Доказательство. Для функций ψ_n имеет место уравнение $H[\psi_n, u_j]=0$ при $j \leqslant n$. Поэтому в силу минимального свойства λ_{n+1} имеем:

$$E[\psi_n] \geqslant \lambda_{n+1} H[\psi_n]. \tag{28}$$

Вследствие условий ортогональности (23) мы имеем, с другой стороны,

$$H[\psi_n] = H[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} c_j^2; \tag{29}$$

$$E[\psi_n] = E[\varphi] - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2, \tag{30}$$

откуда вытекает сходимость бесконечных рядов, стоящих в правых частях уравнений (26) и (27), и неравенство $E[\psi_n] \leqslant E[\varphi]$, так что мы получаем в силу неравенства (28)

$$H[\psi_n] \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} E[\varphi]$$

и, следовательно, на основании теоремы 6 имеем $H[\psi_n] \to 0$, а отсюда в силу (29) получается равенство (26).

Далее, так как

$$H[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} c_j^2, \qquad E[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j c_j^2,$$

то из сходимости рядов (26) и (27) следует

$$H[\psi_n - \psi_m] \to 0, \qquad E[\psi_n - \psi_m] \to 0. \tag{31}$$

Из того, что $H[\psi_n] \to 0$, следует в силу теоремы 5, § 1, что

$$H[\psi_n, \zeta] \to 0 \tag{32}$$

для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$. Опираясь теперь на теорему 2 из § 5, мы заключаем из уравнений (31) и (32), что имеет место соотношение (25), а вместе с ним в силу уравнения (30) выполняется также условие (27), так что теорема о полноте доказана.

§ 4. Характер приближения к краевым значениям в случае двух независимых переменных

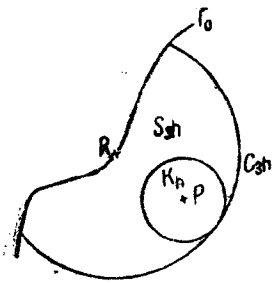
В случае двух независимых переменных[1]) x и y мы получаем в отношении характера приближения функции к краевым значениям более точный результат по сравнению с условием, чтобы $u-g$ или u содержалось в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Именно, в случае двух измерений мы можем из этого условия заключить, что $u-g$ или u действительно стремится

[1]) В случае большего числа независимых переменных дело обстоит совершенно иначе; по этому поводу укажем снова на замечания, сделанные в гл. IV, стр. 307, а также на результаты Н. Винера, цитированные на стр. 322.

к нулю, когда точка (x, y) области G неограниченно приближается к точке границы Γ.

При этом, однако, мы должны сделать еще дополнительные допущения относительно характера рассматриваемых граничных точек; так, например, мы не можем ожидать, что функция u действительно принимает заданные граничные значения в изолированных граничных точках, ибо в случае изолированной граничной точки речь идет об «устранимой» особенности. Мы предполагаем, что $p = k = 1$, ограничиваясь, таким образом, дифференциальным выражением $\Delta\varphi - q^*\varphi$. Сформулируем теперь следующую теорему, относящуюся к любой функции φ, принадлежащей к $\mathring{\mathfrak{D}}$ и $\mathfrak{F}$, для которой $\Delta\varphi$ принадлежит к $\mathfrak{H}$.

Теорема. *Пусть Γ_0 — замкнутое множество граничных точек, обладающее тем свойством, что всякая окружность, описанная из любой точки Γ_0 достаточно малым радиусом, пересекает Γ_0, по крайней мере, в одной точке; это условие, например, выполняется в случае, когда Γ_0 является непрерывной линией. Обозначим через φ некоторую функцию из $\mathfrak{F}$, через g некоторую непрерывную в $G + \Gamma$ функцию из $\mathfrak{D}$ и пусть $\varphi - g$ лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Тогда $\varphi - g$ стремится к нулю, когда точка (x, y) области G стремится к внутренней точке множества Γ_0. При этом мы называем внутренней точкой Γ_0 такую точку на Γ_0, расстояние которой от дополнительного множества граничных точек $\Gamma - \Gamma_0$ больше нуля.*



Черт. 53.

В частности, мы получаем, что как для краевой задачи дифференциального уравнения $\Delta u - q^*u = -f$, так и для задачи о собственных значениях дифференциального уравнения

$$\Delta u - q^*u + \lambda u = 0$$

решение u действительно принимает вдоль границы Γ_0 краевые значения g или соответственно нуль.

Пусть P точка области G, находящаяся на расстоянии $2h$ от границы Γ; обозначим через R точку границы Γ, для которой расстояние $\overline{PR} = 2h$. Допустим, что P находится настолько близко от некоторой внутренней точки Γ_0, что точка R принадлежит к Γ_0. Опишем из точки P круг K_h радиусом h. Этот круг целиком содержится в G. Наконец, обозначим через S_{3h} пересечение области G с кругом, описанным из граничной точки R радиусом $3h$. Далее, пусть расстояние h настолько мало, что все окружности, описанные из точки R каким-нибудь радиусом $r \leqslant 3h$, пересекают множество граничных точек Γ_0.

С помощью этого построения мы проведем доказательство нашей теоремы, разбив его на несколько шагов.

Лемма 1. Если ψ содержится в $\mathring{\mathfrak{D}}$, то имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|^2\leqslant CD_{S_{3h}}[\psi],$$

где константа $C=36\pi$.

Так как по предположению $D[\psi]$ существует, то правая часть этого неравенства стремится вместе с h к нулю, так что из этого неравенства будет следовать, что среднее значение функции ψ в области K_h также стремится к нулю при $h\to 0$.

Чтобы доказать нашу лемму, достаточно провести доказательство при предположении, что ψ содержится в $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо путем процесса замыкания мы сможем от таких функций непосредственно перейти к любым функциям из $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Обозначим через C_r лежащую в S_{3h} дугу окружности радиуса $r\leqslant 3h$ с центром в точке R, которая по условию пересекает Γ_0. Введем полярные координаты r и ϑ с началом координат в R. Если A — какая-нибудь точка дуги C_r, а $\overline{AA_0}$ — часть дуги C_r, соединяющая A с точкой пересечения A_0 дуги C_r с Γ_0, то для функции ψ из $\dot{\mathfrak{D}}$ в силу того, что $\psi(A_0)=0$, имеет место соотношение

$$\psi(A)=\psi(A)-\psi(A_0)=\int\limits_{A_0}^{A}\psi_\vartheta\,d\vartheta,$$

причем стоящий справа интеграл берется по дуге окружности $\overline{AA_0}$. Неравенство Шварца дает нам тогда

$$\psi^2(A)\leqslant 2\pi\int\limits_{C_r}\psi_\vartheta^2\,d\vartheta.$$

Проинтегрируем это неравенство по ϑ, перемещая A вдоль C_r. Мы получим:

$$\int\limits_{C_r}\psi^2\,d\vartheta\leqslant 4\pi^2\int\limits_{C_r}\psi_\vartheta^2\,d\vartheta.$$

Проинтегрировав затем по r в пределах от нуля до $3h$, мы получим далее:

$$\iint\limits_{S_{3h}}\psi^2\,dx\,dy\leqslant 4\pi^2\iint\limits_{S_{3h}}r\psi_\vartheta^2\,dr\,d\vartheta\leqslant 36\pi^2h^2D_{S_{3h}}[\psi].$$

Но на основании неравенства Шварца

$$\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|^2\leqslant\frac{1}{\pi h^2}H_{K_h}[\psi]\leqslant\frac{1}{\pi h^2}H_{S_{3h}}[\psi],$$

что и доказывает нашу лемму для $C=36\pi$.

Лемма 2. Если φ принадлежит к $\mathfrak{F}$, т. е. если $\Delta\varphi$ принадлежит к $\mathfrak{H}$, то имеет место неравенство

$$\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|^2<C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi].$$

Мы докажем это неравенство в § 5 [формула (15)] в примечании на стр. 565.

Лемма 3. Для всякой непрерывной в $G+\Gamma$ функции g имеет место соотношение

$$\gamma_h=\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Это соотношение является непосредственным следствием непрерывности g.

Применим теперь лемму 1 к функции $\psi=\varphi-g$. В соединении с леммами 2 и 3 мы получим:

$$|\varphi(P)-g(P)|\leqslant\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|+$$

$$+\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|+\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|\leqslant C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi]+$$

$$+\gamma_h+\sqrt{CD_{3h}[\psi]}.$$

Так как все три члена правой части стремятся вместе с h к нулю, то наша теорема доказана.

§ 5. Построение предельных функций и свойства сходимости интегралов E, D и H

1. Построение предельных функций. Процесс построения решений u задач, рассмотренных в §§ 2 и 3, а также задач с другими краевыми условиями, которые будут рассмотрены в §§ 6 и 7, проводится на основе двух теорем общего характера.

Перейдем к доказательству первой из этих теорем[1]).

Теорема 1. *Пусть f — функция, непрерывная в $G+\Gamma$ и кусочно-непрерывно дифференцируемая в G; рассмотрим последовательность функций φ^ν из пространства $\mathfrak{D}$, удовлетворяющую условиям:*

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{1}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{2}$$

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{3}$$

и пусть имеет место соотношение

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-H[f,\ \zeta^\nu]\to 0 \tag{4}$$

---

[1]) Заметим, что упомянутое выше автоматическое упрощение метода для случая дифференциального уравнения $\Delta u=0$ имеет место, прежде всего, при доказательстве теоремы 1.