стей $G'$ области $G$, мы получим, что для любой подобласти $G'$ имеют место соотношения

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0.$$

На основании теоремы 4, § 1 отсюда непосредственно следует, что

$$H_{G'}[\varphi^\nu] \to H_{G'}[u], \qquad D_{G'}[\varphi^\nu] \to D_{G'}[u].$$

Так как величины $H_{G'}[\varphi^\nu] < H[\varphi^\nu]$ и $D_{G'}[\varphi^\nu] < D[\varphi^\nu]$ ограничены, то отсюда вытекает существование $H[u]$ и $D[u]$, т. е. функция $u$ содержится в $\mathfrak{D}$. Но теперь мы заключаем из соотношения (26), что для всей области $G$ имеет место соотношение $H[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0$. Поэтому мы имеем право применить теоремы А и Б ко всей области $G$ и получаем, таким образом, соотношения (27) и (28), так что теорема 2 полностью доказана.

Полученные в настоящем параграфе результаты не только завершают доказательства теорем существования для краевого условия первого рода (§§ 2 и 3), но могут быть применены также и при доказательствах существования для других краевых условий (§§ 6 и 7).

## § 6. Краевые условия второго и третьего рода. Краевая задача

**1. Формула Грина и краевые условия.** Чтобы притти к упомянутой в § 1 общей формулировке краевых условий второго и третьего рода, рассмотрим область $G$ с границей $\Gamma$ и зададим в $G$ последовательность замкнутых частичных областей $G_\varepsilon$ с кусочно-гладкими границами $\Gamma_\varepsilon$ так, чтобы расстояние каждой точки $\Gamma_\varepsilon$ от границы $\Gamma$ было меньше $\varepsilon$. Применим к области $G_\varepsilon$ формулу Грина для выражения

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi],$$

предполагая, что $\varphi$ принадлежит $\mathfrak{F}$, а $\psi$ принадлежит $\mathfrak{D}$, но не подчиняя эти функции каким бы то ни было краевым условиям.

Формула Грина записывается так:

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi] + H_{G_\varepsilon}[L[\varphi], \psi] = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma\varphi\right) \psi \, ds,$$

причем $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает дифференцирование по внешней нормали к $\Gamma_\varepsilon$, $s$ — длину дуги на $\Gamma_\varepsilon$, а $\sigma = a\frac{\partial x}{\partial \nu} + b\frac{\partial y}{\partial \nu}$. Когда $\varepsilon$ стремится к нулю, оба члена левой части формулы Грина стремятся к определенным пределам; поэтому существует также предел правой части. Обозначим этот предел через $\int_\Gamma \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma\varphi\right) \psi \, ds$ и *назовем* его *контурным интегралом*, взятым по границе $\Gamma$ области $G$, ничего, однако, не предполагая при этом относительно поведения функции $\psi$ и произ-

водных функции $\varphi$ вдоль $\Gamma$ и не требуя даже существования направления и длины дуги вдоль этого контура.

Мы можем выразить это определение, записывая формулу Грина в виде

$$E[\varphi, \psi] = -H_G[L[\varphi], \psi] + \int_\Gamma \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds \tag{1}$$

для $\varphi$, лежащего в $\mathfrak{F}$, и $\psi$, лежащего в $\mathfrak{D}$.

Мы можем теперь формулировать краевые условия второго и третьего рода для функции $\varphi$ из $\mathfrak{F}$ так: какова бы ни была функция $\psi$ из $\mathfrak{D}$, должно выполняться условие

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]. \tag{2}$$

Это краевое условие для функции $\varphi$, таким образом, равносильно требованию, чтобы вдоль границы $\Gamma$ имело место предельное соотношение

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \sigma\varphi\right)\psi\, ds = 0\,^{1)} \tag{3}$$

для любого $\psi$ из $\mathfrak{D}$. В силу нашего определения условие (3) имеет смысл даже в том случае, когда функция $\sigma$ и нормальные производные функции $\varphi$ вдоль границы $\Gamma$ сами по себе смысла не имеют. Если $\sigma = 0$, то мы называем наше краевое условие условием второго рода, в противном случае мы говорим об условии третьего рода. Заметим, однако, что при нашем способе изложения нам не приходится делать этого традиционного различия между условиями второго и третьего рода, ибо, например, при преобразованиях $\sqrt{p}\,\varphi = \varphi_1$ краевое условие второго рода для $\varphi$ переходит в краевое условие третьего рода для $\varphi_1$.

В дальнейшем мы убедимся, что наше краевое условие в таком слабом смысле представляет собой правильное и вполне обоснованное ограничение обычного краевого условия, которое в своем буквальном понимании может оказаться невыполнимым, ибо наша формулировка дает возможность решить краевые задачи и задачи

---

1) Мы ограничиваемся здесь однородным краевым условием, тогда как, вообще говоря, мы должны были бы рассматривать по аналогии с § 2 краевые условия вида $p\frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi - g) + \sigma(\varphi - g) = 0$, где $g$ — заданная функция из $\mathfrak{D}$. Мы можем обосновать этот отказ от общей формулировки краевого условия следующим образом: если $g$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}$, то путем введения функции $\psi = \varphi - g$ мы придем к соответствующей краевой задаче дифференциального уравнения для $v = u - g$ с однородным краевым условием. Таким образом, с точностью до свойств дифференцируемости функции $g$ неоднородное краевое условие не является существенным обобщением однородного краевого условия.

Заметим, что рассматриваемая нами здесь форма вариационного выражения имеет для доказательств существования то преимущество перед выражениями, рассмотренными в т. I, гл. VI, что в него не входят в явном виде интегралы по контуру.

о собственных значениях для рассматриваемых областей, обеспечивая при этом единственность решения краевых задач и полноту решения задач о собственных значениях. В связи с этим мы будем иногда пользоваться следующим термином:

Определение. Все функции $\varphi$ из $\mathfrak{F}$, для которых выполняется краевое условие (3), образуют пространство $\mathfrak{F}_\sigma$.

Таким образом, согласно определению для всякой функции $\varphi$ из $\mathfrak{F}_\sigma$ и $\psi$ из $\mathfrak{D}$ имеет место формула Грина (2).

**2. Формулировка краевой задачи и вариационной задачи. Краевая задача III.** *Найти функцию $u$, принадлежащую пространству $\mathfrak{F}_\sigma$, т. е. удовлетворяющую краевому условию*

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u\right)\zeta\, ds=0, \tag{4}$$

*для всех функций $\zeta$ из $\mathfrak{D}$ и являющуюся в $G$ решением дифференциального уравнения*

$$L[u]=-f. \tag{5}$$

При этом $f$ обозначает заданную в $G+\Gamma$ непрерывную функцию, имеющую кусочно-непрерывные первые производные.

В том частном случае, когда всюду в $G$ $a=b=q=0$, так что

$$E[\varphi]=D[\varphi], \tag{6}$$

мы должны заданную функцию $f$ и искомую функцию $u$ подчинить еще условиям

$$\iint_G kf\,dx\,dy=0 \tag{7}$$

и

$$\iint_G ku\,dx\,dy=0. \tag{8}$$

Необходимость условия (7) непосредственно вытекает из предположения существования решения $u$ краевой задачи III. В самом деле, положим в формуле Грина (2) $\varphi=u$, $\psi=1$. Так как $D[u, 1]=0$ и $L[u]=-f$, то мы получим $\iint kf\,dx\,dy=0$, т. е. условие (7); таким образом, это условие является необходимым условием разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Что же касается условия (8), то оно не является ограничительным; в самом деле, так как $L[c]=0$ для любого постоянного $c$, то наряду с $u$ функция $u+c$ также является решением задачи, и условие (8) дает возможность однозначно определить константу $c$ и обеспечивает, как мы увидим, единственность решения нашей задачи.

Чтобы решить нашу краевую задачу, мы докажем эквивалентность этой задачи следующей вариационной задаче, которую мы решим непосредственно.

Вариационная задача III. *Среди всех функций $\varphi$ из $\mathfrak{D}$ найти ту, для которой выражение*

$$E[\varphi]-2H[f,\ \varphi] \tag{9}$$

*имеет наименьшее значение $d$.* При этом в случае $a=b=q=0$ заданная функция $f$ должна удовлетворять условию (7), а функции сравнения $\varphi$ должны быть подчинены дополнительному условию

$$\iint\limits_G k\varphi\, dx\, dy=0. \tag{10}$$

В этой задаче мы не вводим заранее никаких краевых условий. Несмотря на это, решение вариационной задачи само собой удовлетворяет формулированным выше краевым условиям. Поэтому мы называем эти условия «*естественными краевыми условиями*» [1]).

Чтобы обосновать дополнительные условия (7) и (10), исходя из вариационной задачи, заметим, что в случае $a=b=q=0$ выражение $D[\varphi]$ не изменяется, если к функции $\varphi$ прибавить постоянную $c$, тогда как выражение $-2H[f,\ \varphi]$ может быть сделано при этом сколь угодно большим по абсолютному значению отрицательным числом, если только не выполняется условие (7). Таким образом, это условие необходимо для того, чтобы существовала нижняя граница нашего вариационного выражения, т. е. для того, чтобы наша вариационная задача имела смысл.

**3. Ограничение класса допустимых областей.** Для того, чтобы обеспечить существование нижней границы для нашей вариационной задачи III и затем решить эту вариационную задачу, уже нельзя положить в основу совершенно произвольную связную открытую область или даже некоторое открытое точечное множество $G$, как мы это делали раньше при краевом условии первого рода; как мы убедимся в § 8 на отдельных примерах, для таких произвольных областей могут оказаться уже несправедливыми основное неравенство из § 2 и теорема Реллиха, на которых основывались все наши рассуждения в случае краевого условия первого рода.

Чтобы иметь возможность провести теорию решения краевой задачи для краевых условий второго и третьего рода, мы должны поэтому формулировать ограничительные требования, которым должны быть подчинены допустимые области $G$. Во-первых, мы требуем, чтобы для области $G$ сохранялось неравенство Пуанкаре, которое нами было доказано в § 3, п. 1, стр. 552 для квадрата $Q$. Второе требование распространяет основное неравенство I из § 2, доказанное там только для пространства $\mathring{\mathfrak{D}}$, на все пространство $\mathfrak{D}$. Точнее формулируя, мы можем выразить эти требования следующим образом:

---

[1]) См. т. I, гл. IV, § 5.

Требование I (Неравенство Пуанкаре). *Для области $G$ должна существовать такая константа $\gamma$, что для всякой функции $\varphi$ из $\mathfrak{D}$ выполняется условие*

$$H[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma D[\varphi]. \tag{11}$$

Требование II. *Если $a$, $b$ и $q$ не обращаются одновременно в нуль всюду в $G$, то для области $G$ существует такая константа $\gamma$, что для всех функций $\varphi$ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]. \tag{12}$$

В § 8 мы покажем, что оба эти требования выполняются для очень общего класса областей $\mathfrak{N}$, содержащего все те типы областей, с которыми мы встречаемся на практике. Если область $G$ удовлетворяет только что формулированным требованиям I и II, то мы скажем, что область $G$ обладает свойством $\mathfrak{P}$. Формулируем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Для области $G$, обладающей свойством $\mathfrak{P}$, вариационное выражение*

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \tag{9}$$

*имеет для всех $\varphi$ из $\mathfrak{D}$ конечную нижнюю границу; вариационная задача имеет поэтому смысл. В случае $a = b = q = 0$ мы должны при этом ввести в качестве дополнительного условия условие* (7).

Для доказательства заметим, что как в частном случае, когда всюду в $G$ выполняются условия $a = b = q = 0$ и функция $\varphi$ удовлетворяет условию (10), так и в общем случае имеет место неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$ для всех функций $\varphi$ из $\mathfrak{D}$. Во втором случае это неравенство выражается требованием II, а в первом случае оно вытекает из требования I в силу условия (10). Отсюда следует:

$$2\,|H[f, \varphi]| \leqslant 2\sqrt{H[f]\,H[\varphi]} \leqslant 2\sqrt{\gamma H[f]\,E[\varphi]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}E[\varphi] + 2\gamma H[f],$$

так что

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \geqslant \frac{1}{2}E[\varphi] - 2\gamma H[f] \geqslant -2\gamma H[f].$$

**4. Эквивалентность вариационной задачи и краевой задачи. Единственность.** Дальнейшие рассмотрения нашей вариационной задачи и соответствующей краевой задачи проводятся теперь буквально так же, как и в случае фиксированных краевых значений. Прежде всего имеет место, как и в § 2,

Теорема 2. *Решение краевой задачи III является также решением вариационной задачи III*, и далее,

Теорема 3. *Решение краевой задачи III однозначно определено.* В самом деле, разность $u$ двух решений краевой задачи III

дает решение этой краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u]=0$, но из формулы Грина (2) при $\varphi=\psi=u$ следует, что $E[u]=0$, а в силу неравенств (11) или (12) мы получаем отсюда, что $H[u]=0$, так что функция $u$ тождественно равна нулю.

**5. Решение вариационной задачи и краевой задачи.** Решение вариационной задачи, а вместе с этим и краевой задачи может быть получено теперь в точности таким же путем, как и в § 2, после того как мы обеспечили существование нижней границы, а следовательно, и минимизирующей последовательности $\varphi^\nu$. Совершенно таким же путем, как и раньше, мы доказываем, что для такой минимизирующей последовательности выполняется условие

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu]-H[f, \zeta^\nu]\to 0 \tag{13}$$

для всех последовательностей $\zeta^\nu$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих требованию $E[\zeta^\nu]\leqslant M$.

Отсюда вытекают на основании неравенств (11) и соответственно (12) соотношения

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{14}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{15}$$

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0. \tag{16}$$

Все эти факты доказываются дословно так же, как и формально им тождественные соотношения (10), (11) и (12) из § 2. Разница только в том, что функции $\varphi$ уже не должны здесь принадлежать пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, а могут быть любыми функциями из $\mathfrak{D}$. Применяя теперь теоремы 1 и 2 из § 5 дословно так же, как и в § 2 и соответственно в § 3, мы построим предельную функцию $u$, обладающую следующими свойствами: $u$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[u]=-f$; при этом

$$E[\varphi^\nu-u]\to 0;\qquad D[\varphi^\nu-u]\to 0;\qquad H[\varphi^\nu-u]\to 0,$$

откуда следует $E[\varphi^\nu]\to E[u]$, $H[f, \varphi^\nu]\to H[f, u]$, так что $E[u]-2H[f, u]=d$. Из вариационного условия $E[\varphi^\nu, \zeta]-H[f, \zeta]\to 0$, имеющего место для всех $\zeta$ из $\mathfrak{D}$, следует в силу (14), (15) и теоремы 4 из § 1 соотношение $E[u, \zeta]-H[f, \zeta]=0$. Это соотношение равносильно нашему краевому условию (4) и показывает, таким образом, что функция $u$ является также решением нашей краевой задачи.

## § 7. Задача о собственных значениях для краевых условий второго и третьего рода

Согласно нашим замечаниям в начале предыдущего параграфа мы прежде всего вводим ограничительное условие, которому должна удовлетворять область $G$.

Требование 3 (Теорема Реллиха). *Область $G$ должна обладать следующим свойством: во всякой последовательности*