дает решение этой краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u]=0$, но из формулы Грина (2) при $\varphi=\psi=u$ следует, что $E[u]=0$, а в силу неравенств (11) или (12) мы получаем отсюда, что $H[u]=0$, так что функция u тождественно равна нулю.

5. Решение вариационной задачи и краевой задачи. Решение вариационной задачи, а вместе с этим и краевой задачи может быть получено теперь в точности таким же путем, как и в § 2, после того как мы обеспечили существование нижней границы, а следовательно, и минимизирующей последовательности φ^ν. Совершенно таким же путем, как и раньше, мы доказываем, что для такой минимизирующей последовательности выполняется условие

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu]-H[f, \zeta^\nu]\to 0 \tag{13}$$

для всех последовательностей ζ^ν из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих требованию $E[\zeta^\nu]\leqslant M$.

Отсюда вытекают на основании неравенств (11) и соответственно (12) соотношения

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{14}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0; \tag{15}$$

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0. \tag{16}$$

Все эти факты доказываются дословно так же, как и формально им тождественные соотношения (10), (11) и (12) из § 2. Разница только в том, что функции φ уже не должны здесь принадлежать пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, а могут быть любыми функциями из $\mathfrak{D}$. Применяя теперь теоремы 1 и 2 из § 5 дословно так же, как и в § 2 и соответственно в § 3, мы построим предельную функцию u, обладающую следующими свойствами: u принадлежит пространству $\mathfrak{F}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[u]=-f$; при этом

$$E[\varphi^\nu-u]\to 0;\qquad D[\varphi^\nu-u]\to 0;\qquad H[\varphi^\nu-u]\to 0,$$

откуда следует $E[\varphi^\nu]\to E[u]$, $H[f, \varphi^\nu]\to H[f, u]$, так что $E[u]-2H[f, u]=d$. Из вариационного условия $E[\varphi^\nu, \zeta]-H[f, \zeta]\to 0$, имеющего место для всех ζ из $\mathfrak{D}$, следует в силу (14), (15) и теоремы 4 из § 1 соотношение $E[u, \zeta]-H[f, \zeta]=0$. Это соотношение равносильно нашему краевому условию (4) и показывает, таким образом, что функция u является также решением нашей краевой задачи.

§ 7. Задача о собственных значениях для краевых условий второго и третьего рода

Согласно нашим замечаниям в начале предыдущего параграфа мы прежде всего вводим ограничительное условие, которому должна удовлетворять область G.

Требование 3 (Теорема Реллиха). *Область G должна обладать следующим свойством: во всякой последовательности*

функций φ^ν из $\mathfrak{D}$, для которой выражения $E[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ ограничены, существует подпоследовательность, для которой выполняется условие

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Такие области мы будем называть областями, обладающими свойством $\mathfrak{R}$. В § 8 мы докажем, что класс $\mathfrak{R}$ областей, обладающих свойством $\mathfrak{P}$, обладает также свойством $\mathfrak{R}$, так что для этого класса областей имеет место изложенная выше теория краевой задачи и задачи о собственных значениях. Задача о собственных значениях формулируется так:

Задача о собственных значениях IV. Требуется найти такие значения параметра λ и такие функции u, не обращающиеся тождественно в нуль в области G, которые, во-первых, принадлежат к $\mathfrak{F}_\sigma$, т. е. удовлетворяют краевому условию

$$\int_\Gamma \left(p\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)\zeta\, ds = 0 \tag{1}$$

для всех функций ζ из $\mathfrak{D}$, и, во-вторых, являются решениями дифференциального уравнения

$$L[u] + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Первое (наименьшее) собственное значение $\lambda = \lambda_1$ этой задачи и соответствующая собственная функция $u = u_1$ получаются как решения следующей вариационной задачи:

Вариационная задача о собственных значениях IV. *Среди всех функций φ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих дополнительному условию*

$$H[\varphi] = 1, \tag{3}$$

найти ту, для которой выражение

$$E[\varphi] \tag{4}$$

имеет наименьшее значение λ.

Краевых условий мы снова не ставим. Условие (1) получается само собой *как естественное краевое условие.*

Из условия $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$ непосредственно вытекает, что наша задача имеет смысл, т. е. что существует нижняя граница λ написанного выше интеграла (4) при добавочном условии (3). Далее, мы получаем дословно так же, как и в § 3, что для всякой минимизирующей последовательности φ^ν имеет место вариационное условие

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0, \tag{5}$$

причем, однако, здесь это условие должно выполняться для любой последовательности функций ζ^ν из $\mathfrak{D}$ (а не только для последовательностей из подпространства $\mathring{\mathfrak{D}}$), если только $E[\zeta^\nu] \leqslant M$, $H[\zeta^\nu] \leqslant M$

при некотором фиксированном M. Отсюда получается так же, как и в § 3, соотношение

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{6}$$

Мы можем теперь провести решение нашей вариационной задачи точно таким же образом, как и в § 3; в самом деле, в силу требования 3 для функциональной последовательности φ^ν вследствие ограниченности $E[\varphi^\nu]$ имеет место теорема Реллиха. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность, что для нее выполняется условие

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{7}$$

В силу соотношения (6) мы получаем, что имеют место также условия

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{8}$$

Но на основании соотношений (5), (7) и (8) мы заключаем, пользуясь теоремами 1 и 2 из § 5, что существует предельная функция u из $\mathfrak{F}$, которая имеет непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) и для которой выполняются условия

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{9}$$

Рассуждение здесь ведется в точности так же, как и в § 3.

В силу теоремы 4 из § 1 мы получаем отсюда: $E[u] = \lambda$, $H[u] = 1$. Итак, u является решением нашей вариационной задачи о собственных значениях IV. Поэтому имеет место вариационное условие

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0, \tag{10}$$

где ζ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$. Условие (10) впрочем непосредственно вытекает из уравнений (5) и (9).

Из условия (10) мы получим, принимая во внимание дифференциальное уравнение (2), что u удовлетворяет заданному краевому условию (1). Таким образом, задача о собственных значениях решена, поскольку речь идет о построении первой собственной функции $u = u_1$ и первого собственного значения $\lambda = \lambda_1$.

Заметим, что в случае $a = b = q = 0$ это собственное значение равно нулю, а соответствующая собственная функция постоянна.

Следующие собственные значения $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ и соответствующие собственные функции $u_2, u_3, \ldots$ мы получим дословно таким же образом, как и в § 3, п. 3, как решения следующих *вариационных задач*: среди всех функций φ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условию $H[\varphi] = 1$ и добавочным условиям $H[\varphi, u_\nu] = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), найти ту, для которой выражение $E[\varphi]$ имеет наименьшее значение. Решение этой задачи дает в качестве искомого наименьшего значения собственное значение $\lambda = \lambda_n$, а в качестве соответствующей функции φ — собственную функцию $u = u_n$. Как и в § 3, п. 3 мы получаем систему условий ортогональности

$$H[u_n, u_m] = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \qquad E[u_n, u_m] = \begin{cases} \lambda_n & \text{при} \quad n = m \\ 0 & \text{при} \quad n \neq m \end{cases}$$

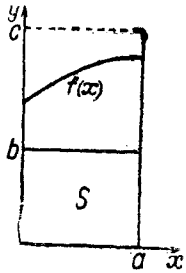
и доказываем, что λ_n неограниченно растет при возрастании n и, наконец, получаем теорему:

Теорема полноты. Для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ с коэффициентами Фурье $c_n = H[\varphi, u_n]$ имеют место условия полноты

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2; \qquad E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2.$$

§ 8. Исследование областей, рассматриваемых при краевых условиях второго и третьего рода

1. Области типа $\mathfrak{N}$. Теоремы существования §§ 6, 7 зависели существенным образом от требования, чтобы для рассматриваемых областей G имели место неравенство Пуанкаре и основное неравенство (12), стр. 277 или, соответственно, теорема Реллиха, причем допустимые функции φ не были подчинены никаким краевым условиям. Мы укажем теперь класс $\mathfrak{N}$ областей, обладающих обоими свойствами $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$, содержащий все обычно встречающиеся области.



Черт. 54.

Назовем нормальной областью всякую область, конгруэнтную области

$$0 < x < a, \quad 0 < y < f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ обозначает функцию, непрерывную и положительную в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. Каждой нормальной области принадлежат два числа b, c такие, что при $0 \leqslant x \leqslant a$ выполняется условие

$$0 < b \leqslant f(x) \leqslant c \tag{2}$$

(a и b здесь обозначают фиксированные числа и не имеют, разумеется, никакого отношения к коэффициентам a, b выражения $L[u]$). Назовем прямоугольник

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{3}$$

или соответствующий конгруэнтный ему прямоугольник нормальной области цоколем S нормальной области.

Определение. Область G называется областью типа $\mathfrak{N}$, если она обладает следующими двумя свойствами:

1. G является суммой конечного числа нормальных областей, которые могут взаимно перекрываться.

2. (Требование связности.) Если задан какой-нибудь квадрат Q, лежащий внутри G, то должно существовать такое разбиение области G на нормальные области, чтобы каждую из этих нормальных областей можно было бы конечным числом шагов связать с квадратом Q с помощью цепочки нормальных областей в следующем смысле: цоколь S каждой области этой цепочки должен содержаться в следующей нормальной области, а цоколь последней нормальной области должен содержаться в заданном квадрате Q.