должна удовлетворять уравнению $L[W]=0$ и условиям: $W_y+aW=0$ при $x=\xi$ и $W_x+bW=0$ при $y=\eta$. Другими словами, *коэффициент W в «основном решении» (2) должен в точности совпадать с функцией Римана дифференциального выражения L, определенной нами в гл. V.*

Мы можем поэтому предполагать, что и в случае $n>2$ решение, обладающее такого рода особенностями на характеристическом конусе или характеристическом коноиде, будет играть важную роль для дифференциального уравнения и должно быть рассматриваемо как основное решение.

В случае дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[u]=u_{tt}-\Delta u-cu=0, \tag{3}$$

с неизвестной функцией $u(x_1, \ldots, x_m, t)$, мы находим такое основное решение, отыскивая частные решения вида $v=v(r)$, зависящие только от

$$r=\sqrt{\Gamma}=\sqrt{(t-\tau)^2-\sum_{\nu=1}^{m}(x_\nu-\xi_\nu)^2}. \tag{4}$$

Функция $v(r)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$v''+\frac{m}{r}v'-cv=0. \tag{5}$$

Решения этого дифференциального уравнения мы можем получить рекуррентным путем, ибо с помощью решения v уравнения (5) для некоторого значения числа переменных m мы можем составить функцию $w=\frac{v'}{r}$, удовлетворяющую соответствующему дифференциальному уравнению

$$w''+\frac{m+2}{r}w'-cw=0$$

для индекса $m+2$.

При $m=0$ мы получаем в качестве решений нашего дифференциального уравнения $v=\operatorname{sh}(\sqrt{c}\,r)$ и $v=\operatorname{ch}(\sqrt{c}\,r)$; точно так же при $n=2$, $m=1$ мы получаем решения $v=J_0(\sqrt{-c}\,r)$ и $v=N_0(\sqrt{-c}\,r)$, где [1])

$$N_0(\sqrt{-c}\,r)=\frac{2}{\pi}J_0(\sqrt{-c}\,r)\log r+R$$

означает функцию Неймана нулевого порядка, а R — регулярную функцию. Из этих решений только $N_0(\sqrt{-c}\,r)$ дает нам основное решение при $m=1$, ибо остальные решения регулярны при $r=0$. Отсюда мы получаем, далее, при $m=2$, $n=3$ в качестве основного

[1]) См. Курант-Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VII, стр. 477.

решения, имеющего на характеристическом конусе особенность требуемого вида, функцию

$$V=\frac{1}{r}\operatorname{ch}(\sqrt{c}\,r), \tag{6}$$

а при $m=3$, $n=4$ функцию

$$V=\frac{J_0(\sqrt{-c}\,r)}{r^2}+\frac{1}{r}\sqrt{-c}\,J_0'(\sqrt{-c}\,r)\log r+R_1, \tag{7}$$

где R_1 — регулярная функция.

При этом бесселева функция

$$J_0(\sqrt{-c}\,r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{c}{4}\right)^{\nu}\frac{r^{2\nu}}{(\nu!)^2}$$

и $\frac{\sqrt{-c}}{r}J_0'(\sqrt{-c}\,r)$ являются всюду регулярными функциями.

Легко убедиться, что этим путем мы получаем вообще при нечетном $m+1=n=2\nu+1$ решения вида

$$V=\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{8}$$

а при четном $m+1=n=2\nu$ решения вида

$$V=\frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}+W\log\Gamma, \tag{9}$$

где U и W обозначают регулярные функции, причем $L[W]=0$. Эти решения (8) и (9) мы назовем *основными решениями* дифференциального уравнения (3).

Всякое решение, получающееся путем сложения решений (8) или (9) с каким-нибудь регулярным решением, мы будем также называть основным решением.

Рассмотрим теперь общее дифференциальное уравнение

$$L[u]=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_{ik}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_i+cu=0 \tag{10}$$

с переменными коэффициентами. Мы называем основным решением такого дифференциального уравнения решение, обладающее следующими особенностями. Введя мероопределение с помощью линейного элемента

$$ds^2=\sum_{i,k}A_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

где A_{ik} обозначают элементы матрицы, обратной относительно матрицы (a_{ik}), мы рассматриваем *геодезическое расстояние* точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$ от точки $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ в смысле этого мероопределения. Обозначим это геодезическое расстояние через

$$r(x,\xi)=\sqrt{\Gamma}. \tag{11}$$

Согласно гл. II, § 9 расстояние r и его квадрат $\Gamma = r^2$ удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$\sum_{i,k} A_{ik} r_i r_k = 1 \tag{12}$$

и

$$\sum_{i,k} A_{ik} \Gamma_i \Gamma_k = 4\Gamma. \tag{13}$$

Назовем теперь основным решением дифференциального уравнения (10) *решение, которое при нечетном* $n = 2\nu + 1 > 1$ *имеет вид*

$$V = \frac{U(x, \xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + \ldots, \tag{14}$$

где $U(x, \xi)$ — *регулярная всюду функция от* ξ, *включая точку* $x = \xi$, *а при четном* $n = 2\nu$

$$V = \frac{U(x, \xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + W \log \Gamma + \ldots, \tag{15}$$

где U *и* W *регулярны всюду, включая* $x = \xi$. *Многоточия здесь обозначают регулярные решения дифференциального уравнения.* Можно доказать, что основные решения этого вида всегда существуют и что

$$L[W] = 0. \tag{16}$$

Основные решения определены с точностью до множителя, не зависящего от x. Мы выбираем этот множитель так, чтобы выполнялось условие $U|_{x=\xi} = 1$. Не проводя здесь доказательства, укажем лишь, что в книге Адамара дается способ построения основных решений, опирающийся на соотношения, имеющие место вдоль характеристических коноидов и рассмотренные нами в § 2.

Самым важным формальным вспомогательным средством для составления решения нашего дифференциального уравнения

$$L[u] = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \tag{17}$$

является *формула Грина*, выражающая зависимость между дифференциальным выражением $L[u]$ и *сопряженным дифференциальным выражением*

$$M[v] = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv. \tag{18}$$

Сопряженное с $L[u]$ дифференциальное выражение $M[v]$ характеризуется тем свойством, что для любой пары функций u и v выражение

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k - u \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} v) + b_i uv\right) \tag{19}$$

является выражением *типа дивергенции*. Если при этом

$$b_i = \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}, \quad \text{то} \quad M[u] = L[u]$$

и L называется самосопряженным дифференциальным выражением.

Формула Грина для области G, ограниченной поверхностью $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ с направляющими косинусами нормалей

$$\frac{\partial x_i}{\partial \nu}=\frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum_i \varphi_i^2}},$$

выражается тогда просто интегральной теоремой Гаусса

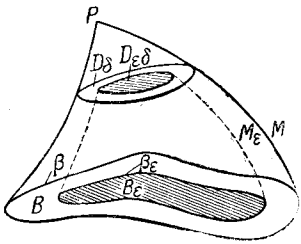
$$\int\limits_G \ldots \int (vL[u]-uM[v])\,dx_1 \ldots dx_n=$$

$$=\int\limits_O \ldots \int \sum_i \left[v\sum_k a_{ik}u_k - u\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik}v)+b_i uv\right]\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\,do, \qquad (20)$$

где do обозначает элемент поверхности границы O области G.

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши для дифференциального уравнения (17). Пусть вдоль начальной поверхности C, заданной уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$, выполняется условие $\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k>0$, так что эта поверхность является поверхностью пространственного типа. Зададим вдоль C значения u и значения производных для некоторого решения u дифференциального уравнения $L[u]=f$. Требуется найти значение функции $u(P)$ в произвольной точке P некоторой области, примыкающей к C с одной стороны.

Предположим, что выходящий из точки P интегральный коноид характеристического уравнения, образуемый всеми характеристическими лучами уравнения (17), регулярен вплоть до начальной поверхности C и вырезает из нее $n-1$-мерную область B с границей β, так что боковая поверхность M коноида вместе с областью B ограничивают в n-мерном пространстве некоторую n-мерную конусообразную область G. В соответствии с рассмотрениями § 4 мы увидим, что область B является *областью зависимости* для точки P и что значение $u(P)$ можно однозначно выразить через начальные значения в области B.



Черт. 43.

Чтобы достигнуть этого, мы применим формулу Грина (20) к области G, принимая в качестве v основное решение V сопряженного уравнения $M[v]=0$, а в качестве u рассматриваемое нами решение уравнения $L[u]=f$. При этом, однако, в силу особенности функции V получатся расходящиеся интегралы. Чтобы обойти эту трудность, мы поступаем, согласно Адамару, следующим образом.

Отсечем сначала от вершины P конусообразной области G сколь угодно малую область, проведя, например, плоскость, сколь угодно близкую к точке P. Обозначим через $D=D_\delta$ основание этой сколь угодно малой конусообразной области, зависящее от параметра δ,

и пусть при $\delta \to 0$ площадка D_δ переходит в точку P. Фиксируем δ. Далее, заменим боковую поверхность M коноида аппроксимирующей поверхностью M_ε, стремящейся при $\varepsilon \to 0$ к M изнутри, и пусть поверхность M_ε задается уравнением $\varphi(x, \varepsilon) = 0$, где φ неограниченное число раз дифференцируема по ε.

Поверхность M_ε вырезает из C начальную поверхность B_ε с границей β_ε, так что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon = B$; пусть поверхности M_ε, B_ε и соответствующая часть $D_{\varepsilon,\delta}$ области D_δ ограничивают область $G_{\varepsilon,\delta}$. Применим теперь формулу Грина к области $G_{\varepsilon,\delta}$. При фиксированном δ и нечетном $n = 2\nu + 1$ входящие в эту формулу члены имеют вид:

$$B(\varepsilon) = b + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_{\frac{n-3}{2}}\varepsilon^{\frac{n-3}{2}}\right) + (\varepsilon),$$

где (ε) обозначает выражение, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, а величины b, $b_0, \ldots$ не зависят от ε. При $\varepsilon \to 0$ это выражение $B(\varepsilon)$ стремится к ∞. Обозначим через $b = {}^*B(\varepsilon)$ конечную часть $B(\varepsilon)$. При нечетном n величина b обладает тем свойством, что она остается инвариантной при всех преобразованиях параметра ε, ибо полуцелый показатель степени у множителя, стоящего перед скобкой, исключает возможность появления внутри этой скобки после преобразования членов, которые после деления на $\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ оставались бы конечными и стремились бы к отличному от нуля пределу при $\varepsilon \to 0$. Применяя формулу Грина (20) к области $G_{\varepsilon\delta}$, получим уравнение вида

$$\sum_k B^{(k)}(\varepsilon) = \sum b^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(\sum_k b_0^{(k)} + \varepsilon \sum_k b_1^{(k)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{n-3}{2}} \sum_k b_{\frac{n-3}{2}}^{(k)}\right) + (\varepsilon) = 0, \tag{21}$$

где $\sum b^{(k)}$ обозначает сумму конечных членов трех различных составных частей формулы Грина (20), происходящих от боковой поверхности, нижнего и верхнего оснований и самой области $G_{\varepsilon\delta}$. Заставляя ε стремиться к нулю, мы получаем непосредственно соотношение

$$\sum_k b^{(k)} = 0, \tag{22}$$

т. е. *сумма конечных членов выражения* (21) *равна нулю.*

Уравнение (22) представляет собой некоторое соотношение, которому удовлетворяет функция u. Если мы теперь заставим δ стремиться к нулю, так что область $G_{\varepsilon\delta}$ будет стремиться к области G, то соотношение (22) перейдет при $\delta \to 0$ в искомую формулу для u, а именно, помимо объемного интеграла ${}^*\int\limits_G \ldots \int fV\,dx_1 \ldots dx_n$ функция u вы-

ражается посредством интегралов, взятых по B и β и содержащих функцию U и заданные на B начальные значения u и ее производных до порядка $\frac{n-3}{2}$ включительно. Существенным при этом методе является, далее, тот факт, что остающаяся конечной часть интегральных выражений типа интегралов, входящих в формулу Грина, может быть легко вычислена в инвариантной форме для каждой составной части, так что для получения окончательного результата достаточно просуммировать эти отдельные составные части.

Если $n=2\nu$, то наши рассуждения в принципе сохраняются. Каждый член нашей формулы Грина, примененной к области $G_{\varepsilon\delta}$, имеет в этом случае, как нетрудно видеть, форму

$$B(\varepsilon)=a\log\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(a_0+a_1\varepsilon+\ldots+a_{\frac{n-2}{2}}\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\right)+(\varepsilon). \quad (23)$$

Однако, конечная часть $a_{\frac{n-2}{2}}$ этого выражения уже не является инвариантной относительно преобразований ε [1]). Поэтому, хотя сумма конечных членов должна равняться нулю также и в этом случае, однако выделение этих членов не может иметь здесь существенного значения. Поэтому, в случае четного n Адамар применяет метод спуска, исходя из ближайшего большего нечетного n.

Однако, можно и в случае четного n достигнуть непосредственно цели, рассматривая вместо конечных членов «*логарифмические члены*», т. е. коэффициенты $a={}_*B(\varepsilon)$. Логарифмические члены инвариантны относительно преобразований ε. Из формулы (23) непосредственно следует формула

$$\sum a^{(k)}=0, \quad (24)$$

где $\sum a^{(k)}$ есть сумма логарифмических членов различных составных частей формулы Грина. Оказывается, что эта формула дает в случае четного n искомый результат. Мы получаем снова, что $u=u(P)$ может быть выражена с помощью интеграла ${}_*\int\ldots\int\limits_G fV\,dx_1\ldots dx_n$ и интегралов, взятых по B и β и содержащих функции U и W, а также начальные данные и их производные до производных порядка $\frac{n-2}{2}$ [2]).

Из этих формул получается существенно важный результат в отношении *принципа Гюйгенса*. Мы в свое время формулировали этот

---

[1]) Например, выражение $b+\frac{a}{\varepsilon}$ с конечной частью b переходит при преобразовании $\varepsilon=\eta(1+\eta)$ в $b+\frac{a}{\eta}(1-\eta+\ldots)$, т. е. в выражение, имеющее конечную часть $b-a$.

[2]) На возможность применения логарифмических членов в случае четного n обратил внимание Адамар. См. также Фридрихс, *Gött. Nachr.*, 1927, стр. 172.

принцип в виде требования, чтобы значения $u(P)$ зависели только от начальных данных вдоль края β области зависимости B (а в случае неоднородного уравнения также и от данных на боковой поверхности характеристического коноида) и не зависели от начальных данных внутри области зависимости B.

Оказывается, что в случае четного n входящие в выражение для $u(P)$ интегралы, взятые по основанию B и области G, не содержат U, а зависят только от W, тогда как U входит только в интегралы, взятые по границе β области B, а в случае неоднородного уравнения также и в интегралы, взятые по боковой поверхности коноида; отсюда следует, что принцип Гюйгенса имеет место тогда и только тогда, когда логарифмическая часть W основного решения тождественно обращается в нуль. При нечетном n из формул Адамара следует, что принцип Гюйгенса никогда не может иметь места.

Итак, *принцип Гюйгенса никогда не имеет места в случае нечетного* $n>1$; *в случае четного* $n=m+1$ *принцип Гюйгенса имеет место тогда и только тогда, когда логарифмическая часть* W *основного решения тождественно обращается в нуль.* Отсюда следует, что в случае уравнения (3) с постоянными коэффициентами в силу формул (8) и (9) принцип Гюйгенса имеет место только для чистых волновых уравнений, т. е. при $c=0$ и при нечетном числе измерений пространства; мы установили этот факт в явной форме уже раньше в § 5.

Адамар высказал интересное *предположение* [см. недавно опубликованную работу M. Matchissen'a, Acta Math., 1940. (*Прим. редактора*).], что по существу волновые уравнения в случае четного n являются единственными уравнениями, для которых имеет место принцип Гюйгенса; это значит, что всякое дифференциальное уравнение, для которого имеет место принцип Гюйгенса, может быть получено из волнового уравнения путем преобразования независимых переменных, умножения дифференциального уравнения на некоторый множитель и введения вместо u в качестве неизвестной функции новой функции $v=g(x_1,\ldots,x_n)\,u$.

Наконец, заметим, что результат Адамара не только дает однозначно определенные формулы решения, но и допускает очень простую последующую проверку решений.

Мы ограничимся тем, что проведем этот метод в случае $n=3$ и $n=4$ для дифференциального уравнения (3) с начальной поверхностью $t=0$, причем мы остановимся на всех моментах, существенно важных с точки зрения техники вычислений.

2. **Общее волновое уравнение для случая, когда число измерений пространства** $m=2$. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$L[u]=u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-cu=f(x,y,t) \tag{25}$$

с начальными условиями

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \qquad u_t(x,y,0)=\psi(x,y). \tag{26}$$

Мы предполагаем при этом, что функции f и ψ — дважды, а функция φ — трижды непрерывно дифференцируемы.

Так как $n = m + 1 = 3$ нечетное число, то самосопряженное уравнение $u_{tt} - \Delta u - cu = 0$ имеет основные решения вида

$$V(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{U}{\sqrt{\Gamma}}, \tag{27}$$

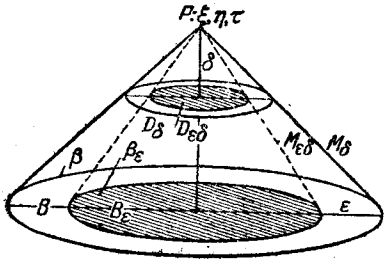
где
$$r = \sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)}$$

обозначает геодезическое расстояние точки x, y, t от точки ξ, η, τ. Согласно п. 1 имеется основное решение вида

$$V = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \text{так что} \quad U = \operatorname{ch}(\sqrt{c\Gamma}). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь для фиксированной точки $P(\xi, \eta, \tau)$ пространственную область G, ограниченную характеристическим конусом $\Gamma = 0$ и кругом B, вырезаемым конусом Γ из плоскости x, y, т. е. область G, заданную условиями

$$\Gamma > 0, \quad 0 < t < \tau.$$



Черт. 44.

Отсечем вершину этой конической области с помощью секущей плоскости $t = \tau - \delta$, так что δ — расстояние вершины P от секущей плоскости. Получается усеченный конус G_δ, определяемый условиями

$$\Gamma > 0, \quad 0 < t < \tau - \delta.$$

В качестве аппроксимирующей области $G_{\varepsilon\delta}$ мы берем усеченный конус

$$0 < t < \tau - \delta; \ (1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 > 0, \text{ где } 0 < \varepsilon < 1.$$

Нижним основанием B_ε усеченного конуса $G_{\varepsilon\delta}$ является круг

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < (1-\varepsilon)^2 \tau^2, \quad t = 0.$$

Верхним основанием $D_{\varepsilon\delta}$ является круг

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < (1-\varepsilon)^2 \delta^2, \quad t = \tau - \delta.$$

Боковой поверхностью $M_{\varepsilon\delta}$ области $G_{\varepsilon\delta}$ является поверхность конуса

$$(1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 = 0.$$

При предельном переходе $\varepsilon \to 0$ область $G_{\varepsilon\delta}$ переходит в усеченный конус G_δ с боковой поверхностью M_δ, нижним основанием B и верхним основанием D_δ. Наконец, при вторичном предельном переходе $\delta \to 0$ из G_δ получается первоначальный конус G.

Пусть, далее, β означает границу круга B, а β_ε — границу круга B_ε.

Обозначим теперь через u решение уравнения $L[u]=f$, удовлетворяющее начальным условиям (26). Проинтегрируем по области $G_{\varepsilon\delta}$ выражение

$$VL[u]-uL[V]=Vf=(Vu_t)_t-(Vu_x)_x-(Vu_y)_y-$$
$$-(uV_t)_t+(uV_x)_x+(uV_y)_y. \tag{29}$$

Мы получим следующее соотношение:

$$0=-\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt+\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}(Vu_t-uV_t)\,dx\,dy-$$
$$-\iint\limits_{B_\varepsilon}(V\psi-\varphi V_t)\,dx\,dy+\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}}\{V(u_t t_\nu-u_x x_\nu-u_y y_\nu)-$$
$$-u(V_t t_\nu-V_x x_\nu-V_y y_\nu)\}\,do. \tag{30}$$

При этом x_ν, y_ν, t_ν обозначают направляющие косинусы внешних нормалей к поверхности $M_{\varepsilon\delta}$, а комбинация $u_t\,t_\nu-u_x\,x_\nu-u_y\,y_\nu$ равняется «трансверсальной» производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ вдоль поверхности $M_{\varepsilon\delta}$. Наша задача состоит теперь в нахождении *конечных членов* $b^{(k)}$ четырех интегралов, стоящих в правой части, т. е. членов, остающихся конечными при $\varepsilon\to 0$. Если мы обозначим через ${}^*\iint$ или ${}^*\iiint$ конечную часть интеграла, рассмотренного в п. 1 типа, то из уравнения (30) получится соотношение

$${}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt={}^*\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}(Vu_t-uV_t)\,dx\,dy-{}^*\iint\limits_{B_\varepsilon}(V\psi-\varphi V_t)\,dx\,dy+$$
$$+{}^*\iint\{V(u_t t_\nu-u_x x_\nu-u_y y_\nu-u(V_t t_\nu-V_x x_\nu-V_y y_\nu)\}\,do. \tag{31}$$

Мы сейчас увидим, что из этого соотношения непосредственно получается искомое решение рассматриваемой задачи Коши.

Первый интеграл формулы (30) сходится при $\varepsilon\to 0$ к несобственному интегралу, взятому по области G_δ; в самом деле, порядок обращения в бесконечность функции $V=\frac{U}{\sqrt{\Gamma}}$ на каждом сечении поверхности конуса с плоскостью, параллельной плоскости x, y, равняется порядку обращения в бесконечность функции

$$\frac{1}{\sqrt{\tau-t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}}$$

при приближении точки (x, y, t) к некоторой точке, лежащей на конической поверхности M. Поэтому

$${}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dt=\iiint\limits_{G_\delta} Vf\,dx\,dy\,dt. \tag{32}$$

Чтобы вычислить остальные члены формулы (31), введем вместо x, y, t новые переменные интеграции σ, μ, ϑ, полагая

$$x = \xi + \sigma(1-\mu)\cos\vartheta, \qquad y = \eta + \sigma(1-\mu)\sin\vartheta, \qquad t = \tau - \sigma.$$

Тогда область $G_{\varepsilon\delta}$ определяется условиями: $\varepsilon \leqslant \mu \leqslant 1$; $\delta \leqslant \sigma \leqslant \tau$; $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. При этом $\mu = \varepsilon$ вдоль $M_{\varepsilon\delta}$, $\sigma = \delta$ вдоль $D_{\varepsilon\delta}$ и $\sigma = \tau$ вдоль B_ε.

Исследуем сначала интеграл, взятый по поверхности $M_{\varepsilon\delta}$. На этой поверхности имеем:

$$t_\nu\, do = (1-\varepsilon)^2 \sigma\, d\sigma\, d\vartheta; \qquad x_\nu\, do = (1-\varepsilon)\sigma\cos\vartheta\, d\sigma\, d\vartheta;$$
$$y_\nu\, do = (1-\varepsilon)\sigma\sin\vartheta\, d\sigma\, d\vartheta.$$

Далее,

$$u_\sigma = u_x(1-\varepsilon)\cos\vartheta + u_y(1-\varepsilon)\sin\vartheta - u_t;$$
$$u_\mu = -u_x\sigma\cos\vartheta - u_y\sigma\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu)\, do = V(1-\varepsilon)\{\varepsilon(2-\varepsilon)u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)u_\sigma\}\, d\sigma\, d\vartheta$$

и аналогично

$$u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\, do = u(1-\varepsilon)\{\varepsilon(2-\varepsilon)V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)V_\sigma\}\, d\sigma\, d\vartheta.$$

Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, то мы можем V представить в виде $V = \dfrac{R(\sigma,\mu,\vartheta)}{\sqrt{\mu}}$, где $R(\sigma,\mu,\vartheta)$ обозначает функцию, непрерывную и непрерывно дифференцируемую всюду в области G_δ.

Подставив это выражение для V в последние две формулы, мы получим, что, так как $\mu = \varepsilon$, наш интеграл имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \{V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu) - u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\}\, do =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_\delta^\tau d\sigma \int\limits_0^{2\pi} R(\sigma,\vartheta)\, d\vartheta + (\varepsilon), \qquad (33)$$

где $R(\sigma, \vartheta)$ снова обозначает непрерывную функцию от σ и ϑ, а (ε) стремится к нулю вместе с ε. Отсюда следует, что *интеграл, взятый по $M_{\delta\varepsilon}$, не содержит члена, остающегося конечным и отличным от нуля при* $\varepsilon \to 0$.

Остальные два интеграла из формулы (31) рассмотрим одновременно, заменяя их интегралом $J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (Vu_t - uV_t)\, dx\, dy$, взятым по пересечении области $G_{\varepsilon\delta}$ с какой-нибудь плоскостью $t = \tau - \sigma$. Представим теперь интеграл $J_{\varepsilon\sigma}$ в следующей форме:

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{Uu_t - uU_t}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{uU - \bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\, dx\, dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\, dx\, dy,$$

где $\overline{u}$ и $\overline{U}$ обозначают значения функций u и U вдоль границы β_σ круга D_σ; точнее, если $u(x, y, t) = u(\sigma, \mu, \vartheta)$, то мы обозначаем через $\overline{u}(x, y, t)$ значение $u(\sigma, 0, \vartheta)$; точно так же $\overline{U} = U(\sigma, 0, \vartheta)$; отсюда следует, что функция $\frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\Gamma}$ ограничена в D_σ и непрерывна всюду за исключением точки $\mu = 1$.

Из предыдущего непосредственно следует, что первые два интеграла в правой части предыдущей формулы стремятся при $\varepsilon \to 0$ к конечным пределам. Остается исследовать третий интеграл. Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, $\Gamma_t = -2\sigma$, а $dx\,dy = \sigma^2(1-\mu)\,d\mu\,d\vartheta$, то мы получаем:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\,dx\,dy = -\int\limits_0^{2\pi}\overline{u}\,\overline{U}\,d\vartheta\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)\,d\mu}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}.$$

Полагая $1-\mu = \lambda$, мы приведем внутренний интеграл к виду

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{\lambda\,d\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right]_0^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{2}\,{}^*\!\iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}}\frac{\overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\overline{u}\,\overline{U}\,d\vartheta = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{U}\,ds.$$

Таким образом,

$$^*J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_\sigma}\frac{Uu_t - uU_t}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\sigma}\frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t\,dx\,dy + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{U}\,ds. \qquad (34)$$

При $\sigma = \delta$ имеем:

$$\frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\delta(1-\mu)}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{2-\mu}}\,d\mu\,d\vartheta; \quad \frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma^3}}\Gamma_t = -\frac{2(1-\mu)}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}\,d\mu\,d\vartheta.$$

Так как в первом интеграле числитель $Uu_t - uU_t$ остается ограниченным, а во втором интеграле отношение $\frac{uU - \overline{u}\,\overline{U}}{\mu}$ стремится к нулю вместе с δ [1]), то оба первых интеграла, взятых по D_δ, стремятся вместе с δ к нулю. Мы получаем, таким образом,

$$\lim_{\delta\to 0}\,{}^*\!\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}}(Vu_t - uV_t)\,dx\,dy = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{\beta_\delta}\overline{u}\,\overline{U}\,ds = 2\pi u(\xi, \eta, \tau).$$

---

[1]) В самом деле, расстояние точки $(x, y, t) = (\sigma, \mu, \vartheta)$ от соответствующей точки границы $(\sigma, 0, \vartheta)$ равняется $\sigma\mu$. Поэтому $|uU - \overline{u}\,\overline{U}| \leq C\delta\mu$, так как функция uU непрерывно дифференцируема.

Принимая во внимание полученные нами результаты, мы видим, что формула (31) дает нам теперь при переходе к пределу $\delta \to 0$ следующую окончательную формулу:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G Vf\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi\tau} \int\limits_\beta \bar{\varphi}\bar{U}\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{U\psi - U_t\varphi}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_B \frac{U\varphi - \bar{U}\bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Эта формула выражает, таким образом, интересующее нас решение уравнения (25) через функции f, φ и ψ.

Так как в силу уравнения (28) функция U имеет вид $U = \operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}$, то $\bar{U} = U(0) = 1$, и мы можем формулу (35) записать в следующем явном виде:

$$\left.\begin{aligned} u(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G \frac{\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi\tau} \int\limits_\beta \bar{\varphi}\,ds + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\psi\sqrt{\Gamma}\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma} + \varphi\sqrt{c}\,\tau\operatorname{sh}\sqrt{c\Gamma}}{\Gamma}\,dx\,dy + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_B \frac{\varphi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma} - \bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma^3}}\,\Gamma_t\,dx\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (35')$$

Простым преобразованием формула (35′) приводится к виду

$$u = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_G \frac{\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\psi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \\ + \frac{\partial}{\partial\tau}\,\frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \frac{\varphi\operatorname{ch}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy. \quad (35'')$$

Эта формула согласуется с результатом § 5, п. 7 в частном случае $\varphi = f = 0$ [ср. § 5, п. 7, формулы (79) и (80) при $n = 2$].

3. Общее волновое уравнение для случая $m = 3$. В задаче Коши для дифференциального уравнения

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - cu = f(x, y, z, t) \quad (36)$$

с начальными условиями $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$; $u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$ мы предположим, что f имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а φ и ψ — непрерывные производные первого порядка.

Основное решение соответствующего, снова самосопряженного, уравнения $L[u] = 0$ содержит в этом случае, так как $n = m + 1 = 4$ — четное, не считая регулярной части, выражение

$$V(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{U}{\Gamma} + W\log\Gamma, \quad (37)$$

где

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2,$$

а согласно п. 1

$$U = J_0(\sqrt{-c\Gamma}); \quad W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{\Gamma}}\, J_0'(\sqrt{-c\Gamma}). \tag{38}$$

При этом W удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[W]=0$. Само основное решение имеет в этом случае вид

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-c}\,\frac{N_1(\sqrt{-c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}},$$

где N_1 обозначает функцию Неймана первого порядка (см. т. I, гл. VII).

Поступая совершенно аналогично предыдущему, мы сначала определяем аппроксимирующую область $G_{\varepsilon\delta}$ конической области G, заданной условиями $\Gamma \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Если ввести вместо x, y, z, t новые переменные σ, μ; α, β, γ с помощью уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \sigma(1-\mu)\alpha; \quad y = \eta + \sigma(1-\mu)\beta; \\ z &= \zeta + \sigma(1-\mu)\gamma; \quad t = \tau - \sigma, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где α, β, γ обозначают параметры на единичной сфере $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, то область $G_{\varepsilon\delta}$ определяется неравенствами $\varepsilon \leqslant \mu \leqslant 1$; $\delta \leqslant \sigma \leqslant \tau$. Граница $O_{\varepsilon\delta}$ области $G_{\varepsilon\delta}$ состоит тогда из боковой поверхности $M_{\varepsilon\delta}$, вдоль которой $\mu=\varepsilon$, из нижнего основания B_ε, на котором $\sigma=\tau$, и из верхнего основания $D_{\varepsilon\delta}$, где $\sigma=\delta$.

Мы применяем, далее, к области $G_{\varepsilon\delta}$ формулу Грина, которую мы записываем сокращенно в виде

$$\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \{vL[u] - uL[v]\}\, dx\, dy\, dz\, dt = \iiint\limits_{O_{\varepsilon\delta}} \left(v\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial v}{\partial s}\right) do, \tag{40}$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ обозначает «трансверсальную производную» на $O_{\varepsilon\delta}$ (см. § 2), т. е. дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_\nu \frac{\partial}{\partial t} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y} - z_\nu \frac{\partial}{\partial z}, \tag{41}$$

причем x_ν, y_ν, z_ν и t_ν — направляющие косинусы внешней нормали к $O_{\varepsilon\delta}$.

Подставим теперь вместо v рассмотренное выше основное решение V + регулярная функция и найдем согласно п. 1 *логарифмическую часть* каждого из наших интегралов, которую мы будем обозначать через $\underset{*}{\iiint}$ или $\underset{*}{\iiiint}$. Так как регулярное слагаемое основного решения не может давать логарифмических частей, то

в наши формулы войдет только выражение $V = \frac{U}{\Gamma} + W \log \Gamma$. Мы получим тогда уравнение

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right) do -$$

$$- *\iiint\limits_{B_\varepsilon} (V\psi - \varphi V_t)\,dx\,dy\,dz + *\iiint\limits_{D_{\varepsilon\delta}} (Vu_t - uV_t)\,dx\,dy\,dz. \qquad (42)$$

Подсчитаем сначала стоящий слева интеграл $*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt$.

Так как интеграл $*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} fW \log \Gamma\,dx\,dy\,dz\,dt$ сходится к конечному пределу при $\varepsilon \to 0$, то его логарифмическая часть равна нулю. Поэтому

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{Uf}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt =$$

$$= *\iiiint \frac{Uf - \overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt + *\iiiint \frac{\overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

$\overline{U}$ и $\overline{f}$ здесь обозначают, как и прежде, значения функций U и f на боковой поверхности M, а именно, $\overline{U}$, например, равняется значению U в той точке боковой поверхности M, которая лежит на луче, выходящем из точки x, y, z, t параллельно плоскости x, y, z и пересекающем ось конуса. Формулами это выражается следующим образом.

Так как первый интеграл в правой части предыдущего уравнения сходится к конечному пределу, то, полагая

$\overline{U}(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma) = U(\sigma, 0, \alpha, \beta, \gamma)$ [1]), мы получим:

$$*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = *\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{\overline{U}\overline{f}}{\Gamma}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

В силу того, что $dx\,dy\,dz\,dt = \sigma^3(1-\mu)^2\,d\mu\,d\sigma\,d\omega$, а $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, мы можем предыдущий интеграл представить в виде

$$\int\limits_\delta^\tau \sigma d\sigma \iint\limits_{B_\varepsilon} \overline{U} f\,d\omega\; *\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)};$$

из соотношения

$$*\int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\,d\mu = \frac{1}{2}\,*\int\limits_\varepsilon^1 \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2}$$

---

[1]) Так как $U = J_0(\sqrt{-c\Gamma})$, то на поверхности M имеем $\overline{U} = 1$.

следует тогда окончательно:

$$*\iiiint Vf\,dx\,dy\,dz\,dt = -\frac{1}{2}\int_{\delta}^{\tau} \sigma d\sigma \iint_{\beta_\sigma} \overline{U}\,\overline{f}\,d\omega. \tag{43}$$

При $\delta \to 0$ правая часть непрерывно переходит в интеграл

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau} \sigma d\sigma \iint_{\beta_\sigma} \overline{U}\,\overline{f}\,d\omega = -\frac{1}{2}\iiint_{B} \frac{f(x, y, z, \tau - r)}{r}\,dx\,dy\,dz, \tag{44}$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$.

Чтобы вычислить логарифмические члены интеграла, взятого по боковой поверхности конуса $M_{\varepsilon\delta}$, заметим, что на $M_{\varepsilon\delta}$ имеют место следующие соотношения:

$$t_\nu\,do = (1-\varepsilon)^3\sigma^2\,d\sigma\,d\omega; \qquad x_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\alpha\,d\sigma\,d\omega;$$
$$y_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\beta\,d\sigma\,d\omega; \qquad z_\nu\,do = (1-\varepsilon)^2\sigma^2\gamma\,d\sigma\,d\omega.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\,do = [(1-\varepsilon)\,u_t - \alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z]\,(1-\varepsilon)^2\sigma^2\,d\sigma\,d\omega$$

или, так как

$$(1-\varepsilon)\,u_t - \alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z = \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{\sigma}\,u_\mu - (1-\varepsilon)\,u_\sigma,$$

то мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\,do = [\varepsilon(2-\varepsilon)\,u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,u_\sigma]\,(1-\varepsilon)^2\sigma\,d\sigma\,d\omega.$$

Таким образом, мы имеем на $M_{\varepsilon\delta}$:

$$\left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right)do = (1-\varepsilon)^2\sigma\,d\sigma\,d\omega\,\{V[\varepsilon(2-\varepsilon)\,u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,u_\sigma] - \\ - u[\varepsilon(2-\varepsilon)\,V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,V_\sigma]\}.$$

Так как $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$, то мы можем V представить в форме $V = \frac{R}{\mu} + W\log\mu$, где $R = R(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma)$ — регулярная функция. Отсюда мы непосредственно получаем следующее выражение для логарифмической части интеграла, взятого по $M_{\varepsilon\delta}$:

$$*\iiint_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right)do = \iiint_{M_\delta} \sigma^2\,d\sigma\,d\omega\,(uW_\sigma - Wu_\sigma) = \\ = \iiint_{M_\delta} (Wu_s - uW_s)\,do. \tag{45}$$

При $\delta \to 0$ этот интеграл принимает в пределе значение

$$\iiint_{M} (Wu_s - uW_s)\,do.$$

С помощью формулы Грина и в силу того, что $L[W] = 0$, мы можем этот последний интеграл привести к виду

$$\iiint\limits_M (Wu_s - uW_s)\, do = \iiiint\limits_G Wf\, dx\, dy\, dz\, dt + \\ + \iiint\limits_B (W\psi - W_t\varphi)\, dx\, dy\, dz, \tag{46}$$

выражая его, таким образом, исключительно через известные функции W, f, ψ и φ.

Итак, остается еще только вычислить логарифмические части интегралов по B_ε и $D_{\varepsilon\delta}$. Мы рассматриваем их одновременно, вводя интегралы вида

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (Vu_t - uV_t)\, dx\, dy\, dz; \tag{47}$$

$D_{\varepsilon\sigma}$ обозначает здесь внутренность той сферы $\beta_{\varepsilon\sigma}$, по которой боковая поверхность конуса $M_{\varepsilon\delta}$ пересекает плоское многообразие $t = \tau - \sigma$. В развернутой форме мы имеем:

$$J_{\varepsilon,\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left\{ \frac{Uu_t - uU_t}{\Gamma} + \frac{uU\Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{uW\Gamma_t}{\Gamma} + \right. \\ \left. + (Wu_t - uW_t)\log\Gamma \right\} dx\, dy\, dz,$$

откуда мы получаем для логарифмической части $J_{\varepsilon\sigma}$ следующее выражение:

$$J_\sigma = {}_*J_{\varepsilon\sigma} = {}_*\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left(\frac{Uu_t - uU_t}{\Gamma} + \frac{uU\Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{uW\Gamma_t}{\Gamma} \right) dx\, dy\, dz.$$

Но интегралы

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{Uu_t - uU_t - (\overline{U}\,\overline{u}_t - \overline{u}\,\overline{U}_t)}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (uW - \overline{u}\,\overline{W}) \frac{\Gamma_t}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz$$

и

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\Gamma_t}{\Gamma^2} (uU - \overline{u}\,\overline{U} + \sigma\mu\, (\overline{uU})_\nu)\, dx\, dy\, dz$$

стремятся к конечным пределам [выражение $(\overline{uU})_\nu$ в подинтегральном выражении последнего интеграла обозначает производную по внешней нормали функции uU, взятую на сфере β_ε, так что $(\overline{uU})_\nu = \alpha \frac{\partial (uU)}{\partial x} +$

$+\beta\frac{\partial(uU)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(uU)}{\partial z}$; далее, $\sigma\mu=\sigma-\sigma(1-\mu)$ равняется расстоянию точки x, y, z от сферы β_σ]. Поэтому мы получаем:

$$J_\sigma=\underset{*}{\iiint\limits_{D_{\sigma\varepsilon}}}\left[\frac{\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t}{\Gamma}-\frac{\overline{u}\,\overline{W}\Gamma_t}{\Gamma}+\frac{\overline{u}\,\overline{U}-\sigma\mu(\overline{uU})_\nu}{\Gamma}\Gamma_t\right]dx\,dy\,dz.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma=\sigma^2\mu(2-\mu),\qquad \Gamma_t=-2\sigma,\qquad dx\,dy\,dz=\sigma^3(1-\mu)^2\,d\omega\,d\mu,$$

мы получаем далее:

$$J_\sigma=\sigma\iint\limits_{\beta_\sigma}(\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t)\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)}+$$

$$+\sigma^2\iint\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{W}\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2\,d\mu}{\mu(2-\mu)}-\iint\limits_{\beta_\sigma}\overline{u}\,\overline{U}\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2}{\mu^2(2-\mu)^2}\,d\mu+$$

$$+\sigma\iint\limits_{\beta_\sigma}(\overline{uU})_\nu\,d\omega\underset{*}{\int\limits_\varepsilon^1}\frac{2(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)^2}\,d\mu.$$

Вычислив логарифмические части интегралов, взятых по переменной μ, мы получим окончательно:

$$J_\sigma=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\beta_\sigma}\{\overline{u}\,\overline{U}+\sigma[\overline{U}\,\overline{u}_t-\overline{u}\,\overline{U}_t+(\overline{uU})_\nu]+2\sigma^2\,\overline{u}\,\overline{W}\}\,d\omega. \tag{48}$$

В частности, при $\sigma=\delta\to 0$

$$J_\delta\to-2\pi u(\xi,\eta,\zeta,\tau). \tag{49}$$

Подытоживая наши вычисления, мы приходим к следующему результату:

$$u=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\beta}\{\overline{\varphi}\,\overline{U}+\tau[\overline{\psi}\,\overline{U}-\overline{\varphi}\,\overline{U}_t+(\overline{\varphi U})_\nu]+2\tau^2\overline{\varphi}\,\overline{W}\}\,d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{B}(W\psi-W_t\varphi)\,dx\,dy\,dz+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B}\frac{f(x,y,z,t-r)}{r}\,dx\,dy\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iiiint\limits_{G}Wf\,dx\,dy\,dz\,dt. \tag{50}$$

Итак, искомое решение задачи Коши найдено.

В заключение заметим, что в рассматриваемом случае U и W являются функциями только от

$$\Gamma=(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2,$$

и согласно п. 1 имеем:

$$U(\Gamma) = J_0(\sqrt{-c\Gamma}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{\Gamma^{\nu}}{(\nu!)^2},$$

$$W(\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{\Gamma}}\, J_0'(\sqrt{-c\Gamma}) = \frac{c}{4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{\Gamma^{\nu}}{\nu!\,(\nu+1)!}.$$

Отсюда следует, что $\overline{U} = U(0) = 1$, $\overline{U}_t = \frac{c}{2}(t-\tau)$,

$$\overline{U}_{\nu} = -\frac{c}{2}[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)] = \frac{c}{2}(t-\tau);$$

$$\overline{W} = W(0) = \frac{c}{4}.$$

Подставляя эти значения в формулу (50), мы получим:

$$u = \frac{1}{4\pi}\iint_{\beta} \left\{\overline{\varphi} + \tau(\overline{\psi} + \overline{\varphi}_{\nu}) + \frac{c}{2}\tau^2\overline{\varphi}\right\} d\omega +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} (W\psi - W_t\varphi)\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iiiint_{G} Wf\, dx\, dy\, dz\, dt. \tag{51}$$

С помощью небольшого преобразования формула (51) приводится к следующему виду:

$$u(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\psi\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\varphi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\varphi\, dx\, dy\, dz\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\iiiint_{G} Wf\, dx\, dy\, dz\, dt. \tag{51'}$$

В частном случае, когда $\varphi = f = 0$, мы получаем:

$$u = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint_{B} W(\Gamma)\psi\, dx\, dy\, dz \tag{52}$$

или, в развернутом виде,

$$u = \frac{\tau}{4\pi}\iint_{\beta} \overline{\psi}\, d\omega + \frac{\sqrt{-c}}{4\pi}\iiint_{B} \frac{J_0'(\sqrt{-c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}}\psi\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \frac{1}{4\pi\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\iiint_{B} J_0(\sqrt{-c\Gamma})\psi\, dx\, dy\, dz.$$

Эта формула совпадает с полученными в § 5, п. 7 выражениями (81) и (82) при $m=3$.

Формулы (50) и (51) ясно показывают, что принцип Гюйгенса, как мы это уже заметили в п. 1 для общего случая, имеет место только тогда, когда $W=0$, что для рассмотренной задачи равносильно условию $c=0$.

§ 10. Некоторые замечания о понятии волны и проблеме излучения

1. Общие замечания. Проходящие волны, распространяющиеся без искажений. Вернемся еще раз к понятию волны в его различных видах и проанализируем его глубже.

Мы определяем первоначально «волну» как любой процесс распространения во времени и пространстве, изображаемый решением u тотально гиперболического дифференциального уравнения.

В противоположность этому общему определению, отождествляющему понятие волны с понятием решения дифференциального уравнения, *фронт волны* или *характеристическое многообразие* не является решением данного дифференциального уравнения распространения волны порядка k, если $k>1$, а представляет собой лишь возможную поверхность разрывов решений этого дифференциального уравнения.

Характеристические многообразия удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, левая часть которого является однородной функцией k-го измерения относительно частных производных. Соответствующие *лучи*, вдоль которых распространяются эти разрывы (см. § 2), служат характеристиками этого уравнения в частных производных первого порядка, которое является не чем иным, как *уравнением Эйконала* или *уравнением Гамильтона* (см. гл. II, § 9), принадлежащим канонической системе характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей.

Чтобы осветить с новой и более глубокой точки зрения связь, существующую между дифференциальным уравнением распространения высшего порядка, с одной стороны, характеристическим уравнением в частных производных первого порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений семейства лучей, — с другой, мы возьмем в качестве исходного понятия не общее понятие волны как решения дифференциального уравнения распространения, а более частное понятие «проходящей волны». Мы ограничимся при этом линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$L[u]=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{ik}+\sum b_i u_i+cu=0. \qquad (1)$$