ГЛАВА VII

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

В т. I, а также в гл. IV этого тома мы подробно рассмотрели связь, существующую между задачами о краевых и собственных значениях для эллиптических дифференциальных уравнений, с одной стороны, и задачами вариационного исчисления, — с другой. Однако, мы еще не дали общего доказательства разрешимости задач этого типа. Мы проведем теперь эти доказательства существования на основе вариационного исчисления.

При изложении мы ограничимся случаем двух независимых переменных, заметив, однако, при этом, что все наши рассуждения остаются в силе и для трех независимых переменных, если только исключить специальное рассмотрение § 4 относительно характера приближения к краевым значениям. Для случая, когда число независимых переменных больше трех, мы должны при распространении нашей теории на этот случай ввести дополнительные ограничения (см. примечание к § 5, п. 1, стр. 564).

Выходя за пределы линейных задач о краевых и собственных значениях, мы приведем в § 10 решение задачи Плато, упомянутой раньше в гл. III, § 7, также применяя прямые вариационные методы, однако в основном совершенно независимо от предыдущей теории.

Прямые методы вариационного исчисления основываются на том, что решения задач о краевых и собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа удовлетворяют условиям Эйлера для простых вариационных задач с квадратичными подинтегральными выражениями. Сначала Гаусс, а после него в 1847 г. В. Томсон (лорд Кельвин) использовали эту связь при рассмотрении краевой задачи теории потенциала; вскоре после них Риману удалось получить все основные теоремы существования геометрической теории функций с помощью того же метода, названного Риманом «принципом Дирихле» и основанного на допущении разрешимости простых экстремальных задач вариационного исчисления.

Во всех доказательствах этого типа принималось без всякого обоснования как нечто, само собой разумеющееся, что соответствующие экстремальные задачи имеют решения.

Головокружительный успех, которого добился Риман своим методом, вызвал у многих критические сомнения, и Вейерштрасс

вскоре показал, что основное допущение во всех этих доказательствах совершенно не обосновано. Вейерштрасс построил примеры простых экстремальных задач, не имеющих решений, а также другие специфические примеры, в которых решение краевой задачи теории потенциала для круга с соответствующими непрерывными краевыми значениями, наверное, не может быть получено с помощью принципа Дирихле [1]).

Эти примеры создали общее убеждение в том, что все доказательства такого типа ошибочны и должны быть полностью отброшены. В результате отказа от принципа Дирихле возникли другие методы, получившие чрезвычайно плодотворное развитие.

Отметим в первую очередь альтернирующий процесс Шварца и метод К. Неймана, приведший впоследствии к созданию теории интегральных уравнений. Однако, интуитивная убедительность доказательств Римана побуждала многих математиков искать безупречного логического обоснования принципа Дирихле. До 1900 г. все эти поиски оставались безуспешными. В 1900 и 1901 гг. Д. Гильберт опубликовал две работы о принципе Дирихле, оказавшиеся переломными для всего хода развития этого круга идей. Применяя совершенно новые методы, Гильберт непосредственно доказывает разрешимость соответствующих экстремальных задач в некоторых простейших случаях. Эти прямые методы доказательства получили с того времени огромное развитие и оказались по широте охвата значительно сильнее всех других методов, не уступая им в отношении простоты и будучи в то же время часто более пригодными для численных расчетов и практических применений. Пользуясь этими методами, мы дадим в настоящей главе доказательства существования для задач о краевых и собственных значениях с той степенью общности, которая нужна для того, чтобы иметь возможность охватить все встречавшиеся нам раньше в этой книге задачи этого типа. Имея в виду эту степень общности, нам придется принести некоторые жертвы в отношении краткости изложения. Заметим, только, что если ограничиться специальным случаем теории потенциала, то вся дальнейшая теория автоматически значительно упрощается [2]).

---

[1]) См. т. 1, стр. 170.

[2]) Из имеющейся богатой литературы по этому вопросу отметим следующие работы: Вейерштрасс, Über das sog. Dirichletsche Prinzip, Сочинения, т. 2; Шварц, Собрание сочинений, т. 2, стр. 133; К. Нейман, Sächsische Berichte, 1870 и Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, стр. 388, Лейпциг, 1884; Гильберт, Über das Dirichletsche Prinzip, Собрание сочинений, т. 3; Levi B., Sul Principio di Dirichlet; G. Fubini, Il principio di minimo ei teoremi di esistenza, per i problemi al contorno relativi alle equazione alle derivate parziali di ordini pari; Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet. Последние три работы помещены в Rendiconti del Circolo matematico die Palermo, тт. 22—24; Zaremba S., Sur le principe de minimum, Krakauer Akademieberichte, июль 1909. Далее, работы Куранта, начиная с 1912 г., цитированные в статьях Куранта: Über direkte Methoden der Variationsrechnung und verwandte Fragen, *Math. Ann.*, т. 97 (1927); Über

Общий процесс применения прямых методов сводится к следующему. Мы исходим из того, что для наших экстремальных задач всегда существует если не минимум, то, во всяком случае, нижняя граница d; поэтому существует последовательность допустимых для рассматриваемой вариационной задачи функций, для которой данное вариационное выражение стремится к нижней границе d. Как мы видели раньше (т. I, стр. 173), такая «*минимизирующая последовательность*» может расходиться, и если она сходится, то для предельной функции может не существовать производных. Поэтому наша главная задача состоит прежде всего в том, чтобы показать, что из минимизирующей последовательности можно получить с помощью подходящих сходящихся процессов решение экстремальной задачи и что это решение обладает свойствами дифференцируемости, достаточными для того, чтобы мы могли его отождествить с искомым решением дифференциального уравнения. Эффективное построение минимизирующих последовательностей является чрезвычайно важной задачей с точки зрения численных расчетов и практических приложений. Мы здесь, однако, не остановимся на этом, так как для доказательства существования мы можем ограничиться указанием на то, что существование минимизирующей последовательности является совершенно очевидным. (Эффективное построение минимизирующих последовательностей в целях приближенного вычисления искомого решения дается практически очень важным методом, известным под названием «метода Ритца». См. т. I, стр. 163, 164, а также перечисленную выше литературу. Укажем, кроме того, Вальтер Ритц, Собрание сочинений.)

§ 1. Введение

1. Принцип Дирихле для круга. Мы начнем с исследования связи, существующей между краевой задачей теории потенциала для круга и соответствующей вариационной задачей Дирихле. Хотя это исследование нам в дальнейшем не понадобится, однако оно является очень поучительным (см. т. I, гл. IV, § 2, п. 3).

Пусть в единичном круге B: $x^2+y^2<1$ плоскости x, y задана функция $g(x, y)$, непрерывная всюду в области B, включая границу, и первые производные которой g_x и g_y кусочно-непрерывны в области B [1]). Допустим далее, что для функции g существует интеграл Дирихле

$$D[g]=\iint\limits_B \left\{g_x^2+g_y^2\right\} dx\,dy.$$

Мы выражаем это условие краткой записью $D[g]<\infty$.

die Anwendung der Variationsrechnung и т. д. *Acta Mathematica*, т. 49, а также Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip., *Crelles Journ.*, т. 115 (1931).

Излагаемая в этой главе теория является дальнейшим развитием прежних работ автора; при этом особенно используется мысль, высказанная автором в последней из перечисленных работ, относящаяся к краевой задаче теории потенциала и теоремам существования геометрической теории функций.

[1]) Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной в некоторой области, если во всякой замкнутой части этой области рассматриваемая

Решим теперь следующую краевую задачу: найти гармоническую функцию u, регулярную внутри области B и принимающую вдоль границы C те же краевые значения, что и заданная функция g. Пусть r, ϑ — полярные координаты, так что $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$; обозначим через a_n и b_n коэффициенты Фурье функции $g = g(1, \vartheta)$. Тогда решение нашей задачи дается формулой Пуассона

$$u(x, y) = u(r, \vartheta) = \lim_{n\to\infty} u_n, \tag{1}$$

где

$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\vartheta + b_\nu \sin\nu\vartheta) r^\nu.$$

При этом последовательность u_n сходится к u равномерно во всяком внутреннем концентрическом круге (см. гл. IV, § 2, стр. 271, а также стр. 29).

Назовем *принципом Дирихле для круга* следующую теорему:

Для решений рассматриваемой краевой задачи интеграл $D[u]$ существует и $D[u] \leqslant D[g]$, причем равенство имеет место только в том случае, когда $g = u$. Другими словами, функция u может быть однозначно определена как решение следующей вариационной задачи: из всех функций φ, непрерывных в области $B + C$, имеющих кусочно-непрерывную производную в области B и принимающих на C те же краевые значения, что и функция g, найти те функции u, для которых $D[\varphi]$ имеет наименьшее значение.

Основная цель настоящей главы заключается в том, чтобы получить соответствующий результат для любой области G и, исходя из вариационной задачи, решить соответствующую краевую задачу. Однако, в этом номере мы поступим наоборот и докажем нашу теорему, основываясь на том, что для круга решение краевой задачи нами уже найдено и задается формулой (1).

Подчеркнем, что введенное нами условие $D[g] < \infty$ является существенным. Мы уже видели раньше (т. I, стр. 170), что могут существовать такие непрерывные функции g, для которых рассматриваемая краевая задача решается с помощью определенной выше функции u, но для которых $D[u]$ не существует.

Доказательство нашей теоремы основывается на следующем рассуждении: положим $g = u + v$, так что v обращается в нуль вдоль границы. Введя обозначение

$$D[\varphi, \psi] = \iint_B \{\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y\}\, dx\, dy,$$

мы получим соотношение

$$D[g] = D[u] + D[v] + 2D[u, v].$$

функция непрерывна, не считая разрывов какого угодно характера в отдельных точках и разрывов первого рода (скачков) вдоль конечного числа гладких дуг. При этом дуга некоторой линии называется гладкой, если она может быть задана с помощью параметра t уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы, а $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$.

Если бы мы преобразовали выражение $D[u, v]$ с помощью формулы Грина, то мы получили бы в силу того, что $\Delta u = 0$ в B и $v = 0$ на границе C, что $D[u, v] = 0$, и наша теорема была бы непосредственно доказана. Однако, такое доказательство является совершенно нестрогим, ибо, во-первых, мы не имеем права заранее допускать существование интеграла $D[u]$, а, во-вторых, мы не можем быть уверены в справедливости формулы Грина для всего полного круга B, не зная поведения производных функции u вдоль границы.

Чтобы обойти эти трудности, мы проводим доказательство следующим образом: рассмотрим вместо u аппроксимирующую функцию u_n, являющуюся регулярной во всей плоскости гармонической функцией и имеющей в силу этого непрерывные вдоль C производные. Положим теперь $u_n + v_n = g$. Краевые значения $v_n(1, \vartheta)$ ортогональны к функциям 1, $\cos \nu\vartheta$, $\sin \nu\vartheta$ при $\nu \leqslant n$, ибо краевые значения u_n и g имеют одни и те же коэффициенты Фурье a_ν, b_ν при $\nu \leqslant n$. Мы можем теперь применить формулу Грина к функциям $\varphi = u_n$ и $\psi = v_n$ для полного круга B. Замечая далее, что вдоль границы круга нормальная производная $\frac{\partial u_n}{\partial r}$ функции u_n ортогональна к v_n, ибо она является линейной комбинацией $2n+1$ функций 1, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$, $\ldots$, $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$, мы получаем:

$$D[u_n, v_n] = -\iint\limits_B v_n \Delta u_n \, dx\, dy + \int\limits_C v_n \frac{\partial u_n}{\partial r} d\vartheta = 0.$$

Отсюда следует:

$$D[g] = D[u_n] + D[v_n] + 2D[u_n, v_n] = D[u_n] + D[v_n],$$

так что

$$D[u_n] \leqslant D[g].$$

Тем более имеет место неравенство $D_R[u_n] \leqslant D[g]$, где индекс R указывает, что стоящий слева интеграл берется не по всему единичному кругу, а только по концентрическому кругу K_R радиуса $R < 1$. Так как в круге K_R производные u_n равномерно сходятся к производным u, то $D_R[u] \leqslant D[g]$; поэтому при $R \to 1$ мы получаем $D[u] \leqslant D[g]$, что и требовалось доказать.

Единственность решения u доказывается так: пусть $u + v$ — другое решение нашей задачи о минимуме; тогда должны существовать также интегралы $D[v]$ и $D[u, v] = \iint\limits_B (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy$ (см. п. 3).

Отсюда следует, что все функции $u + \varepsilon v$ при любом постоянном ε являются допустимыми функциями сравнения для нашей задачи о минимуме. Мы получаем поэтому, что функция

$$D[u + \varepsilon v] = D[u] + 2\varepsilon D[u, v] + \varepsilon^2 D[v],$$

являющаяся квадратичной функцией от ε, не может иметь, кроме минимума при $\varepsilon = 0$, никакого другого минимума и, в частности, не

может иметь минимума при $\varepsilon = 1$, за исключением того случая, когда $D[u, v] = D[v] = 0$, но из последнего уравнения следует, что $v = 0$, и наше утверждение этим доказано.

При рассмотрении областей общего вида можно было бы положить в основу доказанное таким образом минимальное свойство круга[1]) или же для случая многих переменных аналогично доказываемое минимальное свойство многомерного шара. Однако, мы изложим здесь другой существенно более общий метод, применение которого не ограничивается одним только уравнением Лапласа и при котором мы уже не будем пользоваться решениями специальных краевых задач.

2. Общая постановка задачи. В дальнейшем будет итти речь о краевых задачах и задачах о собственных значениях эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка для открытых областей G, границы которых мы обозначим через Γ; мы допускаем при этом, что G — ограниченная область, т. е. лежит целиком внутри некоторого квадрата (случай неограниченных областей мы рассмотрим в § 9, п. 5). Мы рассматриваем эллиптические линейные дифференциальные выражения $L[u]$ для функции $u(x, y)$, получающиеся в качестве эйлеровых вариационных выражений из квадратичного интеграла с функциональным аргументом $\varphi(x, y)$:

$$E[\varphi] = \iint\limits_G \{ p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + 2a\varphi\varphi_x + 2b\varphi\varphi_y + q\varphi^2 \} \, dx\, dy.$$

При этом p, q, a, b являются непрерывными функциями в области $G + \Gamma$; q пусть имеет непрерывные производные первого порядка, a и b — непрерывные производные до второго порядка, а p — непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем эти условия дифференцируемости относятся только к области G. Далее, мы предполагаем, что в $G + \Gamma$

$$p > 0 \tag{2}$$

и

$$q \geqslant 0. \tag{3}$$

В отношении подинтегрального выражения мы вводим, далее, следующее условие *определенности*: мы предполагаем, что для заданной области G существует такая постоянная $\varkappa$, что для любой точки области $G + \Gamma$ и при любых значениях параметров ξ, η, ζ имеет место неравенство

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(\xi^2 + \eta^2). \tag{4}$$

Имея в виду получить возможно более общие результаты, мы вводим заранее еще одну функцию k, положительную в $G + \Gamma$ и непрерывно дифференцируемую в G, и представляем эйлерово дифференциальное

---

[1]) Такой метод доказательства применяется, например, в книге Куранта, «Геометрическая теория функций комплексного переменного», Москва, 1934.

выражение, соответствующее вариационному интегралу $E[\varphi]$, в форме $2kL[u]$, где

$$L[u]=\frac{1}{k}[(pu_x)_x+(pu_y)_y-q^*u], \tag{5}$$

причем

$$q^*=q-a_x-b_y. \tag{6}$$

Заметим, что с помощью простого преобразования мы можем заменить коэффициент p единицей. В самом деле, введя новый функциональный аргумент $\psi=\sqrt{p}\,\varphi$, мы преобразуем подинтегральное выражение $E[\varphi]$ в другое аналогичное подинтегральное выражение, в котором множитель p заменяется единицей, так что для функции $v=\sqrt{p}\,u$ получается эйлерово дифференциальное выражение вида $v_{xx}+v_{yy}-q^*v$ с другой функцией q^*. Мы этим воспользуемся в § 5.

Мы рассматриваем для области G краевые задачи, относящиеся к дифференциальному уравнению

$$L[u]=-f, \tag{7}$$

и задачи о собственных значениях, относящиеся к дифференциальному уравнению

$$L[u]+\lambda u=0, \tag{8}$$

причем f обозначает функцию, непрерывную в $G+\Gamma$ и кусочно-непрерывно дифференцируемую в G.

Далее, мы будем рассматривать краевые условия следующих типов.

Краевое условие первого рода (*фиксированные краевые значения*). Краевые значения u на границе Γ заданы условием, чтобы на границе Γ обращалась в нуль разность $u-g$, где g обозначает заданную функцию, непрерывную в $G+\Gamma$. Смысл условия обращения в нуль разности $u-g$ на границе нам придется в дальнейшем уточнить.

В случае задачи о собственных значениях задаются нулевые краевые значения.

Краевые условия второго и третьего рода, рассмотренные нами в т. I, гл. V, требуют, чтобы вдоль границы обращалась в нуль заданная линейная комбинация функции u и ее нормальной производной, причем мы в дальнейшем уточним смысл условия обращения в нуль на границе.

Точная и отвечающая сущности дела формулировка краевых условий наталкивается на своеобразные трудности. Мы уже видели в гл. IV, § 4, п. 4, что не для всякой области G можно требовать, чтобы искомая функция действительно принимала в каждой граничной точке заданные краевые значения. Еще менее оснований мы имеем ожидать разрешимости краевых задач в собственном смысле слова в тех случаях, когда краевые условия содержат нормальные производные неизвестной функции; помимо того, что мы не хотим

ввести требования существования нормали к границе Γ, вопрос о существовании на границе производных функций u, удовлетворяющих данной краевой задаче, представляет собой трудно разрешимую задачу, которая может быть исследована только при специальных предположениях и по существу не имеет отношения к интересующей нас краевой задаче.

Ввиду этого мы дадим в дальнейшем такую уточненную формулировку краевых условий, которая обеспечит однозначную разрешимость краевых задач и даст возможность полностью решить соответствующие задачи о собственных значениях. При этом окажется возможным получить решения краевых задач первого рода для любых открытых областей G и даже для любых открытых точечных множеств, необязательно связных; для краевых задач второго и третьего рода придется подчинить области G некоторым дополнительным ограничениям. Чтобы дать точную формулировку наших краевых условий, мы должны прежде всего ввести понятие линейных функциональных многообразий, для которых наши вариационные интегралы имеют смысл.

Такие линейные функциональные многообразия будут играть основную роль в наших доказательствах существования.

3. Линейные функциональные пространства с квадратичной метрикой[1]**. Определения.** Рассмотрим следующие интегральные выражения с функциональными аргументами φ и ψ:

$$H[\varphi, \psi] = \iint\limits_G k\varphi\psi\, dx\, dy; \quad H[\varphi] = H[\varphi, \varphi];$$

$$D[\varphi, \psi] = \iint\limits_G p(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y)\, dx\, dy; \quad D[\varphi] = D[\varphi, \varphi];$$

$$E[\varphi, \psi] = D[\varphi, \psi] + \iint\limits_G \{a\varphi\psi_x + a\psi\varphi_x + b\varphi\psi_y + b\psi\varphi_y + q\varphi\psi\}\, dx\, dy;$$

$$E[\varphi] = E[\varphi, \varphi],$$

причем коэффициенты p, a, b, q, k удовлетворяют перечисленным в п. 2 условиям: все они непрерывны в $G+\Gamma$, q и k имеют в G непрерывные производные первого порядка, a и b имеют непрерывные производные первого и второго порядков, а p — непрерывные производные до третьего порядка включительно. Далее, пусть в $G+\Gamma$ имеют место неравенства (2), (3) и (4) из п. 2.

Перечисленные интегралы мы должны рассматривать как несобственные интегралы в обычном смысле этого понятия, т. е. как пределы интегралов, взятых по замкнутым частичным областям G_n, причем область G_{n+1} содержит область G_n, и любая точка области G содержится в какой-нибудь из областей G_n. Подинтегральные выражения кусочно-непрерывны в каждой области G_n, включая границу.

---

[1]) Эти понятия подробно развиваются в работе M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, New York, 1932.

Мы будем применять наши интегралы к следующим классам функций, которые мы обозначим через $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}$.

Определение 1. Все кусочно-непрерывные в G функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющие условию $H[\varphi] < \infty$, образуют функциональное пространство $\mathfrak{H}$.

Определение 2. Все кусочно-непрерывные в G функции $\varphi(x, y)$ пространства $\mathfrak{H}$, имеющие кусочно-непрерывные производные φ_x и φ_y и удовлетворяющие условию $D[\varphi] < \infty$, образуют функциональное пространство $\mathfrak{D}$.

Теорема 1. *Для функций φ пространства $\mathfrak{D}$ существует также интеграл $E[\varphi]$ и имеет место неравенство вида*

$$\varkappa D[\varphi] \leqslant E[\varphi] \leqslant \alpha D[\varphi] + \beta H[\varphi], \tag{9}$$

где $\varkappa$, α, β обозначают некоторые фиксированные константы, зависящие только от области G.

Эта теорема непосредственно следует из наших предположений относительно p, a, b, q, k, неравенства (4) и соотношения

$$2\,|a\varphi\varphi_x + b\varphi\varphi_y| \leqslant C(\varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2),$$

где C — некоторая константа, зависящая только от области G.

Все наши интегральные формы H, D, E, составленные для функций $\varphi(x, y)$ из пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}$, обладают общими свойствами, которые мы формулируем для всех этих трех интегралов одновременно. Введем для этих интегральных форм и соответствующих полярных форм общие обозначения $Q[\varphi]$ и $Q[\varphi, \psi]$.

Тогда имеем:

$$Q[\varphi] \geqslant 0. \tag{10}$$

Далее, имеют место следующие теоремы:

Теорема 2. *Из условий $Q[\varphi] < \infty$ и $Q[\psi] < \infty$ следует существование полярной формы $Q[\varphi, \psi]$, причем $Q[\psi, \varphi] = Q[\varphi, \psi]$.*

Теорема 3. *Наряду с функциями φ и ψ всякая линейная комбинация $\lambda\varphi + \mu\psi$ этих функций также принадлежит к соответствующим пространствам $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{D}$, причем имеет место равенство*

$$Q[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda^2 Q[\varphi] + 2\lambda\mu\, Q[\varphi, \psi] + \mu^2 Q[\psi]. \tag{11}$$

Наконец, имеет место *неравенство Шварца*

$$Q^2[\varphi, \psi] \leqslant Q[\varphi]\, Q[\psi] \tag{12}$$

и непосредственно следующее из него *неравенство треугольника*

$$\sqrt{Q[\varphi + \psi]} \leqslant \sqrt{Q[\varphi]} + \sqrt{Q[\psi]}. \tag{13}$$

Чтобы доказать эти теоремы, заметим прежде всего, что их справедливость для подобластей, целиком лежащих внутри G, очевидна. Неравенство (12) является непосредственным следствием определенности формы Q. Переходя в тождестве (11) к пределу от частичной области G_n ко всей области G, мы докажем существо-

вание смешанной формы $Q[\varphi, \psi]$ для всей области G, и вместе с тем докажем все предшествующие теоремы для области G.

Мы рассматриваем интегральную форму Q как «*метрическую форму*», определяя выражение $\sqrt{Q[\varphi-\psi]}$ как «*расстояние между двумя функциями φ и ψ в смысле метрики Q*». В отношении *понятия сходимости*, определенной с помощью этого мероопределения, имеют место следующие простые теоремы. Обозначим через ζ и φ функции пространства $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{D}$, принадлежащего к форме Q, а через φ^ν — некоторую последовательность таких функций. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Из соотношения*

$$Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0 \tag{14$_1$}$$

или соответственно

$$Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0 \tag{14$_2$}$$

следует ограниченность выражений $Q[\varphi^\nu]$ и соотношение

$$\sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi^\mu]}\to 0 \tag{15$_1$}$$

или соответственно

$$\sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi]}\to 0, \tag{15$_2$}$$

а также

$$Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi^\mu]\to 0 \tag{16$_1$}$$

или соответственно

$$Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi]\to 0. \tag{16$_2$}$$

Для доказательства заметим, что соотношения (15) являются непосредственным следствием соотношений (14) и неравенства треугольника (13). Фиксируя ν, мы докажем таким путем ограниченность $Q[\varphi^\mu]$, откуда и будут следовать соотношения (16), получающиеся из соотношений (15) путем умножения на $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi^\mu]}$ или соответственно на $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi]}$.

Теорема 5. *Из соотношения*

$$Q[\varphi^\nu]\to 0 \tag{17}$$

следует, что для всякой фиксированной функции ζ, для которой существует $Q[\zeta]$, имеет место соотношение

$$Q[\varphi^\nu, \zeta]\to 0 \tag{18}$$

Эта теорема является непосредственным следствием неравенства Шварца.

Мы называем последовательность функций φ^ν «*сильно*» *сходящейся в себе в смысле метрики Q, если выполняется условие* (14)$_1$: $Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0$, *и* «*сильно*» *сходящейся к функции φ, если имеет место условие* (14)$_2$: $Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0$. Наряду с этим понятием сильной сходимости будет играть большую роль также понятие «*слабой сходимости*». Мы говорим, что последовательность функций φ^ν с ограниченным $Q[\varphi^\nu]$ *слабо сходится в себе или*

к функции φ в смысле метрики Q, если для любой фиксированной функции ζ имеют место соотношения

$$Q[\varphi^{\nu} - \varphi^{\mu}, \zeta] \to 0 \tag{19}$$

или соответственно

$$Q[\varphi^{\nu}, \zeta] \to Q[\varphi, \zeta]. \tag{19$_1$}$$

Теорема 5 утверждает, таким образом, *что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость.* Наряду с пространством $\mathfrak{D}$ нам придется также рассматривать и его подпространства [1]).

Определение 3. Все функции φ пространства $\mathfrak{D}$, обращающиеся тождественно в нуль в некоторой пограничной полосе области G, образуют функциональное подпространство $\dot{\mathfrak{D}}$. При этом мы называем пограничной полосой области G такое множество точек области G, к которому, во всяком случае, принадлежат все те точки G, расстояние которых от границы Γ меньше некоторого положительного числа ε. Мы говорим тогда, что пограничная полоса имеет ширину не меньше ε. Таким образом, подпространству $\dot{\mathfrak{D}}$ принадлежат все те функции, для которых существует такое положительное число ε, что соответствующая функция φ обращается в нуль во всех точках области G, расстояние которых от границы меньше ε.

Определение 4. Все функции φ из $\mathfrak{D}$, для которых существует такая последовательность функций $\overset{\circ}{\varphi}{}^{\nu}$ из $\dot{\mathfrak{D}}$, что $H[\varphi^{\nu} - \varphi] \to 0$ и $D[\varphi^{\nu} - \varphi] \to 0$, образуют пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$. Таким образом, это пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ получается процессом «*замыкания*» пространства $\dot{\mathfrak{D}}$ [2]). Очевидно, имеет место теорема:

Теорема 6. Функция φ пространства $\mathfrak{D}$ принадлежит к пространству $\dot{\mathfrak{D}}$, если существует последовательность функций φ^{ν} из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, для которой выполняются условия $D[\varphi^{\nu} - \varphi] \to 0$, $H[\varphi^{\nu} - \varphi] \to 0$.

Далее, полезно ввести еще следующее определение:

Определение 5. *Все непрерывно дифференцируемые функции φ пространства $\mathfrak{D}$, которые имеют в G кусочно-непрерывные вторые производные и для которых функция $L[\varphi]$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}$, образуют пространство $\mathfrak{F}$* [3]).

---

[1]) Относительно определений этих пространств и их применения к формулировке краевых условий см. Friedrichs, Zur Spektraltheorie, *Math. Ann.*, т. 109, стр. 465 и 685.

[2]) Заметим, что если вместо этого процесса замыкания внутри $\mathfrak{D}$ произвести полное замыкание рассматриваемых линейных пространств, то эти пространства превращаются в «*гильбертовы пространства*». Результаты этой главы показывают, что для наших целей не является необходимым оперировать в замкнутом гильбертовом пространстве.

[3]) Можно было бы еще ввести пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$, состоящее из всех функций пространства $\mathfrak{H}$, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе; замкнув пространство $\dot{\mathfrak{H}}$ в пространстве $\mathfrak{H}$, мы получили бы так же, как выше пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$. Задача: доказать, что пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$ совпадает с пространством $\mathfrak{H}$.

Отметим, далее, следующие неравенства. Обозначим индексами p, k и 1 соответствующие выражения D или H, составленные с помощью функций p, k и 1 в качестве множителей в соответствующих подинтегральных выражениях. Пусть, далее,

$$0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1, \quad 0 < k_0 \leqslant k \leqslant k_1,$$

где p_0, p_1, k_0 и k_1 — константы. Тогда

$$p_0 D_1[\varphi] \leqslant D_p[\varphi] \leqslant p_1 D_1[\varphi]; \tag{20}$$

$$k_0 H_1[\varphi] \leqslant H_k[\varphi] \leqslant k_1 H_1[\varphi]. \tag{21}$$

Отсюда следует, что функциональные пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\mathring{\mathfrak{D}}$, принадлежащие к функциям p и k, совпадают с соответствующими функциональными пространствами, принадлежащими к другим функциям p и k и, в частности, с пространствами, принадлежащими к множителям $p = 1$ и $k = 1$.

Далее, *из соотношений* $D_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, $H_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ *следуют соотношения* $D_p[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, $H_k[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$, *и наоборот*. Поэтому нам в дальнейшем не нужно будет, вообще говоря, в соотношениях такого рода явно указывать, к каким множителям p и k они относятся. Вместо этого нам иногда придется отмечать с помощью соответствующего индекса положенную в основу область G, так что мы иногда будем употреблять обозначение $D_G[\varphi]$.

4. Краевые условия. Теперь уже нетрудно точно разъяснить смысл первого краевого условия: $u - g = 0$ вдоль границы Γ. Мы формулируем следующим образом краевое условие первого рода:

Функция $u - g$ должна принадлежать пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Мы увидим, что это условие является достаточно слабым для того, чтобы обеспечить разрешимость краевой задачи для любой открытой области G, и в то же время достаточно сильным для того, чтобы решение краевой задачи было единственным.

Для краевых условий второго и третьего рода мы дадим точную формулировку только в §§ 6 и 7. Эти краевые условия окажутся совпадающими с *естественными* условиями вариационных задач, в которых на функции сравнения заранее не накладываются никакие краевые условия.

Легко убедиться, что наше условие принадлежности функции $u - g$ к пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$ является действительно краевым условием, несмотря на то, что само по себе оно относится к поведению функции u во всей области G. В самом деле, пусть $u = v + \zeta$, где ζ принадлежит к пространству $\dot{\mathfrak{D}}$, т. е. обращается в нуль в некоторой пограничной полосе, так что v совпадает с u в этой пограничной полосе; тогда функция v наряду с функцией u также удовлетворяет нашему краевому условию. Действительно, функция $v - g$ принадлежит к пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, ибо если функция $u - g$

может быть аппроксимирована в смысле метрик D и H с помощью функций φ, пространства $\mathring{\mathfrak{D}}$, то и функция $v-g$ аппроксимируется функциями $\varphi^{\nu}-\zeta$, также лежащими в пространстве $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Вопрос о том, можно ли из формулированного нами краевого условия получить более точные утверждения относительно поведения функции u на границе и характера приближения u к своим краевым значениям, является с точки зрения нашей теории специальным вопросом, требующим особого рассмотрения. Мы займемся этим в § 4 и § 9, п. 3.

§ 2. Первая краевая задача

1. Постановка задачи. Повторим еще раз формулировку краевой задачи первого рода. Она относится к ограниченной открытой области G с границей Γ, к заданной функции g из $\mathfrak{D}$, функции f, кусочно-непрерывно дифференцируемой в G, непрерывной в $G+\Gamma$ и принадлежащей функциональному пространству $\mathfrak{H}$, и, наконец, к заданному в G дифференциальному выражению

$$L[u]=\frac{1}{k}\left[(pu_x)_x+(pu_y)_y-q^*u\right], \tag{1}$$

где

$$q^*=q-a_x-b_y. \tag{2}$$

Формулируется она так: Краевая задача 1. *Требуется найти функцию u, принадлежащую подпространству $\mathfrak{F}$, для которой $u-g$ принадлежит подпространству $\mathring{\mathfrak{D}}$ и которая в G удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$L[u]=-f. \tag{3}$$

В частном случае $p=1$, $q=a=b=0$ *наша краевая задача сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения*

$$\Delta u=-f. \tag{4}$$

Заметим, что формально эта задача эквивалентна другой задаче, в которой с самого начала положено $a=b=0$, а функция q заменена функцией q^*. Однако, в силу введенного выше в § 1 условия $q\geqslant 0$ формулированная нами задача является несколько более общей, так как условие $q^*\geqslant 0$ может и не выполняться.

Для того, чтобы решить нашу краевую задачу, мы рассматриваем соответствующую вариационную задачу, которую формулируем так:

Вариационная задача I. *Требуется найти функцию $\varphi=u$ из $\mathfrak{D}$, которая удовлетворяет краевому условию*

$$\varphi-g \text{ содержится в } \mathring{\mathfrak{D}} \tag{5}$$

и для которой интегральное выражение

$$E[\varphi]-2H[f,\varphi] \tag{6}$$

достигает минимума.