Таким образом, u является также решением вариационной задачи I.

Итак, вариационная задача I *так же, как и краевая задача* I, *имеет однозначно определенное решение.*

§ 3. Задача о собственных значениях с нулевыми краевыми значениями

1. Интегральные неравенства. Чтобы решить задачу о собственных значениях, относящуюся к дифференциальному выражению $L[u]$, мы должны предварительно вывести еще некоторые неравенства между интегралами D и H.

Неравенство II (Неравенство Пуанкаре для квадрата.) Пусть $G = Q$ — квадрат, имеющий стороны длины s. Пусть, далее, φ — некоторая функция из $\mathfrak{D}_Q$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_Q k\,dx\,dy}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0}s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1}$$

При этом k_1 обозначает верхнюю границу k, а p_0 — нижнюю границу p в квадрате Q.

Из неравенства (1) непосредственно следует

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{s^2 k_0}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0}s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1a}$$

Заметим, что в этом неравенстве функция φ не предполагается подчиненной никаким краевым условиям [1]).

Доказательство. Пусть квадрат Q задан, например, условиями $0 < x < s$, $0 < y < s$. Из тождества

$$\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_x(x, y_2)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi_y(x_1, y)\,dy,$$

имеющего место для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) квадрата Q, следует, с помощью неравенства Шварца,

$$\{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)\}^2 \leqslant 2s\int\limits_0^s \varphi_x^2(x, y_2)\,dx + 2s\int\limits_0^s \varphi_y^2(x_1, y)\,dy.$$

---

[1]) Неравенство Пуанкаре (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1894) выражает просто тот факт, что для квадрата второе собственное значение дифференциального уравнения $(pu_x)_x + (pu_y)_y + \lambda ku = 0$ с краевым условием обращения в нуль производной по нормали положительно. См. также § 6 и § 7.

Умножая на $k(x_1, y_1)k(x_2, y_2)$ и интегрируя по всем четырем переменным x_1, x_2, y_1, y_2 в пределах от нуля до s, мы получим слева

$$2H[\varphi]\iint\limits_Q k\,dx\,dy - 2\left(\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right)^2,$$

а справа выражение, не превосходящее

$$2s^2\frac{k_1}{p_0}D[\varphi]\iint\limits_Q k\,dx\,dy,$$

откуда непосредственно и следует неравенство Пуанкаре.

В неравенстве Пуанкаре существенно то, что множитель перед интегралом D пропорционален площади квадрата и стремится к нулю, когда s стремится к нулю.

Применим неравенство Пуанкаре для доказательства следующей теоремы:

Теорема 1 (Неравенство Фридрихса)[1]. *Для всякой ограниченной области G и любого положительного ε существует целое число N и «координатные функции» $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ из $\mathfrak{D}$ такие, что для любой* функции φ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ *имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\varphi, \omega_\nu] + \varepsilon D[\varphi]. \tag{2}$$

Согласно уже несколько раз проводившемуся нами рассуждению, достаточно доказать неравенство (2) для функций φ из $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо с помощью процесса замыкания мы непосредственно распространим этот результат на функциональное пространство $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, замыкающее пространство $\dot{\mathfrak{D}}$. Пусть Q снова обозначает квадрат с длиной стороны s, содержащий область G. Разобьем Q на $L = M^2$ конгруэнтных квадратов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$, причем Q_λ — квадрат со стороной длины $s_0 = \frac{s}{M}$. Рассматриваемую функцию φ из $\dot{\mathfrak{D}}$ продолжим на весь квадрат Q, полагая $\varphi = 0$ вне G. Применим теперь неравенство Пуанкаре ко всем квадратам Q_λ и сложим все неравенства. Мы получим:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{k_0 s_0^2}\sum_{\lambda=1}^{L}\left(\iint\limits_{Q_\lambda} k\varphi\,dx\,dy\right)^2 + s_0^2\frac{k_1}{p_0}D_Q[\varphi].$$

---

[1]) Это неравенство было, повидимому, впервые введено К. Фридрихсом для удобной формулировки тотальной непрерывности (Vollstetigkeit) формы H относительно метрической формы D (см. *Math. Ann.*, т. 109, стр. 486). Относительно понятия тотальной непрерывности см. статью в математической энциклопедии: Hellinger und Toeplitz, Энциклопедия, т. II, стр. 13.

Мы определяем теперь функцию ω_λ, полагая $\omega_\lambda = 0$ вне Q_λ и вне G и $\omega_\lambda = \frac{1}{s_0 \sqrt{k_0}}$ внутри Q_λ; предыдущее неравенство принимает тогда вид:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \sum_{\lambda=1}^{L} H^2[\varphi, \omega_\lambda] + \frac{s\, k_1}{p_0 M^2} D_Q[\varphi].$$

Так как $D_Q[\varphi] = D[\varphi]$, а M может быть сколь угодно большим, то отсюда и следует неравенство (2). Из неравенства (2) очень просто получается следующая теорема, принадлежащая Ф. Реллиху [1]).

Теорема 2. (*Теорема Реллиха о выборе сходящейся функциональной подпоследовательности.*) *Пусть φ^ν — некоторая последовательность функций из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $D[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ равномерно ограничены, так что $D[\varphi^\nu] \leqslant A$, $H[\varphi^\nu] \leqslant A$. Тогда существует такая подпоследовательность функций φ^ν, для которой имеет место условие $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$* [2]).

Для доказательства заметим, что в силу неравенства треугольника имеют место неравенства

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A, \quad H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A.$$

Пусть l — произвольное целое число; положим в теореме 1 $\varepsilon = \frac{1}{l}$ и построим согласно теореме 1 соответствующую систему координатных функций $\omega_\lambda = \omega_{\lambda, l}$. Для каждого целого положительного l мы можем найти такую подпоследовательность $\varphi_{\nu, l}$ заданной последовательности φ^ν, которая содержится в предшествующей подпоследовательности $\varphi_{\nu, l-1}$ с индексом $l-1$ и обладает следующим свойством: конечное число числовых последовательностей $H[\varphi^\nu, \omega_{\lambda, l}]$ при $\lambda = 1, 2, \ldots, L$ сходятся для этих подпоследовательностей $\varphi^\nu = \varphi_{\nu, l}$. Отсюда следует, что для подпоследовательностей $\varphi^\nu = \varphi_{\nu, l}$ имеет место соотношение $H[\varphi^\mu - \varphi^\nu, \omega_{\lambda, l}] \to 0$ при $\mu, \nu \to \infty$ и при $\lambda = 1, 2, \ldots, L$. Мы можем поэтому в такой подпоследовательности выбрать настолько большие значения индексов μ и ν, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \left\{ \iint_G k\,(\varphi^\nu - \varphi^\mu)\, \omega_{\lambda, l}\, dx\, dy \right\}^2 \leqslant \varepsilon A.$$

На основании нашего неравенства (2) и в силу того, что $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 4A$, мы получаем:

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqslant 5\varepsilon A.$$

---

[1]) См. Rellich, *Gött. Nachrichten*, 1930.

[2]) Как будет показано в § 8, вместо ограниченности φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ — достаточно потребовать ограниченность φ из $\mathfrak{D}$, если только сделать некоторые предположения относительно области G.

Так как $\varepsilon = \frac{1}{l}$ становится сколь угодно малым, когда целое число l пробегает весь ряд натуральных чисел, то мы получим нашу теорему, выбирая, как обычно, диагональную последовательность $\varphi_{l,l}$ из построенной двойной бесконечной последовательности $\varphi_{\nu,l}$ (см. т. I, гл. II, § 2).

2. Первая задача о собственных значениях. Мы исходим из следующей задачи:

Задача о собственных значениях II. *Требуется найти такое число λ, для которого существует функция u из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, принадлежащая $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению*

$$L[u] + \lambda u = 0. \tag{3}$$

Для решения этой задачи мы рассмотрим следующую вариационную задачу:

Вариационная задача II. *Среди всех функций φ из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих дополнительному условию*

$$H[\varphi] = 1, \tag{4}$$

найти ту, для которой интеграл $E[\varphi]$ достигает минимального значения λ.

Докажем, что наша вариационная задача имеет решение u, которое вместе с тем является решением задачи о собственных значениях II.

Заметим прежде всего, что наша вариационная задача имеет смысл, так как при указанных условиях существует положительная нижняя граница λ для $E[\varphi]$ или, что совершенно равносильно, для отношения $\frac{E[\varphi]}{H[\varphi]}$, если отбросить дополнительное условие (4). Поэтому существует минимизирующая последовательность $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots$, для которой

$$H[\varphi^\nu] = 1 \tag{5}$$

и

$$E[\varphi^\nu] \to \lambda. \tag{6}$$

Если ζ^ν обозначает произвольную последовательность функций из $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$, то при любом значении параметра ε имеем $\frac{E[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]}{H[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]} \geqslant \lambda$, так что

$$E[\varphi^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu] + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2\{E[\zeta^\nu] - \lambda H[\zeta^\nu]\} \geqslant 0,$$

где

$$\alpha_\nu = E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu].$$

Если все ζ^ν удовлетворяют условию

$$E[\zeta^\nu] \leqslant M, \tag{7}$$

где M — фиксированная константа, то, повторяя дословно доказательство теоремы 4, § 2, мы получим следующий результат:

Теорема 3. *Для всякой последовательности функций* ζ^ν *из* $\mathring{\mathfrak{D}}$, *удовлетворяющих условию* (7), *имеет место соотношение*

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0. \tag{8}$$

Далее, отсюда получается совершенно таким же образом, как и в § 2, что для всякой минимизирующей последовательности φ^ν нашей вариационной задачи II имеет место соотношение

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{9}$$

На основании теоремы Реллиха о выборе функциональной подпоследовательности можно выбрать такую подпоследовательность φ^ν, что для нее имеет место условие $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$. В силу формулы (9) получается тогда:

Теорема 4. *Для вариационной задачи* II *существует минимизирующая последовательность* φ^ν, *для которой выполняются условия*

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{10}$$

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0 \tag{11}$$

и

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{12}$$

Мы теперь снова сошлемся на теоремы 1 и 2 из § 5, заменяя там q через $q - \lambda k$ и полагая $f = 0$. Согласно этим теоремам из соотношений (8), (10), (11) и (12) следует существование дважды непрерывно дифференцируемой функции u из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3) и для которой выполняются условия

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad H[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, далее, на основании теоремы 6, § 1, что функция u содержится в подпространстве $\mathring{\mathfrak{D}}$, так как φ^ν лежат в $\mathring{\mathfrak{D}}$. *Таким образом, функция* u *является решением задачи о собственных значениях* II.

Но по теореме 4, § 1 из соотношений (13) следует также, что $E[\varphi^\nu] \to E[u]$, $H[\varphi^\nu] \to H[u]$, так что $E[u] = \lambda$, $H[u] = 1$ и, следовательно, функция u является также решением вариационной задачи II. Заметим, между прочим, что из соотношения (8) на основании условий (13) получается, что для всех функций ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место соотношение

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0. \tag{14}$$

3. Собственные значения и собственные функции высших порядков. Полнота. Чтобы получить следующие собственные значения и собственные функции и чтобы доказать затем полноту полученной системы, мы повторим и дополним процесс, примененный уже нами в т. I, гл. VI.

Обозначим полученное нами выше первое собственное значение через λ_1, соответствующую первую собственную функцию через u_1 и

построим второе собственное значение λ_2 и соответствующую вторую собственную функцию u_2, решая следующую вариационную задачу:

Вариационная задача II_2. *Среди всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих квадратичному дополнительному условию*

$$H[\varphi]=1 \tag{4}$$

и линейному дополнительному условию

$$H[\varphi,\ u_1]=0, \tag{15}$$

найти ту, для которой выражение $E[\varphi]$ имеет наименьшее значение.

Если λ_2 — нижняя граница $E[\varphi]$ при условиях (4) и (15), а φ^1, $\varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots$ — минимизирующая последовательность, то для всякой последовательности функций η^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$, удовлетворяющих условиям

$$H[u_1,\ \eta^\nu]=0 \tag{16}$$

и

$$E[\eta^\nu]\leqslant M, \tag{17}$$

где M — фиксированная постоянная, мы получим совершенно так же, как и в п. 2, что имеет место вариационное условие

$$E[\varphi^\nu,\ \eta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \eta^\nu]\to 0. \tag{18}$$

Докажем теперь, что уравнение (18) имеет место также и для последовательностей ζ^ν, не удовлетворяющих условию (16). В самом деле, пусть ζ^ν — произвольная последовательность функций из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $E[\zeta^\nu]$ равномерно ограничено; определим числа τ_ν с помощью уравнения $H[u_1,\ \zeta^\nu]+\tau_\nu=0$ и образуем функции $\eta^\nu=\zeta^\nu+\tau_\nu u_1$; очевидно, функции η^ν дают последовательность с ограниченным $E[\eta^\nu]$, удовлетворяя при этом условию (16). Отсюда следует, что

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\tau_\nu\{E[\varphi^\nu,\ u_1]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ u_1]\}\to 0.$$

Но по условию $H[\varphi^\nu,\ u_1]=0$; поэтому, полагая в уравнении (14) $u=u_1$, $\zeta=\varphi^\nu$, мы получим, что и $E[\varphi^\nu,\ u_1]=0$, так что имеет место условие

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-\lambda_2 H[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]\to 0 \tag{19}$$

для *любой* функциональной последовательности ζ^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с ограниченным $E[\zeta^\nu]$. Но уравнение (19) совпадает с уравнением (8), из которого мы заключили с помощью теоремы Реллиха и теорем 1 и 2 из § 5 о существовании λ_1 и u_1. Поэтому отсюда получается точно таким же образом существование второго собственного значения λ_2 и соответствующей собственной функции u_2 из $\mathring{\mathfrak{D}}$ и $\mathfrak{F}$, для которых выполняются условия

$$L[u_2]+\lambda_2 u_2=0, \tag{20}$$

$$E[u_2]=\lambda_2,\qquad H[u_2]=1,\qquad H[u_1,\ u_2]=0, \tag{21}$$

$$E[u_2,\ \zeta]=\lambda_2 H[u_2,\ \zeta] \tag{22}$$

для любой функции ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Продолжая этот процесс, мы получим совершенно аналогичным путем следующую теорему:

Теорема 5. *Существует бесконечная последовательность собственных значений и собственных функций λ_n и u_n, являющихся решениями задачи о собственных значениях* II. *Эти функции u_n являются в то же время последовательными решениями следующих рекуррентных вариационных задач: найти функцию $\varphi = u_n$ из $\mathring{\mathfrak{D}}$, для которой $E[\varphi]$ достигает минимума при дополнительных условиях*

$$H[\varphi] = 1, \qquad H[\varphi, u_j] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

При этом имеют место соотношения $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ldots$ и условия ортогональности

$$H[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \qquad E[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} \lambda_\nu & \text{при} \quad \nu = \mu \\ 0 & \phantom{\text{при}} \quad \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{23}$$

Докажем теперь следующие теоремы:

Теорема 6. *При возрастании n собственное значение λ_n стремится к бесконечности.*

Доказательство (см. т. I, гл. VI, § 2, п. 2). В противном случае значения $D[u_n]$ были бы ограничены для бесконечной последовательности значений n, тогда как $H[u_n] = 1$; поэтому мы могли бы на основании теоремы Реллиха выбрать подпоследовательность u_n, для которой $H[u_n - u_m] \to 0$, тогда как в силу условий ортогональности (23) мы имеем:

$$H[u_n - u_m] = H[u_n] + H[u_m] - 2H[u_n, u_m] = 2;$$

это противоречие и доказывает несправедливость нашего допущения, что λ_n не стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n.

Далее, имеет место

Теорема 7 (теорема полноты). *Пусть φ — какая-нибудь функция из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Положим*

$$c_n = H[u_n, \varphi] \quad \text{и} \quad \psi_n = \varphi - \sum_{j=1}^{n} c_j u_j.$$

Тогда выполняются условия полноты

$$H[\psi_n] \to 0 \tag{24}$$

и

$$E[\psi_n] \to 0 \tag{25}$$

и эквивалентные условия

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \tag{26}$$

$$E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2. \tag{27}$$

Доказательство. Для функций ψ_n имеет место уравнение $H[\psi_n, u_j]=0$ при $j \leqslant n$. Поэтому в силу минимального свойства λ_{n+1} имеем:

$$E[\psi_n] \geqslant \lambda_{n+1} H[\psi_n]. \tag{28}$$

Вследствие условий ортогональности (23) мы имеем, с другой стороны,

$$H[\psi_n] = H[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} c_j^2; \tag{29}$$

$$E[\psi_n] = E[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2, \tag{30}$$

откуда вытекает сходимость бесконечных рядов, стоящих в правых частях уравнений (26) и (27), и неравенство $E[\psi_n] \leqslant E[\varphi]$, так что мы получаем в силу неравенства (28)

$$H[\psi_n] \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} E[\varphi]$$

и, следовательно, на основании теоремы 6 имеем $H[\psi_n] \to 0$, а отсюда в силу (29) получается равенство (26).

Далее, так как

$$H[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} c_j^2, \qquad E[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j c_j^2,$$

то из сходимости рядов (26) и (27) следует

$$H[\psi_n - \psi_m] \to 0, \qquad E[\psi_n - \psi_m] \to 0. \tag{31}$$

Из того, что $H[\psi_n] \to 0$, следует в силу теоремы 5, § 1, что

$$H[\psi_n, \zeta] \to 0 \tag{32}$$

для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$. Опираясь теперь на теорему 2 из § 5, мы заключаем из уравнений (31) и (32), что имеет место соотношение (25), а вместе с ним в силу уравнения (30) выполняется также условие (27), так что теорема о полноте доказана.

§ 4. Характер приближения к краевым значениям в случае двух независимых переменных

В случае двух независимых переменных[1]) x и y мы получаем в отношении характера приближения функции к краевым значениям более точный результат по сравнению с условием, чтобы $u-g$ или u содержалось в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Именно, в случае двух измерений мы можем из этого условия заключить, что $u-g$ или u действительно стремится

[1]) В случае большего числа независимых переменных дело обстоит совершенно иначе; по этому поводу укажем снова на замечания, сделанные в гл. IV, стр. 307, а также на результаты Н. Винера, цитированные на стр. 322.