Лемма 2. Если φ принадлежит к $\mathfrak{F}$, т. е. если $\Delta\varphi$ принадлежит к $\mathfrak{H}$, то имеет место неравенство

$$\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|^2<C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi].$$

Мы докажем это неравенство в § 5 [формула (15)] в примечании на стр. 565.

Лемма 3. Для всякой непрерывной в $G+\Gamma$ функции g имеет место соотношение

$$\gamma_h=\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Это соотношение является непосредственным следствием непрерывности g.

Применим теперь лемму 1 к функции $\psi=\varphi-g$. В соединении с леммами 2 и 3 мы получим:

$$|\varphi(P)-g(P)|\leqslant\left|\varphi(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\varphi\,dx\,dy\right|+$$

$$+\left|g(P)-\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}g\,dx\,dy\right|+\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|\leqslant C_1h^2H_{K_h}[\Delta\varphi]+$$

$$+\gamma_h+\sqrt{CD_{3h}[\psi]}.$$

Так как все три члена правой части стремятся вместе с h к нулю, то наша теорема доказана.

§ 5. Построение предельных функций и свойства сходимости интегралов E, D и H

1. Построение предельных функций. Процесс построения решений u задач, рассмотренных в §§ 2 и 3, а также задач с другими краевыми условиями, которые будут рассмотрены в §§ 6 и 7, проводится на основе двух теорем общего характера.

Перейдем к доказательству первой из этих теорем[1]).

Теорема 1. *Пусть f — функция, непрерывная в $G+\Gamma$ и кусочно-непрерывно дифференцируемая в G; рассмотрим последовательность функций φ^ν из пространства $\mathfrak{D}$, удовлетворяющую условиям:*

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{1}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{2}$$

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{3}$$

и пусть имеет место соотношение

$$E[\varphi^\nu,\ \zeta^\nu]-H[f,\ \zeta^\nu]\to 0 \tag{4}$$

---

[1]) Заметим, что упомянутое выше автоматическое упрощение метода для случая дифференциального уравнения $\Delta u=0$ имеет место, прежде всего, при доказательстве теоремы 1.

для всякой последовательности функций ζ^ν из $\mathring{\mathfrak{D}}$ с равномерно ограниченным $E[\zeta^\nu]$, так что

$$E[\zeta^\nu] \leqslant M. \tag{5}$$

Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемая в G функция u, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f$$

и предельному соотношению

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0, \tag{7}$$

имеющему место для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и любой замкнутой частичной области G' области G.

Заметим, прежде всего, что, не ограничивая общности, мы можем положить $p = 1$. В самом деле, если мы введем вместо φ новый функциональный аргумент

$$\psi = w\varphi, \tag{8}$$

где

$$w = \sqrt{p} \tag{9}$$

(см. стр. 541), то $E[\varphi]$ перейдет в

$$\iint\limits_G \{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\bar{a}\psi\psi_x + 2\bar{b}\psi\psi_y + \bar{q}\psi^2\}\, dx\, dy,$$

а

$$H[\varphi] \text{ в } \iint\limits_G \bar{k}\psi^2\, dx\, dy,$$

причем

$$\bar{a} = aw^{-2} - w^{-1}w_x, \quad \bar{b} = bw^{-2} - w^{-1}w_y,$$
$$\bar{q} = qw^{-2} - 2aw^{-3}w_x - 2bw^{-3}w_y + w^{-2}w_x^2 + w^{-2}w_y^2,$$
$$\bar{k} = w^{-2}k.$$

Эти новые интегралы также являются E- и H-интегралами первоначального вида, и их коэффициенты удовлетворяют всем поставленным требованиям непрерывности и дифференцируемости. Неравенства (3) и (4) из § 1 могут уже не выполняться, но они нам и не понадобятся в рассуждениях этого номера.

Далее, имеет место тождество $H_k[\varphi] = H_{\bar{k}}[\psi]$. Кроме того, с помощью простых оценок получаются неравенства

$$D_p[\varphi] \leqslant 2D_1[\psi] + cH_{\bar{k}}[\psi]; \qquad D_1[\psi] \leqslant 2D_p[\varphi] + \bar{c}H_k[\varphi],$$

где c и $\bar{c}$ — некоторые константы. Отсюда следует, что пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ для функций φ переходят в соответствующие пространства для функций ψ, и наоборот. Наконец, очевидно, что

при наших условиях дифференцируемости пространства $\mathfrak{F}$ также переходят друг в друга при преобразовании $\psi = w\varphi$. Итак, этим доказано, что допущение $p = 1$ не ограничивает общности рассуждения. В дальнейшем мы будем в этом номере под D и H подразумевать D_1 и H_1. В целях дальнейшего упрощения мы преобразуем соотношение (4) в соотношение

$$D[\varphi^\nu, \zeta^\nu] + H[q^*\varphi^\nu - kf, \zeta^\nu] \to 0, \tag{10}$$

где $q^* = q - a_x - b_y$. Мы получаем эту формулу, интегрируя по частям выражение

$$\iint\limits_G \{a(\varphi\zeta_x + \varphi_x\zeta) + b(\varphi\zeta_y + \varphi_y\zeta)\}\, dx\, dy$$

сначала при допущении, что ζ лежит в $\dot{\mathfrak{D}}$, а затем переходя с помощью процесса замыкания к любой функции ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Обозначим через K_R окружности, описанные из точек (x_0, y_0) радиусом R, через G_R — частичную область G, для точек которой окружность K_R целиком лежит в G, и, полагая $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\Psi_R(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{R} + \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \text{если } r \leqslant R, \\ 0 & \text{, если } r \geqslant R\ ^{1)}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Эта функция принадлежит $\mathfrak{H}$, и существуют две константы τ и τ_1 такие, что для всех значений R имеют место неравенства

$$\left|\iint\limits_{K_R} \Psi_R\, dx\, dy\right| \leqslant \tau R^2 \tag{12}$$

и

$$H[\Psi_R] \leqslant \tau_1 R^2. \tag{12$_1$}$$

---

[1]) Этот вид функции Ψ_R существенно зависит от того, что число независимых переменных равняется двум. Если число m независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ больше двух, то мы должны заменить стоящее выше выражение для Ψ_R выражением

$$\Psi_R = -\frac{1}{(m-2)\,\omega_m}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{m}{2}\,\frac{1}{R^{m-2}} + \frac{m-2}{2}\,\frac{r^2}{R^m}\right],$$

где ω_m обозначает поверхность единичной сферы в m-мерном пространстве (см. стр. 280). При $m = 3$ наша теория остается без изменений; только в правой части неравенства $(12)_1$ мы должны написать $\tau_1 R$ вместо $\tau_1 R^2$; при $m > 3$ неравенство $(12)_1$, вообще говоря, уже не имеет места; однако, оно сохраняется, если $q^* = 0$, т. е., во всяком случае, для краевой задачи дифференциального уравнения $\Delta u = -f$.

Для любой непрерывной функции φ, имеющей непрерывные первые и кусочно-непрерывные вторые производные, имеет место интегральная формула[1]) (см. гл. IV, § 3, стр. 279)

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R \Delta\varphi\, dx\, dy. \tag{13}$$

Это наводит на мысль искать интересующее нас решение дифференциального уравнения

$$\Delta u - q^* u = -kf \tag{14}$$

в виде предела выражения

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy.$$

Докажем прежде всего, что выражение

$$U^\nu(x_0, y_0; R) = \iint\limits_{K} \varphi^\nu\, dx\, dy + R^2\pi \iint \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy \tag{16}$$

сходится равномерно относительно x_0, y_0 для любого R и любых точек (x_0, y_0) из области G_R к непрерывной предельной функции

$$U(x_0, y_0; R) = \lim_{\nu \to \infty} U^\nu(x_0, y_0, R). \tag{17}$$

В самом деле, вследствие неравенства Шварца и формул (16) и $(12)_1$ имеет место соотношение

$$|U^\mu - U^\nu|^2 \leqslant 2R^2\pi H_R[\varphi^\nu - \varphi^\mu] + \\ + 2\tau_1 R^6 \pi^2 H_R[q^*(\varphi^\nu - \varphi^\mu)] \leqslant C H_R[(\varphi^\nu - \varphi^\mu)] \to 0,$$

причем индекс R указывает, что областью интегрирования является круг K_R.

Заметим теперь, что функция $\zeta = \Psi_{R_2}(x, y) - \Psi_{R_1}(x, y)$ принадлежит к $\dot{\mathfrak{D}}$, ибо в этой разности особенности функций Ψ_{R_2} и Ψ_{R_1} взаимно уничтожаются; более того, функция ζ дважды кусочно-непрерывно дифференцируема. Поэтому мы имеем право подставить эту функцию ζ в наше соотношение (10) и мы получим тогда следующее предельное равенство:

$$D[\varphi^\nu, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] + H[q^*\varphi^\nu - kf, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] \to 0.$$

---

[1]) Заметим, что из формул (13) и $(12)_1$ вытекает применявшаяся на стр. 562 оценка:

$$\left|\varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy\right|^2 \leqslant \tau_1 R^2 H_{K_R}[\Delta\varphi]. \tag{15}$$

Применяя формулу Грина (7), § 2, мы можем привести это соотношение к виду

$$\frac{1}{\pi R_2^2}\iint\limits_{K_R}\varphi^\nu\,dx\,dy-\frac{1}{\pi R_1^2}\iint\limits_{K_{R_1}}\varphi^\nu\,dx\,dy+$$
$$+\iint\limits_{K_{R_2}}(q^*\varphi^\nu-kf)(\Psi_{R_2}-\Psi_{R_1})\,dx\,dv\to 0.$$

Но это означает, что

$$\frac{1}{\pi R_2^2}U(x_0,\ y_0;\ R_2)-\frac{1}{\pi R_1^2}U(x_0,\ y_0;\ R_1)=0.$$

Таким образом, функция $\frac{1}{\pi R^2}U(x_0,\ y_0;\ R)$ не зависит от R.

Положим:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi R^2}U(x,\ y;\ R). \tag{18}$$

Эта функция u определена, следовательно, во всех областях G_R, а, значит, и во всей области G в качестве непрерывной функции от x и y. Мы сейчас убедимся в том, что u является искомой нами функцией. Для этой цели докажем сначала следующую теорему:

Теорема 1а. *Для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и всякой замкнутой подобласти G', содержащейся в G, имеет место при $\nu\to\infty$ предельное соотношение* [1])

$$H_{G'}[\varphi^\nu-u,\ \zeta]\to 0.$$

Пусть область G содержится внутри квадрата с площадью A. Пусть, далее,

$$H_{G'}[\varphi^\nu]\leqslant\frac{M}{4},\qquad H_{G'}[u]\leqslant\frac{M}{4},$$

где M — некоторая константа, не зависящая от ν. Такая константа существует, ибо величины $H[\varphi^\nu]$ равномерно ограничены, а $H_{G'}[u]$ существует в силу равномерной непрерывности u в G'.

В силу неравенства треугольника мы получаем отсюда: $H_{G'}[\varphi^\nu-u]\leqslant M$. Убедимся теперь в том, что достаточно доказать теорему 1а для случая $\zeta=\text{const.}$, например, при $\zeta=1$. В самом деле, пусть задана произвольная функция ζ из $\mathfrak{H}$. Разобьем область G' на неперекрывающиеся подобласти G'_ν, полагая $G'=\sum G'_\nu$, так, чтобы ζ была непрерывной в каждой частичной области G'_ν, и выберем диаметры G'_ν настолько малыми, чтобы существовала постоянная в каждой из областей G'_ν функция ζ^*, удовлетворяющая условию

$$H_{G'}[\zeta-\zeta^*]<\varepsilon, \tag{19}$$

[1]) Соотношение (7) означает, что функции φ^ν «слабо» сходятся к функции u в смысле метрики H для подобласти G'.

где ε — произвольное заданное число. В силу неравенства Шварца мы получим тогда

$$|H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] - H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta^*]|^2 \leqslant \varepsilon M.$$

Но если теорема 1а справедлива для постоянных функций ζ, то она справедлива также и для кусочно-постоянных ζ^*, так что выражение $H[\varphi^\nu - u, \zeta^*]$ стремится к нулю; так как мы можем выбрать ε сколь угодно малым, то теорема 1а будет, таким образом, доказана для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$.

Итак, остается доказать нашу теорему при $\zeta = 1$, т. е. доказать соотношение

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, 1] = \iint\limits_{G'} (\varphi^\nu - u)\, dx\, dy \to 0. \tag{20}$$

Для этой цели заметим прежде всего следующее: G' можно разбить на конечное число кругов $K_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, N)$ с центрами P_ν и радиусами r_ν и остаточную область B, площадь которой меньше любого сколь угодно малого заданного числа ε^2. При этом мы можем радиусы r_ν этих кругов выбрать сколь угодно малыми, например, $r_\nu \leqslant \varepsilon$ [1]).

В силу равномерной непрерывности функции u в G' мы получим тогда, обозначая через $u(P_\nu)$ значение u в центре круга P_ν, что

$$\left| \iint\limits_{G'} u\, dx\, dy - \pi \sum_{j=1}^{N} r_j^2\, u(P_j) \right| < \delta, \tag{21}$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ может быть сделано сколь угодно малым, если выбрать ε достаточно малым [2]).

С другой стороны, если путем соответствующего выбора ε сделать остаточную область B достаточно малой, то имеет место неравенство

$$\left| \iint\limits_{G'} \varphi^\nu\, dx\, dy - \sum_{\nu=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy \right| < \delta_1, \tag{22}$$

---

[1]) Доказательство. Исчерпаем сначала G' с помощью конечного числа неперекрывающихся квадратов со сторонами длины меньше 2ε так, чтобы остаточная область имела площадь, меньшую $\frac{\varepsilon^2}{2}$. В каждом квадрате рассмотрим вписанный круг. Остающиеся частичные области мы снова покрываем квадратами так, чтобы площадь оставшейся области была меньше $\frac{\varepsilon^2}{4}$, присоединяем вписанные круги этих новых квадратов и продолжаем в геометрической прогрессии. Очевидно, что таким путем мы получим систему кругов указанного рода.

[2]) Это утверждение вытекает непосредственно из элементарного определения интеграла, которое впрочем здесь используется в несколько необычной форме.

ибо площадь B не больше ε^2, а, следовательно, квадрат левой части в силу неравенства Шварца не превосходит

$$H_B[\varphi^\nu]\,\varepsilon^2 < \frac{M}{4}\,\varepsilon^2 = \delta_1^2.$$

Чтобы оценить разность

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2\,u(P_j),$$

заметим, что согласно определениям (16) и (17) функций $U^\nu(P_j;\ r_j)$ и $U(P_j;\ r_j)$ мы имеем:

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2 u(P_j) = -\pi r_j^2 \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j}(q^*\varphi^\nu - kf)\,dx\,dy +$$
$$+ [U^\nu(P_j;\ r_j) - U(P_j;\ r_j)].$$

В силу равномерной сходимости U^ν существует такая стремящаяся к нулю величина $\sigma(\nu)$, зависящая только от ν, что

$$|U^\nu(P_j;\ r_j) - U(P_j;\ r_j)| < \sigma(\nu).$$

Так как $r_j < \varepsilon$, то на основании (12) и $(12)_1$ имеет место оценка

$$\left|\pi r_j^2 \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j}(q^*\varphi^\nu - kf)\,dx\,dy\right| \leqslant \pi r_j^2\left(\varepsilon\sqrt{\tau_1}\,\frac{\sqrt{M}}{2}\,\alpha_1 + \varepsilon^2\tau\alpha\right),$$

где α и α_1 обозначают верхние границы $|kf|$ и $|q^*|$. Полагая $\varepsilon\sqrt{\tau_1}\,\frac{\sqrt{M}}{2}\,\alpha_1 + \varepsilon^2\tau\alpha = \eta$, мы получим:

$$\left|\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \pi r_j^2 u(P_j)\right| \leqslant \pi r_j^2\eta + \sigma(\nu),$$

откуда путем суммирования по всем кругам K_j вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\,dx\,dy - \sum_{j=1}^{N} \pi r_j^2\,u(P_j)\right| \leqslant A\eta + N\sigma(\nu), \tag{23}$$

где A — площадь G'. Из неравенства (23) вытекает в силу неравенств (21) и (22) следующая оценка:

$$\left|\iint\limits_{G'} \varphi^\nu\,dx\,dy - \iint\limits_{G'} u\,dx\,dy\right| \leqslant \delta + \delta_1 + A\eta + N\sigma(\nu).$$

Выбрав достаточно малое ε, мы можем сделать δ, δ_1 и η сколь угодно малыми; фиксировав затем ε и заставляя ν неограниченно возрастать, мы найдем такое достаточно большое значение ν, для кото-

рого $N_\sigma(\nu)$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Отсюда следует, что при $\nu \to \infty$

$$\iint\limits_{G'} (\varphi^\nu - u)\, dx\, dy \to 0,$$

и теорема 1а, таким образом, доказана.

Из теоремы 1а мы делаем теперь следующий вывод:

Полагая в формуле (7)

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} + q^* \Psi_R & \text{внутри} \quad K_R, \\ 0 & \text{вне} \quad K_R, \end{cases}$$

мы получим:

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} q^* \Psi_R \varphi^\nu\, dx\, dy \to \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{K_R} u\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_{K_R} q^* \Psi_R\, u\, dx\, dy.$$

Отсюда следует на основании уравнений (16), (17), (18).

Теорема 1б. *Для предельной функции $u(x, y)$ имеет место в области G_R следующая интегральная формула:*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} u\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* u - kf)\, dx\, dy. \quad (24)$$

Из этой теоремы следует, далее, в силу рассмотрений гл. IV, § 3, стр. 280—286 и свойств дифференцируемости q, k, f.

Теорема 1в. *Функция u имеет в G непрерывные производные до второго порядка включительно.*

Опираясь снова на результаты гл. IV, § 3, п. 2 об обращении теорем о среднем значении, мы получим следующую теорему:

Теорема 1г. *Функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\Delta u - q^* u = -kf \quad (14)$$

или соответственно дифференциальному уравнению

$$L[u] = -f, \quad (6)$$

если с помощью преобразования, обратного преобразованию (8), (9), *вернуться к первоначальному функциональному аргументу* φ.

Заметим, что эту последнюю часть теоремы 1 мы можем доказать другим путем, не ссылаясь на гл. IV, если только считать доказанной непрерывность вторых производных функции u. Мы можем рассуждать так:

Подставим в уравнение (7) функцию ζ из $\dot{\mathfrak{D}}$, имеющую непрерывные производные вплоть до второго порядка включительно. Тогда мы можем уравнение (7) представить на основании формулы Грина в форме

$$H\{\varphi^\nu, L[\zeta]\} + H[f, \zeta] \to 0.$$

Применим теперь теорему 1а, заменяя ζ через $L[\zeta]$. Мы получим:

$$H\{u, L[\zeta]\} + H[f, \zeta] = 0.$$

Так как по предположению функция u имеет непрерывные вторые производные до второго порядка, то мы можем теперь снова применить формулу Грина в обратном направлении и представить предыдущее соотношение в форме

$$H\{L[u], \zeta\} + H[f, \zeta] = H\{L[u] + f, \zeta\} = 0.$$

Так как ζ здесь обозначает произвольную функцию из $\dot{\mathfrak{D}}$, то на основании фундаментальной леммы вариационного исчисления (см. т. I, гл. IV, стр. 174) мы отсюда заключаем, что $L[u] + f = 0$, что и требуется доказать.

2. Свойства сходимости интегралов D и H. Докажем теперь общую теорему, связывающую между собой различные свойства сходимости вариационных интегралов D и H, т. е. свойства сходимости функциональных последовательностей в смысле метрик D и H. Эту теорему мы применяли в §§ 2 и 3 вместе с теоремой 1.

Теорема 2. *Пусть φ^ν — последовательность функций из $\mathfrak{D}$, для которой выполняются условия* (24) $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ *и*

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{25}$$

Пусть, далее, u обозначает непрерывно дифференцируемую в G функцию, для которой выполняется условие

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0 \tag{26}$$

для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ и любой замкнутой подобласти G' области G. Тогда u принадлежит $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет условиям

$$H[\varphi^\nu - u] \to 0 \tag{27}$$

и

$$D[\varphi^\nu - u] \to 0\,^{1)}. \tag{28}$$

Разобьем наше доказательство на три шага. Докажем прежде всего следующую теорему:

Теорема А. Пусть ψ^ν — некоторая последовательность из $\mathfrak{H}$ и пусть для любой непрерывной функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняется условие

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0; \tag{29}$$

кроме того, пусть выполняется условие

$$H[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{30}$$

Тогда имеет место соотношение

$$H[\psi^\nu] \to 0. \tag{31}$$

---

[1]) Другими словами, *из сильной сходимости в себе последовательности φ^ν в смысле метрик D и H и из слабой сходимости функций φ^ν к предельной функции u в смысле метрики H для любой замкнутой подобласти G вытекает сильная сходимость φ^ν к u во всей области G как в смысле метрики H, так и в смысле метрики D.*

Доказательство. В силу теоремы 4 из § 1 выражения $H[\psi^\nu]$ ограничены. Из тождества

$$H[\psi^\nu] = H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu] - H[\psi^\mu]$$

вытекает, далее, неравенство

$$H[\psi^\nu] \leqslant H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu].$$

Выберем теперь на основании условия (30) μ настолько большим, чтобы при $\nu > \mu$ выполнялось условие $H[\psi^\nu - \psi^\mu] < \frac{\varepsilon}{3}$, где ε — некоторое заданное положительное число. Зафиксировав μ, выберем теперь индекс ν настолько большим, чтобы в силу условия (29) для $\zeta = \psi^\mu$ выполнялось условие $|H[\psi^\nu, \psi^\mu]| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Мы получим отсюда $H[\psi^\nu] < \varepsilon$. Так как ε — произвольное сколь угодно малое число, то соотношение (31), таким образом, доказано.

Теорема Б. Пусть ψ^ν — такая последовательность из $\mathfrak{D}$, что для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняется условие

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0; \tag{32}$$

кроме того, пусть последовательность ψ^ν сходится в себе в смысле метрики D, т. е. пусть

$$D[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{33}$$

Тогда имеет место соотношение

$$D[\psi^\nu] \to 0. \tag{34}$$

Мы получим искомое соотношение (34), доказав, что имеют место соотношения

$$H[\psi^\nu_x] \to 0; \qquad H[\psi^\nu_y] \to 0. \tag{35}$$

Для этой цели на основании теоремы А достаточно показать, что для любой функции ζ из $\mathfrak{H}$ выполняются условия

$$H[\psi^\nu_x, \zeta] \to 0; \qquad H[\psi^\nu_y, \zeta] \to 0. \tag{36}$$

Докажем, прежде всего, следующую лемму:

Лемма. Соотношения (36) имеют место для всех функций ζ из $\mathfrak{H}$, если они имеют место для функций $\zeta = \omega$ из $\mathfrak{H}$, имеющих кусочно-непрерывные первые производные и *отличных от нуля только в каком-нибудь квадрате Q, содержащемся в G.*

Доказательство. Если соотношения (36) имеют место для всех функций $\zeta = \omega$ указанного выше типа, то они имеют место и для всякой суммы ζ' конечного числа таких функций. Докажем, что для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ можно найти такую конечную сумму ζ' указанного типа, что

$$H[\zeta' - \zeta] \leqslant \varepsilon^2, \tag{37}$$

где ε — сколь угодно малое число. Тогда из неравенства

$$|H[\psi^\nu_x, \zeta]| \leqslant |H[\psi^\nu_x, \zeta']| + |H[\psi^\nu_x, \zeta' - \zeta]| \leqslant$$
$$\leqslant |H[\psi^\nu_x, \zeta']| + \sqrt{H[\psi^\nu_x] H[\zeta' - \zeta]}$$

и из того, что оба члена правой части можно сделать сколь угодно малыми (выбором достаточно малого ε и достаточно большого ν) будет следовать, что левая часть стремится к нулю при $\nu \to \infty$. То же самое относится и к $H[\psi_y^\nu, \zeta]$. Чтобы доказать теперь возможность аппроксимирования ζ в смысле (37) с помощью сумм ζ' функций типа ω, поступим так: сначала аппроксимируем функцию ζ с помощью функции ζ^*, которая отлична от нуля только в конечном числе квадратов Q_ν области G и в каждом из этих квадратов постоянна. Для этой цели обозначим снова через ε сколь угодно малое положительное число; устранив из области G точки и линии разрыва ζ, исчерпаем оставшуюся часть G с помощью конечного числа квадратов так, чтобы для остаточной области B выполнялось неравенство $H_B[\zeta] \leqslant \varepsilon^2$. Эти квадраты мы снова разобьем на достаточно мелкие квадраты Q_ν таким образом, чтобы колебание ζ внутри каждого такого частичного квадрата не превосходило ε. Определим теперь функцию ζ^*, считая ее в каждом квадрате Q_ν равной среднему значению ζ в этом квадрате и полагая в остаточной области B $\zeta^* = 0$. Очевидно, что тогда $H[\zeta^* - \zeta] \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon^2 A$, где A — верхняя граница площади G. Это и доказывает, что ζ можно аппроксимировать с помощью ζ^*. Остается доказать, что функцию ζ^*, а следовательно, и ζ можно аппроксимировать с помощью функции типа ζ'.

Для этого достаточно убедиться в том, что функция, постоянная в квадрате Q_ν и равная в этом квадрате, например, единице, а вне этого квадрата всюду равная нулю, может быть аппроксимирована в смысле метрики H с помощью функции типа ω, равной, сверх того, нулю вне квадрата Q_ν. Но это, очевидно, может быть легко достигнуто с помощью кусочно-линейной функции ω. Таким образом, наша лемма доказана.

Чтобы доказать теперь теорему Б, рассмотрим какой-нибудь квадрат Q в области G и пусть ω обозначает функцию, непрерывную и кусочно-непрерывно дифференцируемую в G, обращающуюся в нуль вне квадрата Q. Интегрируя по частям, мы находим:

$$H[\psi_x^\nu, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_x]; \qquad H[\psi_y^\nu, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_y];$$

применяя условие (32) к функциям $\zeta = \omega_x$ и $\zeta = \omega_y$, мы получим отсюда:

$$H[\psi_x^\nu, \omega] \to 0, \qquad H[\psi_y^\nu, \omega] \to 0.$$

Таким образом, соотношения (36) доказаны для всех функций $\zeta = \omega$; но согласно предыдущей лемме отсюда вытекает их справедливость также для всех функций ζ из $\mathfrak{H}$. На основании замечания, сделанного нами с самого начала, из соотношений (36) непосредственно вытекает справедливость самой теоремы Б.

Теорема 2 является простым следствием теорем А и Б. Применяя эти теоремы к функциям $\psi^\nu = \varphi^\nu - \varkappa$ сначала только для подобла-

стей G' области G, мы получим, что для любой подобласти G' имеют место соотношения

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0.$$

На основании теоремы 4, § 1 отсюда непосредственно следует, что

$$H_{G'}[\varphi^\nu] \to H_{G'}[u], \qquad D_{G'}[\varphi^\nu] \to D_{G'}[u].$$

Так как величины $H_{G'}[\varphi^\nu] < H[\varphi^\nu]$ и $D_{G'}[\varphi^\nu] < D[\varphi^\nu]$ ограничены, то отсюда вытекает существование $H[u]$ и $D[u]$, т. е. функция u содержится в $\mathfrak{D}$. Но теперь мы заключаем из соотношения (26), что для всей области G имеет место соотношение $H[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0$. Поэтому мы имеем право применить теоремы А и Б ко всей области G и получаем, таким образом, соотношения (27) и (28), так что теорема 2 полностью доказана.

Полученные в настоящем параграфе результаты не только завершают доказательства теорем существования для краевого условия первого рода (§§ 2 и 3), но могут быть применены также и при доказательствах существования для других краевых условий (§§ 6 и 7).

§ 6. Краевые условия второго и третьего рода. Краевая задача

1. Формула Грина и краевые условия. Чтобы притти к упомянутой в § 1 общей формулировке краевых условий второго и третьего рода, рассмотрим область G с границей Γ и зададим в G последовательность замкнутых частичных областей G_ε с кусочно-гладкими границами Γ_ε так, чтобы расстояние каждой точки Γ_ε от границы Γ было меньше ε. Применим к области G_ε формулу Грина для выражения

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi],$$

предполагая, что φ принадлежит $\mathfrak{F}$, а ψ принадлежит $\mathfrak{D}$, но не подчиняя эти функции каким бы то ни было краевым условиям.

Формула Грина записывается так:

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi] + H_{G_\varepsilon}[L[\varphi], \psi] = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma\varphi\right) \psi \, ds,$$

причем $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали к Γ_ε, s — длину дуги на Γ_ε, а $\sigma = a\frac{\partial x}{\partial \nu} + b\frac{\partial y}{\partial \nu}$. Когда ε стремится к нулю, оба члена левой части формулы Грина стремятся к определенным пределам; поэтому существует также предел правой части. Обозначим этот предел через $\int_\Gamma \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma\varphi\right) \psi \, ds$ и *назовем* его *контурным интегралом*, взятым по границе Γ области G, ничего, однако, не предполагая при этом относительно поведения функции ψ и произ-