Пусть теперь φ^ν—некоторая последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы 1 из § 5. Мы сопоставляем этой последовательности последовательность

$$\varphi^\nu = -U[f - q^*\varphi^\nu] - W[\varphi^\nu]. \tag{5}$$

Доказать, что функции $\bar{\varphi}^\nu$ сходятся в G_R равномерно к непрерывной в G_R предельной функции u. Для этой функции u имеет место тогда

Теорема 1а. Для всякой функции ζ_{2R} из $\mathfrak{H}$

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - u] \to 0. \tag{6}$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] \to 0;$$

чтобы в этом убедиться, заметим, что в силу формулы (4) имеем:

$$\varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu = U[f - q^*\varphi^\nu] - V[\varphi^\nu],$$

откуда на основании соотношений (2) и (1) следует:

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] = H\{U[\zeta_{2R}], f - q^*\varphi^\nu\} - D\{U[\zeta_{2R}], \varphi^\nu\}.$$

Так как $U[\zeta_{2R}]$ принадлежит к $\dot{\mathfrak{D}}$, то в силу условия (10) из § 5 правая часть последнего равенства стремится к нулю, так что имеет место соотношение (6), и теорема 1а доказана.

Полагая в теореме 1а

$$\zeta_{2R} = \Delta S(x_0, y_0; x, y)$$

и соответственно

$$\zeta_{2R} = q^*(x, y) S(x_0, y_0; x, y),$$

мы получим для всякой точки x_0, y_0, лежащей в G_{3R}:

$$W[\varphi^\nu] \to W[u] \quad \text{и} \quad U[q^*\varphi^\nu] \to U[q^* u].$$

Поэтому в силу формулы (5)

$$\varphi^\nu \to U[q^* u - f] - W[u],$$

так что для u получается интегральная формула:

$$u = U[q^* u - f] - W[u]. \tag{7}$$

Вывести теперь из формулы (7) теоремы 1б и 1в, т. е. доказать, что функция u имеет непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u - q^* u = -f$; доказать также теорему 1 из § 5 [1]).

§ 10. Задача Плато

В этом последнем параграфе мы займемся на основе вариационных методов решением задачи Плато (гл. III, § 7, стр. 198 и § 2, стр. 155).

---

[1]) См. по поводу этого метода Курант, *Math. Ann.*, т. 97.

Наши рассмотрения будут независимы от предыдущих результатов этой главы; мы лишь воспользуемся доказанным в § 1, п. 1 элементарным минимальным свойством гармонической функции для круга [1]).

1. Постановка задачи и общая схема решения. Согласно рассмотрениям гл. III, §§ 2 и 7 мы называем минимальной поверхностью в пространстве прямоугольных координат $x_1, \ldots, x_m$, рассматриваемых как компоненты вектора $\bar{\mathfrak{x}}$, двухмерное многообразие, которое может быть представлено следующим образом с помощью двух параметров u и v. В области B плоскости u и v координаты x_j должны быть регулярными гармоническими функциями от u и v, т. е. $\Delta x_j = 0$ или, короче,

$$\Delta \mathfrak{x} = 0, \tag{1}$$

причем эти функции должны, сверх того, удовлетворять условиям

$$E - G = 0, \qquad F = 0, \tag{2}$$

где

$$E = \mathfrak{x}_u^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)^2; \quad G = \mathfrak{x}_v^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)^2; \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

При $m = 3$ это совпадает с определением, данным в гл. III. Наши условия выражают то, что область B плоскости u и v конформно отображена на минимальную поверхность; если же $m = 2$, то речь идет о конформном отображении B на плоскую область плоскости x_1, x_2.

Если мы положим $w = u + iv$, то

$$x_j = Rf_j(w), \tag{3}$$

т. е. x_j является вещественной частью аналитической в B функции $f_j(w)$. Условия (2) выражают для аналитической функции от w

$$\varphi(w) = (E - G) - 2iF = \sum_j f_j'(w)^2 \tag{4}$$

требование

$$\varphi(w) = 0. \tag{5}$$

Задача Плато в своей простейшей форме, которой мы здесь ограничимся, заключается в следующем: требуется построить минимальную поверхность, имеющую границей заданную непрерывную кривую Γ

---

[1]) Первое общее решение задачи Плато было дано J. Douglas'ом и T. Radó в 1932 г. независимо друг от друга. В отношении литературы см. прежде всего Radó, On the problem of Plateau, *Erg. Math.*, т. 2, 1933 и Douglas, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1933), стр. 227. Даваемое нами изложение основывается на работах Куранта, *Nat. Ac. Sci. Wash.*, июнь 1936, стр. 368 и *Ann. of Math.*, т. 38 (1937), стр. 679.

Douglas исходит из новой вариционной задачи для функционала, выражающего в случае гармонических функций интеграл Дирихле через контурный интеграл, ограничиваясь, таким образом, гармоническими функциями. Мы же отбрасываем это ограничение и исходим из самого интеграла Дирихле. Radó применяет в качестве существенного вспомогательного средства конформное отображение многогранников.

пространства $\mathfrak{x}$, причем Γ не имеет двойных точек. Другими словами, нужно найти гармонический вектор $\mathfrak{x}$, удовлетворяющий условиям (1) и (2) и отображающий непрерывно границу области B на кривую Γ.

Выберем в качестве области B единичный круг $u^2+v^2<1$ с границей C: $u^2+v^2=1$ и введем полярные координаты r и ϑ. Таким образом, мы требуем, чтобы вектор $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(r, \vartheta)$ при $r=1$ производил непрерывное отображение C на Γ, причем различные точки Γ должны, разумеется, являться изображениями различных точек окружности C, т. е. отображение должно быть «монотонным» [1]).

Рассмотрим сначала для ориентировки случай $m=2$. Тогда наша задача сводится к задаче о конформном отображении единичного круга B на односвязную область плоскости x_1, x_2, ограниченную контуром Γ. Чтобы решить эту задачу, мы можем, следуя Риману, исходить из следующей вариационной задачи:

Пусть $x=x_1(u, v)$; $y=x_2(u, v)$ — две функции, непрерывные в замкнутой области $u^2+v^2\leqslant 1$, имеющие внутри этой области кусочно-непрерывные [2]) производные и такие, что с помощью этой пары функций или, другими словами, с помощью радиуса-вектора $\mathfrak{x}(u, v)$ с компонентами x_1 и x_2 единичный круг B отображается на область G, причем граница C единичного круга непрерывно преобразуется в границу Γ области G. Требуется обратить в минимум интеграл

$$\iint\limits_B \{(x_u-v_v)^2+(x_v+y_u)^2\}\,du\,dv \tag{6}$$

с помощью подходящего выбора пары функций x, y или соответственно вектора $\mathfrak{x}(u, v)$. Очевидно, что для пары функций, производящей конформное отображение B на G и удовлетворяющей, следовательно, дифференциальным уравнениям Коши-Римана, наш интеграл достигает минимума, и этот минимум равен нулю.

Подинтегральное выражение в (6) может быть записано в виде

$$x_u^2+x_v^2+y_u^2+y_v^2-2(x_u y_v-x_v y_u).$$

Заметив, что интеграл от второй части этого выражения равняется двойной площади области G, так что значение этого интеграла нам известно независимо от выбора вектора $\mathfrak{x}$, мы убеждаемся, что формулированная выше вариационная задача может быть заменена следующей эквивалентной ей задачей:

При перечисленных выше условиях требуется обратить в минимум «интеграл Дирихле»

$$D[\mathfrak{x}]=\iint\limits_B (\mathfrak{x}_u^2+\mathfrak{x}_v^2)\,du\,dv.$$

---

[1]) Однозначная обратимость отображения не требуется в явном виде в условии задачи, но получается как следствие сама собой. (См. Курант, *Ann. of Math.*, т. 38, стр. 696.)

[2]) См. сноску на стр. 537.

Если считать доказанной возможность конформного отображения, то решение этой вариационной задачи дается гармоническим вектором $\mathfrak{x}$, т. е. вектором, удовлетворяющим уравнению

$$\Delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = 0, \tag{7}$$

который, сверх того, в силу дифференциальных уравнений Коши-Римана удовлетворяет условиям конформности

$$\mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_v^2 = E - G = 0; \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = F = 0. \tag{8}$$

В нашей последней вариационной задаче характерно то, что дифференциальным уравнением Эйлера здесь является уравнение (7). Требованию отображения границы C на Γ соответствует фиксированная зависимость между краевыми значениями x и y, и остающаяся при этом неопределенность в отношении способа отображения границ приводит к дальнейшему «естественному» краевому условию, эквивалентному добавочным условиям (8).

В самом деле, несмотря на то, что добавочные условия (8) имеют вид двух новых условий, относящихся ко всей области G, они по существу сводятся только к одному краевому условию, ибо для всякого гармонического вектора $\mathfrak{x}$ выражение (4) является аналитической функцией от комплексного переменного $w = u + iv$; поэтому достаточно, например, потребовать обращения в нуль вещественной части этой функции вдоль границы, чтобы обеспечить, не считая аддитивной постоянной, обращение в нуль $\varphi(w)$ во всей области $u^2 + v^2 \leqslant 1$, а, следовательно, и выполнение условий (8).

Это замечание наводит нас на мысль обратить эту связь и таким путем не только доказать теорему Римана с помощью формулированной только что вариационной задачи, но и рассмотреть одновременно с этим следующую, совершенно аналогичную вариационную задачу для вектора $\mathfrak{x}(u, v)$ с m компонентами $x_i(u, v)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Будем рассматривать в единичном круге B плоскости u, v векторы $\mathfrak{x}$ с m компонентами $x_i(u, v)$, обладающие внутри единичного круга кусочно-непрерывными производными, непрерывные в замкнутом единичном круге $B + C$ и отображающие непрерывно границу C единичного круга на заданную кривую Γ m-мерного пространства $\mathfrak{x}$. Среди этих векторов требуется найти тот, для которого интеграл Дирихле

$$D[\mathfrak{x}] = \iint\limits_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)\, du\, dv$$

принимает минимальное значение d.

Мы покажем в дальнейшем, что эта вариационная задача допускает решение, что это решение дается гармоническим вектором $\mathfrak{x}$, для которого $\Delta\mathfrak{x} = 0$, и что, наконец, решение $\mathfrak{x}$ удовлетворяет, кроме того, условиям (5). Таким образом, рассматривая нашу вариационную задачу, мы решим задачу Плато о нахождении односвязной, т. е. определенной как непрерывное изображение круга, минималь-

ной поверхности, имеющей заданную границу Г. Мы при этом предполагаем, что наша вариационная задача имеет смысл, т. е. что для заданной границы Г существуют векторы $\mathfrak{x}$, для которых интеграл Дирихле имеет конечное значение, что, например, имеет место в случае кусочно-гладкой границы Г.

2. Доказательство вариационных условий. Докажем прежде всего следующее: если вектор $\mathfrak{x}(u, v)$ является решением нашей вариационной задачи, то этот вектор должен удовлетворять условиям (1) и (2), характеризующим минимальную поверхность. При этом мы будем опираться на тот элементарный факт, что решение краевой задачи теории потенциала для круга является в то же самое время решением задачи о минимуме интеграла Дирихле (и притом единственным).

Применяя этот результат к каждой компоненте x_j вектора $\mathfrak{x}$ в отдельности, мы тотчас же получим, что решение $\mathfrak{x}$ нашей вариационной задачи должно быть гармоническим вектором, т. е. должно удовлетворять условию (1). Весь вопрос сводится к выводу условия (2). Для этой цели мы используем минимальное свойство гармонического вектора $\mathfrak{x}$, введя в единичном круге B полярные координаты r, ϑ и заменяя минимальный вектор $\mathfrak{x}(r, \vartheta)$ другим вариированным вектором $\mathfrak{z}(r, \vartheta)$, который мы определяем следующим образом:

$$\mathfrak{z}(r, \vartheta) = \mathfrak{x}(r, \varphi),$$

где

$$\varphi = \vartheta + \varepsilon\lambda(r, \vartheta).$$

При этом $\lambda(r, \vartheta)$ обозначает функцию, которая в некоторой окрестности $r = 0$ обращается в нуль, а в остальном является произвольной функцией, имеющей в замкнутом единичном круге непрерывные первые и вторые производные, а ε — достаточно малый параметр. Так как вектор $\mathfrak{z}$ удовлетворяет, очевидно, условиям допустимости нашей вариационной задачи, то

$$D[\mathfrak{z}] \geqslant d.$$

Мы можем теперь представить интеграл $D[\mathfrak{z}]$ в следующем виде, введя вместо r и ϑ в качестве независимых переменных r и φ:

$$D[\mathfrak{z}] = \iint\limits_B (\mathfrak{z}_u^2 + \mathfrak{z}_v^2)\, du\, dv = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathfrak{z}_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{z}_\vartheta^2\right) r\, dr\, d\vartheta =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left\{(\mathfrak{x}_r + \varepsilon\lambda_r\mathfrak{x}_\varphi)^2 + \frac{1}{r^2}(1 + \varepsilon\lambda_\vartheta)^2\mathfrak{x}_\varphi^2\right\} \frac{r}{1 + \varepsilon\lambda_\vartheta}\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathfrak{x}_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{x}_\varphi^2\right) r\, dr\, d\varphi +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left\{2\mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_\varphi\lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\varphi^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2\right)\lambda_\vartheta\right\} r\, dr\, d\varphi + \varepsilon^2 R.$$

Первый член в правой части равняется d. Коэффициент R при ε^2 остается ограниченным относительно ε, в чем нетрудно убедиться с помощью неравенства Шварца, пользуясь при оценке ограниченностью $|\lambda_r|$ и $|\lambda_\vartheta|$ и тем, что $D[\mathfrak{x}] = d$. Отсюда мы получаем, в силу условия $D[\mathfrak{z}] \geqslant d$ с помощью предельного перехода $\varepsilon \to 0$ и $\varphi \to \vartheta$:

$$\lim \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ 2\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\varphi \lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\varphi^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2 \right) \lambda_\vartheta \right\} r\,dr\,d\varphi = 0.$$

Так как часть этого двойного интеграла, взятая по пограничной полосе $t \leqslant r \leqslant 1$, вместе с $1-t$ стремится к нулю равномерно относительно ε, а в остальной части мы имеем право произвести предельный переход $\varepsilon \to 0$ под знаком интеграла, то мы получаем отсюда:

$$\lim_{t \to 1} \int_0^t \int_0^{2\pi} \left\{ 2\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\vartheta \lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\vartheta^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2 \right) \lambda_\vartheta \right\} r\,dr\,d\vartheta = 0.$$

Преобразуем это уравнение с помощью обычного интегрирования по частям, учитывая, что внутри круга имеет место уравнение Лапласа $\Delta\mathfrak{x} = 0$, к виду

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \vartheta)\, r\, \mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

где t снова заменено через r.

С другой стороны, как показывает простое вычисление, имеет место соотношение

$$-2r\,\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\vartheta = \mathfrak{J}(w^2 \varphi(w)), \tag{9}$$

где $\varphi(w) = (E - G) - 2iF$ обозначает введенную выше в формуле (4) аналитическую функцию, а символ $\mathfrak{J}$ обозначает, как обычно, мнимую часть.

Таким образом, так как $w^2\varphi(w)$ также является аналитической функцией комплексного переменного $w = u + iv$, выражение

$$2r\,\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\vartheta = p(r, \vartheta) = p(u, v)$$

является гармонической в B функцией, удовлетворяющей для произвольной, дважды непрерывно дифференцируемой в $B + C$ функции $\lambda(r, \vartheta)$ условию:

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \vartheta)\, p(r, \vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{10}$$

Замечая теперь, что значение гармонической функции $p(\rho, \varphi)$ в какой-нибудь фиксированной внутренней точке Q области B с координатами ρ, φ выражается интегралом вида (10), мы заключаем отсюда, что функция p тождественно обращается в нуль в области B. Точнее, мы выбираем в качестве $\lambda(r, \vartheta)$ функцию, обращающуюся

в нуль в некоторой окрестности точки Q, а при r, достаточно близком к 1, совпадающую с производной по нормали от функции Грина для концентрической окружности радиуса r с особой точкой Q; таким образом при r, достаточно близком к единице, функция $\lambda(r, \vartheta)$ выражается формулой

$$\lambda(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \vartheta) + \rho^2}.$$

Тогда из уравнения (10) непосредственно следует, что $\lim\limits_{r \to 1} p(\rho, \varphi) = 0$, так что $\mathfrak{J}(w^2\varphi(w)) = p(u, v) = 0$ во всех точках области B.

Отсюда следует, что вещественная часть аналитической функции $w^2\varphi(w)$ также постоянна в области B, и поэтому $w^2\varphi(w) = c = \text{const}$. или $\varphi(w) = \frac{c}{w^2}$.

Но аналитическая функция $\varphi(w)$ регулярна в точке $w = 0$, откуда следует, что $c = 0$ или $\varphi(w) = 0$, что и требовалось доказать.

3. Существование решения вариационной задачи. Нам остается доказать, что существует решение $\mathfrak{z}$ нашей первоначальной вариационной задачи.

Для построения этого решения мы рассматриваем минимизирующую последовательность допустимых векторов

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots,$$

т. е. последовательность, для которой имеет место условие

$$\lim_{\nu \to \infty} D[\mathfrak{z}_\nu] = d.$$

Если мы заменим теперь каждый из этих векторов гармоническим вектором с теми же краевыми значениями, то на основании принципа Дирихле для круга новая получающаяся таким путем последовательность векторов тем более будет минимизирующей последовательностью.

Далее, мы замечаем следующее: *интеграл Дирихле инвариантен относительно конформного отображения.* Это значит, что если две функции $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$ конформно отображают область B на область B', то для всякого вектора $\mathfrak{z}(u, v) = \mathfrak{z}'(u', v')$ имеет место равенство

$$\iint\limits_B (\mathfrak{z}_u^2 + \mathfrak{z}_v^2)\, du\, dv = \iint\limits_{B'} (\mathfrak{z}_{u'}'^2 + \mathfrak{z}_{v'}'^2)\, du'\, dv'.$$

Это непосредственно следует из характеристических условий конформного отображения: $u'_u = v'_v$; $u'_v = -v'_u$.

Мы можем теперь с помощью конформного, а именно дробно-линейного преобразования единичного круга в самого себя преобразовать любые три точки границы круга в три фиксированные точки. Так как при таком преобразовании остается неизменным значение интеграла $D[\mathfrak{z}] = D[\mathfrak{z}']$, то мы имеем право ввести в нашу вариа-

ционную задачу добавочное требование, чтобы три заданные точки границы C круга отображались на заданные три точки кривой Γ. Введя такое требование в отношении трех граничных точек, которое до сих пор было излишним, мы получим возможность провести доказательство существования, показав предварительно, что *краевые значения векторов* $\mathfrak{x}_\nu$ *образуют последовательность равностепенно непрерывных функций угла* ϑ.

Доказав это, мы сможем отсюда заключить согласно т. I, гл. II, § 2, что существует такая подпоследовательность векторов $\mathfrak{x}_\nu$, для которой краевые значения сходятся равномерно к некоторому предельному вектору.

Отсюда следует, что и соответствующие гармонические векторы также сходятся равномерно (см. гл. IV, § 3) и предельный вектор является гармоническим в B вектором, производящим требуемое отображение границы. В самом деле, в силу того, что в любой замкнутой частичной области B производные соответствующих гармонических векторов $\mathfrak{x}_\nu$ равномерно сходятся к производным предельного вектора, мы непосредственно получаем отсюда, что для этого вектора выполняется условие $D[\mathfrak{x}] \leqslant d$, а так как $\mathfrak{x}$ является допустимым вектором, то вследствие минимального свойства числа d $D[\mathfrak{x}] \geqslant d$, откуда и следует, что $D[\mathfrak{x}] = d$.

Итак, наше доказательство будет закончено после того, как мы докажем равностепенную непрерывность краевых значений векторов $\mathfrak{x}_\nu$.

Это будет следовать из следующей леммы:

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{x}$ — *некоторый допустимый вектор нашей вариационной задачи, удовлетворяющий условию* $D[\mathfrak{x}] \leqslant M$. *Обозначим через* R *какую-нибудь точку границы единичного круга* B. *Тогда для всякого положительного числа* $\delta < 1$ *существуют две точки* A *и* B, *лежащие на границе* C *круга* B *по разные стороны от точки* R *и на одинаковом расстоянии* ρ *от этой точки,* причем $\delta \leqslant \rho \leqslant \sqrt{\delta}$, *и такие, что имеет место условие*

$$|\mathfrak{x}(A) - \mathfrak{x}(B)|^2 \leqslant \frac{2M\pi}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

Таким образом, концы A и B дуги, содержащей точку R, отображаются вектором $\mathfrak{x}$ на сколь угодно близкие точки Γ, если выбрать δ достаточно малым.

С помощью этой леммы мы доказываем равностепенную непрерывность следующим образом.

Допустим, что заданная последовательность векторов $\mathfrak{x}_\nu$ не обладает свойством равностепенной непрерывности на границе C. Тогда должны существовать граничная точка R и бесконечное множество интервалов $P_\nu R Q_\nu$, которые содержат точку R и концы которых стремятся к R при неограниченном возрастании ν, обладающих тем свойством, что векторы $\mathfrak{x}_\nu$ отображают точки P_ν и Q_ν на точки P'_ν и Q'_ν линии Γ, рас-

стояние между которыми все время остается больше некоторого положительного числа α.

При фиксированном δ и достаточно большом ν точки P_ν и Q_ν лежат внутри дуги ARB. Поэтому, если обозначить через M верхнюю границу $D[\mathfrak{x}_\nu]$, дуга ARB отобразится вектором $\mathfrak{x}_\nu$ на дугу линии Γ, концы которой находятся друг от друга на расстоянии, меньшем величины

$$\varepsilon(\delta) = \sqrt{\frac{2\pi M}{\log \frac{1}{\delta}}},$$

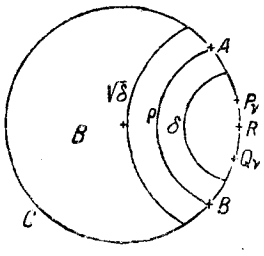
причем эта дуга имеет диаметр, превосходящий α.

Докажем теперь, что это противоречит нашим допущениям об отсутствии двойных точек на контуре Γ и о том, что векторы $\mathfrak{x}_\nu$ отображают три фиксированные точки окружности C на три фиксированные точки контура Γ.

В самом деле, для всякого непрерывного контура Γ, не имеющего двойных точек, существует величина $\eta(\varepsilon)$, стремящаяся вместе с ε к нулю и такая, что любые две точки P' и Q' контура Γ, расстояние которых меньше ε, ограничивают дугу Γ, вдоль которой расстояние между *любыми* двумя точками этой дуги не превосходит $\eta(\varepsilon)$. Если ε достаточно мало, то дополнительная дуга будет совпадать со всем контуром Γ с точностью до остаточной дуги, диаметр которой не превосходит $\eta(\varepsilon)$.

При достаточно малом δ написанное выше выражение $\varepsilon(\delta)$, а вместе с ним и $\eta(\varepsilon)$ становятся сколь угодно малыми.

Отсюда следует, что так как изображение дуги ARB при отображении с помощью вектора $\mathfrak{x}_\nu$ содержит при достаточно большом ν дугу, диаметр которой превосходит α, то оно покрывает весь контур Γ, не считая дуги диаметра, меньшего η.



Черт. 57.

При достаточно малом δ это будет противоречить нашему предположению, что три фиксированные точки окружности C (из которых, по крайней мере, две окажутся вне дуги ARB) отображаются на три фиксированные отличные друг от друга точки контура Γ.

Доказательство леммы. Так как вектор $\mathfrak{x}$ непрерывен в $B+C$, то, очевидно, достаточно доказать лемму, заменяя единичный круг меньшим концентрическим кругом, радиус которого сколь угодно близок к 1 [1]). Введем новую систему полярных координат r и ϑ, принимая за

[1]) Для такого концентрического круга мы имеем право интеграл по области $D[\mathfrak{x}]$ представить в виде двукратного интеграла, применяемого нами ниже.

начало этой новой системы координат точку окружности R, и положим $s = r\theta$; тогда

$$M \geqslant \iint\limits_B \mathfrak{x}_s^2 \, ds \, dr.$$

Рассмотрим теперь нигде неотрицательную функцию

$$p(r) = \int \mathfrak{x}_s^2 \, ds,$$

где интеграл берется по лежащей внутри рассматриваемого концентрического круга дуге окружности, описанной из точки R радиусом r.

Функция $p(r)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^l p(r) \, dr < M,$$

где l — фиксированное число < 2.

Мы утверждаем, что в промежутке $\delta < r < \sqrt{\delta}$ при любом $\delta < 1$ существует число $r = r_0$, для которого

$$p(r_0) \leqslant \frac{\sigma}{r_0},$$

где

$$\sigma = 2M \frac{1}{\log \frac{1}{\delta}}.$$

В самом деле, в противном случае мы получили бы:

$$\int\limits_{\delta}^{\sqrt{\delta}} p(r) \, dr > \sigma \int\limits_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma}{2} \log \frac{1}{\delta} = M,$$

что противоречит предположению.

Если мы теперь возьмем на дуге окружности $r = r_0$, для которой $r_0 p(r_0) \leqslant \sigma$, две точки P и Q, то, применяя неравенство Шварца к выражению

$$\left| \int\limits_P^Q \mathfrak{x}_s \, ds \right|^2 = |\mathfrak{x}(Q) - \mathfrak{x}(P)|^2,$$

мы получим:

$$|\mathfrak{x}(Q) - \mathfrak{x}(P)|^2 \leqslant \pi r_0 \int\limits_P^Q \mathfrak{x}_s^2 \, ds = \pi r_0 p(r_0) \leqslant \pi\sigma = \frac{2M\pi}{\log \frac{1}{\delta}},$$

что и утверждается в нашей лемме.

Таким образом, существование решения задачи Плато доказано [1]).

---

[1]) Решенная здесь задача Плато является частным случаем следующей задачи, сформулированной в полной общности Douglas'ом в 1930 г: доказать