

может быть аппроксимирована в смысле метрик D и H с помощью функций φ , пространства \mathfrak{D} , то и функция $v - g$ аппроксимируется функциями $\varphi' - \zeta$, также лежащими в пространстве \mathfrak{D} .

Вопрос о том, можно ли из формулированного нами краевого условия получить более точные утверждения относительно поведения функции u на границе и характера приближения u к своим краевым значениям, является с точки зрения нашей теории специальным вопросом, требующим особого рассмотрения. Мы займемся этим в § 4 и § 9, п. 3.

§ 2. Первая краевая задача

1. Постановка задачи. Повторим еще раз формулировку краевой задачи первого рода. Она относится к ограниченной открытой области G с границей Γ , к заданной функции g из \mathfrak{D} , функции f , кусочно-непрерывно дифференцируемой в G , непрерывной в $G + \Gamma$ и принадлежащей функциональному пространству \mathfrak{F} , и, наконец, к заданному в G дифференциальному выражению

$$L[u] = \frac{1}{k} [(pu_x)_x + (pu_y)_y - q^*u], \quad (1)$$

где

$$q^* = q - a_x - b_y. \quad (2)$$

Формулируется она так: Краевая задача 1. Требуется найти функцию u , принадлежащую подпространству \mathfrak{F} , для которой $u - g$ принадлежит подпространству \mathfrak{D} и которая в G удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f. \quad (3)$$

В частном случае $p = 1$, $q = a = b = 0$ наша краевая задача сводится к краевой задаче для дифференциального уравнения

$$\Delta u = -f. \quad (4)$$

Заметим, что формально эта задача эквивалентна другой задаче, в которой с самого начала положено $a = b = 0$, а функция q заменена функцией q^* . Однако, в силу введенного выше в § 1 условия $q \geq 0$ формулированная нами задача является несколько более общей, так как условие $q^* \geq 0$ может и не выполняться.

Для того, чтобы решить нашу краевую задачу, мы рассматриваем соответствующую вариационную задачу, которую формулируем так:

Вариационная задача I. Требуется найти функцию $\varphi = u$ из \mathfrak{D} , которая удовлетворяет краевому условию

$$\varphi - g \text{ содержится в } \mathfrak{D} \quad (5)$$

и для которой интегральное выражение

$$E[\varphi] = 2H[f, \varphi] \quad (6)$$

достигает минимума.

В частном случае $p = 1, a = b = q = 0$ мы получаем классическую вариационную задачу Дирихле $D[\varphi] = \min.$ с краевым условием (5).

2. Формула Грина. Основное неравенство между D и H . Единственность. С помощью определенных в § 1 линейных пространств мы можем легко выразить формулу Грина, избегая трудностей, вызываемых краевым членом этой формулы, а именно: если φ принадлежит пространству \mathfrak{F} , а ψ — пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, то

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]. \quad (7)$$

В частности, при $p = k = 1, a = b = q = 0$ мы получаем:

$$\iint_G \left\{ \varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y \right\} dx dy = - \iint_G \psi \Delta \varphi dx dy. \quad (8)$$

Доказательство. Если $\psi = \psi^*$ лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$, то эта формула получается тривиальным путем с помощью интегрирования по частям. Рассматривая теперь последовательность функций ψ^* из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой

$$H[\psi^* - \psi] \rightarrow 0, \quad D[\psi^* - \psi] \rightarrow 0, \quad (9)$$

мы убеждаемся в справедливости формулы Грина (7) для любой функции ψ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с помощью предельного перехода (замыкания) на основании теорем 4, 5 и 1 из § 1.

Основное неравенство I. Для области G существует такая константа γ , что для любой функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место неравенство

$$H[\varphi] \leq \gamma D[\varphi]. \quad (10)$$

Доказательство. Так как с помощью процесса замыкания мы можем в этом неравенстве перейти от функций φ^* из $\mathring{\mathfrak{D}}$ к функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, то достаточно доказать это неравенство для функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Далее, в силу уравнений (20) и (21) из § 1 мы имеем право допустить, что $p = k = 1$. Обозначим через Q квадрат $|x| < a, |y| < a$, содержащий область G . Продолжим функцию φ непрерывно на весь квадрат Q , полагая $\varphi = 0$ во всех точках Q , лежащих вне области G . Тогда на основании неравенства Шварца мы получаем, что в каждой точке (x_1, y_1) квадрата Q имеет место неравенство

$$\varphi^2(x_1, y_1) = \left| \int_{-a}^{x_1} \varphi_x(x, y_1) dx \right|^2 \leq 2a \int_{-a}^{x_1} \varphi_x^2(x, y_1) dx.$$

Интегрируя это неравенство по x_1, y_1 , заставляя при этом точку x_1, y_1 пробегать весь квадрат Q , мы получим

$$H[\varphi] = H_Q[\varphi] \leq 4a^2 \iint_Q \varphi_x^2 dx dy \leq 4a^2 D_Q[\varphi] = 4a^2 D[\varphi],$$

что и доказывает наше неравенство для $\gamma = 4a^2$.

Докажем теперь следующие теоремы.

Теорема 1. Теорема о единственности. *Краевая задача I не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Разность двух решений представляла бы собой функцию u , лежащую в пространстве \mathfrak{D} , для которой $L[u] = 0$. Из формулы Грина следует тогда $E[u] = 0$; так как $E[u] \geq xD[u]$ [см. § 1, формула (9)], то и $D[u] = 0$, а в силу нашего основного неравенства мы получаем $H[u] = 0$, откуда и следует вследствие непрерывности функции u , что u тождественно равна нулю.

В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство: если через x и γ обозначить константы, фигурирующие в неравенстве (9) из § 1 и неравенстве (10) этого параграфа, то для всех функций φ из \mathfrak{D} и f из \mathfrak{H} имеет место оценка

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \geq \frac{1}{2} E[\varphi] - \frac{2\gamma}{x} H[f]. \quad (11)$$

В самом деле, с одной стороны, мы имеем

$$2|H[f, \varphi]| \leq \frac{x}{2\gamma} H[\varphi] + \frac{2\gamma}{x} H[f],$$

а, с другой стороны, $H[\varphi] \leq \gamma D[\varphi]$ и $D[\varphi] \leq \frac{1}{x} E[\varphi]$ [см. формулу (10) и § 1, формулу (9)]. Следовательно,

$$2|H[f, \varphi]| \leq \frac{1}{2} E[\varphi] + \frac{2\gamma}{x} H[f],$$

откуда и следует неравенство (11).

Из этой оценки получается непосредственно следующая теорема:

Теорема 2. *Вариационная задача I имеет смысл, т. е. выражение $E[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ имеет конечную нижнюю границу для всех φ из \mathfrak{D} и далее:*

Теорема 3. *Решение краевой задачи I является в то же самое время решением вариационной задачи I.*

Доказательство. Пусть u обозначает решение краевой задачи, а $\varphi = u + \zeta$ — какую-нибудь допустимую функцию сравнения, так что ζ принадлежит пространству \mathfrak{D} ; на основании формулы Грина (7) имеем $E[u, \zeta] = H[f, \zeta]$, откуда мы получаем непосредственно:

$$\begin{aligned} E[u + \zeta] - 2H[f, u + \zeta] &= E[u] - 2H[f, u] + \\ &\quad + E[\zeta] \geq E[u] - 2H[f, u], \end{aligned}$$

причем равенство может иметь место только при $\zeta = 0$.

Наша задача заключается теперь в том, чтобы, обратно, сначала непосредственно найти решение вариационной задачи, а затем таким путем решить рассматриваемую краевую задачу. Решающую

роль будет при этом играть понятие «*минимизирующей последовательности*».

3. Минимизирующие последовательности и решение краевой задачи. Если d — нижняя граница вариационного выражения $E[\varphi] = -2H[f, \varphi]$ при перечисленных выше условиях, то мы называем минимизирующей последовательностью всякую последовательность функций φ^n пространства \mathfrak{D} , для которой $d_n = E[\varphi^n] = -2H[f, \varphi^n] \rightarrow d$.

Существование таких минимизирующих последовательностей является очевидным. Однако, отнюдь не очевидно, что с помощью таких минимизирующих последовательностей можно получить искомое решение путем сходящихся предельных процессов!

Как мы уже видели в т. I, гл. IV, § 2, п. 4, нельзя ожидать, что минимизирующая последовательность будет обязательно сходиться в обыкновенном смысле к некоторой предельной функции, а в случае сходимости еще остается открытый вопрос, можно ли отождествить предельную функцию с искомым решением.

Основу для преодоления возникающих трудностей дает следующая фундаментальная теорема, которая здесь заменяет обычное вариационное условие обращения в нуль первой вариации:

Теорема 4. *Если φ^n — минимизирующая последовательность, а ζ^n — произвольная последовательность функций из \mathfrak{D} , для которой выражение $E[\zeta^n]$ остается равномерно ограниченным, так что $E[\zeta^n] \leq M$, то имеет место соотношение*

$$E[\varphi^n, \zeta^n] = H[f, \varphi^n + \epsilon \zeta^n] \rightarrow 0. \quad (12)$$

Доказательство. Для неотрицательных величин $\sigma_n = d_n - d$ имеет место соотношение $0 \leq \sigma_n \rightarrow 0$. Далее, для любого значения параметра ϵ имеем:

$$E[\varphi^n + \epsilon \zeta^n] = -2H[f, \varphi^n + \epsilon \zeta^n] \geq d.$$

Полагая

$$\alpha_n = E[\varphi^n, \zeta^n] = H[f, \zeta^n],$$

мы получаем отсюда:

$$\sigma_n + 2\epsilon \alpha_n + \epsilon^2 E[\zeta^n] \geq 0,$$

так что тем более имеет место неравенство

$$\sigma_n + 2\epsilon \alpha_n + \epsilon^2 M \geq 0.$$

Выберем теперь при фиксированном $|\epsilon|$ индекс $v = v(\epsilon)$ настолько большим, чтобы $\sigma_n < \epsilon^2 M$; знак же ϵ мы выбираем в зависимости от v так, чтобы выполнялось условие $\epsilon \alpha_n \leq 0$. Тогда

$$2\epsilon^2 M \geq 2|\epsilon| |\alpha_n|, \text{ откуда } |\alpha_n| \leq M |\epsilon|,$$

что и доказывает нашу теорему, так как $|\epsilon|$ можно сделать сколь угодно малым.

Заметим, что в силу неравенства (11) величины $E[\varphi^n]$ для минимизирующей последовательности остаются ограниченными; поэтому

величины $E[\varphi^v - \varphi^u]$ также ограничены, как это непосредственно следует из неравенства треугольника

$$\sqrt{E[\varphi^v - \varphi^u]} \leq \sqrt{E[\varphi^v]} + \sqrt{E[\varphi^u]}.$$

Мы можем, таким образом, в (12) положить $\zeta_v = \varphi^v - \varphi^u$, где u стремится вместе с v к ∞ . Мы получим:

$$E[\varphi^v, \varphi^v - \varphi^u] - H[f, \varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0$$

и точно так же, переставляя между собой u и v ,

$$E[\varphi^u, \varphi^v - \varphi^u] - H[f, \varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0,$$

т. е. оба эти выражения становятся сколь угодно малыми при достаточно больших значениях u и v . Отсюда с помощью вычитания мы заключаем, что

$$E[\varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0,$$

а в силу (9), § 1 и основного неравенства I мы получаем следующую теорему:

Теорема 5. Для всякой минимизирующей последовательности φ^v нашей вариационной задачи имеют место соотношения

$$E[\varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0, \quad (13)$$

$$D[\varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$H[\varphi^v - \varphi^u] \rightarrow 0. \quad (15)$$

Мы увидим впоследствии, что соотношения (12), (13), (14) и (15) дают возможность построить предельную функцию u , и, опираясь на эти соотношения, мы выведем все свойства этой функции u , характеризующие ее как решение нашей задачи. Доказательство будет основано на рассмотрениях общего характера, не зависящих от особого вида краевых условий и в одинаковой мере применимых как к краевым задачам, так и к задачам о собственных значениях при краевых условиях любого типа. Эти рассмотрения будут изложены в § 5; они приведут нас к формулированным там теоремам 1 и 2, из которых непосредственно вытекает для рассматриваемого теперь случая следующий результат:

Существует функция u из \mathfrak{D} и \mathfrak{F} , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f,$$

для которой имеют место соотношения

$$E[\varphi^v - u] \rightarrow 0, \quad D[\varphi^v - u] \rightarrow 0, \quad H[\varphi^v - u] \rightarrow 0. \quad (16)$$

Так как из уравнений (16) непосредственно следует, что

$$D[(\varphi^v - g) - (u - g)] \rightarrow 0, \quad H[(\varphi^v - g) - (u - g)] \rightarrow 0,$$

то из теоремы 6, § 1 вытекает, что функция $u - g$ также лежит в \mathfrak{D} . Принимая, далее, во внимание теорему 4, § 1, мы получим, что из уравнений (16) следует

$$D[u] = d.$$

Таким образом, u является также решением вариационной задачи I.

Итак, вариационная задача I так же, как и краевая задача I, имеет однозначно определенное решение.

§ 3. Задача о собственных значениях с нулевыми краевыми значениями

1. Интегральные неравенства. Чтобы решить задачу о собственных значениях, относящуюся к дифференциальному выражению $L[u]$, мы должны предварительно вывести еще некоторые неравенства между интегралами D и H .

Неравенство II (Неравенство Пуанкаре для квадрата.) Пусть $G = Q$ — квадрат, имеющий стороны длины s . Пусть, далее, φ — некоторая функция из \mathfrak{D}_Q . Тогда имеет место следующее неравенство:

$$H_Q[\varphi] \leq \frac{1}{\iint_Q k \, dx \, dy} \left\{ \iint_Q k \varphi \, dx \, dy \right\}^2 + \frac{k_1}{p_0} s^2 D_Q[\varphi]. \quad (1)$$

При этом k_1 обозначает верхнюю границу k , а p_0 — нижнюю границу p в квадрате Q .

Из неравенства (1) непосредственно следует

$$H_Q[\varphi] \leq \frac{1}{s^2 k_0} \left\{ \iint_Q k \varphi \, dx \, dy \right\}^2 + \frac{k_1}{p_0} s^2 D_Q[\varphi]. \quad (1a)$$

Заметим, что в этом неравенстве функция φ не предполагается подчиненной никаким краевым условиям¹⁾.

Доказательство. Пусть квадрат Q задан, например, условиями $0 < x < s$, $0 < y < s$. Из тождества

$$\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_x(x, y_2) \, dx + \int_{y_1}^{y_2} \varphi_y(x_1, y) \, dy,$$

имеющего место для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) квадрата Q , следует, с помощью неравенства Шварца,

$$\{ \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) \}^2 \leq 2s \int_0^s \varphi_x^2(x, y_2) \, dx + 2s \int_0^s \varphi_y^2(x_1, y) \, dy.$$

¹⁾ Неравенство Пуанкаре (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1894) выражает просто тот факт, что для квадрата второе собственное значение дифференциального уравнения $(pu_x)_x + (pu_y)_y + \lambda ku = 0$ с краевым условием обращения в нуль производной по нормали положительно. См. также § 6 и § 7.