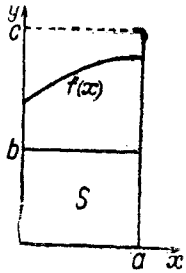
и доказываем, что λ_n неограниченно растет при возрастании n и, наконец, получаем теорему:

Теорема полноты. Для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ с коэффициентами Фурье $c_n = H[\varphi, u_n]$ имеют место условия полноты

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2; \qquad E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2.$$

§ 8. Исследование областей, рассматриваемых при краевых условиях второго и третьего рода

1. Области типа $\mathfrak{N}$. Теоремы существования §§ 6, 7 зависели существенным образом от требования, чтобы для рассматриваемых областей G имели место неравенство Пуанкаре и основное неравенство (12), стр. 277 или, соответственно, теорема Реллиха, причем допустимые функции φ не были подчинены никаким краевым условиям. Мы укажем теперь класс $\mathfrak{N}$ областей, обладающих обоими свойствами $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$, содержащий все обычно встречающиеся области.



Черт. 54.

Назовем нормальной областью всякую область, конгруэнтную области

$$0 < x < a, \quad 0 < y < f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ обозначает функцию, непрерывную и положительную в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. Каждой нормальной области принадлежат два числа b, c такие, что при $0 \leqslant x \leqslant a$ выполняется условие

$$0 < b \leqslant f(x) \leqslant c \tag{2}$$

(a и b здесь обозначают фиксированные числа и не имеют, разумеется, никакого отношения к коэффициентам a, b выражения $L[u]$). Назовем прямоугольник

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{3}$$

или соответствующий конгруэнтный ему прямоугольник нормальной области цоколем S нормальной области.

Определение. Область G называется областью типа $\mathfrak{N}$, если она обладает следующими двумя свойствами:

1. G является суммой конечного числа нормальных областей, которые могут взаимно перекрываться.

2. (Требование связности.) Если задан какой-нибудь квадрат Q, лежащий внутри G, то должно существовать такое разбиение области G на нормальные области, чтобы каждую из этих нормальных областей можно было бы конечным числом шагов связать с квадратом Q с помощью цепочки нормальных областей в следующем смысле: цоколь S каждой области этой цепочки должен содержаться в следующей нормальной области, а цоколь последней нормальной области должен содержаться в заданном квадрате Q.

Задача 1. Доказать, что требование 2 само собой выполняется для всякой связной области, удовлетворяющей требованию 1. (Произвести, если необходимо, соответствующее дальнейшее разбиение первоначальных нормальных областей на более мелкие нормальные области.)

Задача 2. Доказать, что всякая выпуклая область является областью типа $\mathfrak{N}$.

Задача 3. Доказать, что если соединение двух областей типа $\mathfrak{N}$ является связной областью, то оно представляет собой снова область типа $\mathfrak{N}$.

Лемма 1 (Интегральная оценка для нормальных областей). Для всякой нормальной области B с цоколем S и для всякой функции φ из $\mathfrak{D}_B$ имеет место неравенство

$$H_B[\varphi] \leqslant \frac{2ck_1}{bk_0} H_S[\varphi] + 2c^2 \frac{k_1}{p_0} D_B[\varphi], \tag{4}$$

причем интегралы H_B, D_B берутся по нормальной области B, интеграл H_S берется по цоколю S, k_0 и p_0 обозначают нижние границы для k и p, а k_1 — верхнюю границу для k.

Доказательство. Пусть x_1, y_1 — какая-нибудь точка нормальной области B и $0 < y_0 < b$; тогда

$$|\varphi(x_1, y_1)|^2 \leqslant 2|\varphi(x_1, y_0)|^2 + 2|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_1, y_0)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2|\varphi(x_1, y_0)|^2 + 2c \int_0^{f(x_1)} \varphi_y^2(x_1, y)\, dy.$$

Проинтегрировав это неравенство по x_1, y_1 и y_0, заставляя точку x_1, y_1 пробегать всю область B, а y_0 изменяться в промежутке $0 < y_0 < b$, мы получим:

$$\frac{b}{k_1} H_B[\varphi] \leqslant \frac{2c}{k_0} H_S[\varphi] + \frac{2bc^2}{p_0} D_B[\varphi],$$

что и доказывает нашу лемму.

Пусть теперь G представляет собой какую-нибудь область типа $\mathfrak{N}$, состоящую из конечного числа нормальных областей B. Применяя нашу лемму к каждой нормальной области цепочки нормальных областей $B_0, B_1, \ldots, B_\nu, \ldots$, последний цоколь которой содержится в Q, мы получим неравенства вида

$$H_{B_\nu}[\varphi] \leqslant \tau_1^\nu D_{B_\nu}[\varphi] + \tau_2^\nu H_{S_\nu}[\varphi] \leqslant \tau_1^\nu D[\varphi] + \tau_2^\nu H_{B_{\nu+1}}[\varphi],$$

где τ_2^ν и τ_1^ν — некоторые константы. Применяя эти неравенства последовательно ко всем нормальным областям, образующим данную цепочку, мы получим далее неравенство

$$H_{B_0}[\varphi] \leqslant \tau_1 D[\varphi] + \tau_2 H_Q[\varphi]$$

с постоянными τ_1 и τ_2. Суммирование по всем нормальным областям B_0, составляющим область G, дает нам непосредственно следующую лемму:

Лемма 2. Для всякой области G типа $\mathfrak{N}$ и всякого квадрата Q, содержащегося в G, существуют две константы τ и ρ такие, что для любой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство

$$H[\varphi] \leqslant \tau D[\varphi] + \rho H_Q[\varphi]. \tag{5}$$

Из этого неравенства вытекает, как мы сейчас покажем, что рассматриваемые области обладают свойствами $\mathfrak{P}$, потребованными нами в § 6, так что для областей типа $\mathfrak{N}$ разрешима краевая задача § 6. Прежде всего докажем неравентсво Пуанкаре.

Теорема 1. *Для области G типа $\mathfrak{N}$ имеет место неравенство Пуанкаре*

$$H[\varphi] \leqslant \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma D[\varphi] \tag{6}$$

для любой функции φ из $\mathfrak{D}$, причем γ обозначает некоторую константу, зависящую только от области G.

Для доказательства заметим сначала, что согласно § 3, п. 1 для каждого квадрата Q, лежащего в области G, существует такая константа γ_0, что имеет место неравенство Пуанкаре вида

$$H_Q[\psi] \leqslant \gamma_0 D_Q[\psi] \tag{7}$$

для всех функций ψ, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\iint\limits_Q k\psi\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Применяя теперь лемму 2, мы получим неравенство

$$H[\psi] \leqslant (\tau + \rho\gamma_0) D[\psi] \tag{9}$$

при условии, что ψ удовлетворяет условию (8).

Если теперь φ обозначает произвольную функцию из $\mathfrak{D}$, то мы можем всегда определить константу $c = c_0$ так, чтобы выражение $H[\varphi - c]$ имело наименьшее значение. Мы сразу получаем из этого условия минимума, что

$$c_0 = \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy,$$

а отсюда непосредственно вытекает, что для любого значения константы c имеет место неравенство

$$H[\varphi] - \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 = H[\varphi - c_0] \leqslant H[\varphi - c]. \tag{10}$$

С другой стороны, мы можем всегда найти такую константу c, чтобы функция $\psi = \varphi - c$ удовлетворяла условию (8). Применяя тогда к выражению $H[\varphi - c] = H[\psi]$ неравенство (9), мы из неравенства (10) непосредственно получим неравенство Пуанкаре, в котором константа $\gamma = \tau + \rho\gamma_0$.

Чтобы полностью установить свойства $\mathfrak{P}$, мы должны еще доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Если функции a, b и q не обращаются одновременно в нуль во всех точках области G типа $\mathfrak{N}$, то существует такая константа γ, что для всякой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место основное неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$.* Мы исходим из сделанного уже в § 1, п. 2 допущения:

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(\xi^2 + \eta^2), \quad (11)$$

где $\varkappa$ обозначает некоторую положительную константу, не зависящую от положения точки (x, y) в области G. Так как

$$A = \left(\sqrt{p}\xi + \frac{a}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(\sqrt{p}\eta + \frac{b}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(q - \frac{a^2+b^2}{p}\right)\zeta^2, \quad (12)$$

то из определенности формы A, выражаемой условием (11), следует прежде всего, что $q - \frac{a^2+b^2}{p} \geqslant 0$. Отсюда следует, что если в какой-нибудь точке функция q обращается в нуль, то в этой точке a и b также должны равняться нулю. Поэтому в области G должен содержаться такой замкнутый квадрат Q, в котором q существенно положительно. Мы утверждаем, что в этой частичной области выражение $q - \frac{a^2+b^2}{p}$ остается больше некоторого положительного числа $\varkappa_0$. В самом деле, допустим, что это выражение обращается в нуль в некоторой точке квадрата Q; тогда a и b не могут в этой точке одновременно обратиться в нуль. Полагая $\zeta = 1$ и определяя ξ и η из уравнений $\sqrt{p}\xi + \frac{a}{\sqrt{p}} = 0$, $\sqrt{p}\eta + \frac{b}{\sqrt{p}} = 0$, мы получим, что $\xi^2 + \eta^2 > 0$, а из неравенства (11) будет следовать, что $\varkappa = 0$ вопреки предположению. Итак, в области Q существует фиксированная положительная нижняя граница $\varkappa_0$ для выражения $q - \frac{a^2+b^2}{p}$, так что в Q имеет место неравенство

$$A \geqslant \varkappa_0 \zeta^2. \quad (13)$$

Отсюда следует:

$$E[\varphi] \geqslant \frac{\varkappa_0}{k_1} H_Q[\varphi]. \quad (14)$$

Из неравенства (5) леммы 2 и теоремы 1 из § 1 мы теперь заключаем, учитывая неравенство (14), что

$$H[\varphi] \leqslant \left(\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{\rho k_1}{\varkappa_0}\right) E[\varphi], \quad (15)$$

так что теорема 2 доказана.

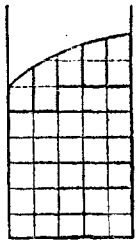
Наконец, для обоснования теории собственных значений докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Области типа $\mathfrak{N}$ обладают свойством $\mathfrak{R}$.* Для этой цели выведем сначала неравенство Фридрихса.

Теорема 4 (Неравенство Фридрихса). *Для всякого положительного ε существует некоторое конечное число координатных функций $\omega_1, \ldots, \omega_N$ из $\mathfrak{H}$ таких, что для любой функции φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство*

$$H[\varphi] \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\omega_\nu, \varphi] + \varepsilon D[\varphi]. \tag{16}$$

Так как из этой теоремы следует теорема Реллиха о выборе сходящейся функциональной подпоследовательности для функций φ из $\mathfrak{D}$ дословным повторением доказательства § 3 (стр. 553), то, доказав теорему 4, мы установим, что области типа $\mathfrak{N}$ обладают свойством $\mathfrak{R}$. Для того, чтобы доказать теорему 4, заметим прежде всего, что мы имеем право ограничиться нормальной областью B. В самом деле, складывая конечное число неравенств, соответствующих нормальным областям B, образующим заданную область G типа $\mathfrak{N}$, мы сразу получим соответствующее неравенство для всей области G, так как каждая точка области G лишь конечное число раз покрывается нормальными областями B, образующими область G. При этом в качестве координатных функций для области G мы должны взять все координатные функции для отдельных нормальных областей, считая, что каждая из этих функций вне соответствующей нормальной области тождественно равна нулю.



Черт. 55.

Доказательство для нормальной области, заданной неравенствами (1) и (2), основывается на применении неравенства Пуанкаре (1а) из § 3, п. 1 к квадрату Q с длиной стороны σ:

$$H_Q[\varphi] \leqslant \frac{1}{k_0\sigma^2}\left[\iint\limits_Q k\varphi\, dx\, dy\right]^2 + \sigma^2 \frac{k_1}{p_0} D[\varphi], \tag{17}$$

причем мы снова используем здесь стремление к нулю коэффициента при $D[\varphi]$ при $\sigma^2 \to 0$. Мы разбиваем прежде всего B на более мелкие квадраты и нормальные области общего вида, выбирая достаточно большое целое число M, полагая $\sigma = \frac{a}{M}$ и проводя прямые:

$$x = \mu\sigma,\ y = \nu\sigma\ (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Таким путем получается разбиение плоскости на квадраты со стороной σ, с помощью которых мы разбиваем нормальную область B на неперекрывающиеся между собой нормальные области K_j, поступая следующим образом: если какой-нибудь квадрат Q со стороной σ вместе со смежным, лежащим выше его квадратом, содержится в B, то мы принимаем этот квадрат за нормальную область K_j; если же содержащийся в B квадрат Q не обладает этим свойством, то мы соединяем квадрат Q вместе с частью вышележащего смежного квадрата, содержащейся в области B, в одну нормальную область K_j, рассматривая квадрат Q как цоколь области K_j.

Заметим теперь, что в силу равномерной непрерывности функции $f(x)$, определяющей нормальную область B, существует величина $\delta(\sigma)$, зависящая только от σ и такая, что $\lim\limits_{\sigma\to 0}\delta(\sigma)=0$ и $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\delta(\sigma)$, если $|x_1-x_2|\leqslant\sigma$. Мы можем поэтому для этих неквадратных более мелких нормальных областей K_j заменить величины, обозначенные в определении п. 1 (стр. 581) через a, b, c величинами σ, σ и $2\sigma+\delta(\sigma)$. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма. Для всех наших нормальных областей K_j и соответствующих квадратных цоколей Q_j (причем для областей K_j первого типа мы считаем, что цоколь Q_j совпадает с областью K_j) имеет место неравенство вида

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{\tau}{\sigma}H_{Q_j}[\varphi]+\rho D_{K_j}[\varphi], \tag{18}$$

причем ρ и τ обозначают величины, зависящие только от σ и стремящиеся вместе с σ к нулю, а φ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$. Если K_j совпадает с Q_j, то при $\tau=\sigma$ и $\rho=0$ наше утверждение тривиально. Для других областей K_j мы получаем на основании леммы 1 (стр. 582):

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{2k_1(2\sigma+\delta)}{\sigma k_0}H_{Q_j}[\varphi]+2(2\sigma+\delta)^2\frac{k_1}{p_0}D_{K_j}[\varphi],$$

что и выражает нашу лемму при $\rho=2(2\sigma+\delta)^2\frac{k_1}{p_0}$, $\tau=2(2\sigma+\delta)\frac{k_1}{k_0}$.

Теперь мы применяем в неравенстве (18) для квадрата Q_j неравенство Пуанкаре (17), что дает нам

$$H_{K_j}[\varphi]\leqslant\frac{\tau}{\sigma^3k_0}\left[\iint\limits_{Q_j}k\varphi\,dx\,dy\right]^2+\left(\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho\right)D_{K_j}[\varphi]. \tag{19}$$

Суммируя по j, мы получаем отсюда:

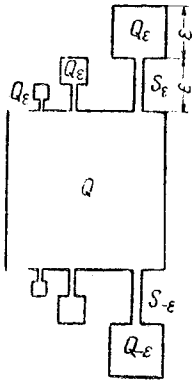
$$H[\varphi]\leqslant\sum_j\frac{\tau}{\sigma^3k_0}\left[\iint\limits_{Q_j}k\varphi\,dx\,dy\right]^2+\left(\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho\right)D[\varphi]; \tag{20}$$

но это неравенство и выражает теорему (4), если положить $\varepsilon=\tau\sigma\frac{k_1}{p_0}+\rho$ (так что ε стремится вместе с σ к нулю) и определить для каждого из рассматриваемых квадратов Q_j функцию ω_j, равную нулю всюду вне Q_j, а внутри Q_j имеющую постоянное значение $\omega_j=\sqrt{\frac{\tau}{\sigma^3k_0}}$.

2. Необходимость ограничительных условий для рассматриваемых областей. Необходимость ограничений, наложенных на рассматриваемые области и сводящихся по существу к характеру связей, существующих между различными частями области, выясняется на следующих двух примерах, в которых наши теоремы не имеют места.

1. Пример области, для которой не имеет места неравенство Пуанкаре, т. е. области, не обладающей свойством $\mathfrak{P}$ (черт. 56).

Построим область G, получающуюся из квадрата Q, заданного условиями $0<x<2$, $-1<y<1$, присоединением к нему бесконечного числа пар симметрично расположенных квадратов Q_ε и $Q_{-\varepsilon}$, где $\varepsilon=\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, и соединяющихся с квадратом Q с помощью неограниченно суживающихся перешейков S_ε и $S_{-\varepsilon}$. Пусть присоединенные квадраты Q_ε и $Q_{-\varepsilon}$, а также соответствующие прямолинейные соединительные перешейки S_ε и $S_{-\varepsilon}$ имеют стороны длины ε. Ширина соединительных перешейков пусть равняется ε^4; пусть, далее, для рассматриваемой бесконечной последовательности квадратов $\varepsilon_\nu \to 0$ и $\sum \varepsilon_\nu < \frac{1}{2}$.



Черт. 56.

Построим последовательность функций φ_ε при $\varepsilon=\varepsilon_\nu$, полагая:

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon} \text{ в } Q_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon} \text{ в } Q_{-\varepsilon},$$

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^2}(y-1) \text{ в } S_\varepsilon,$$

$$\varphi_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon^2}(-y-1) \text{ в } S_{-\varepsilon}$$

и $\varphi_\varepsilon=0$ во всей остальной части области G. При $k=p=1$ мы получаем:

$$H[\varphi_\varepsilon]=2+\frac{2}{3}\varepsilon^3, \qquad D[\varphi_\varepsilon]=2\varepsilon, \qquad \iint\limits_G \varphi_\varepsilon\,dx\,dy=0.$$

Таким образом, не существует такого значения γ, при котором все функции последовательности φ_ε удовлетворяли бы неравенству Пуанкаре.

2. Пример области, не обладающей свойством $\mathfrak{R}$. Пусть область G представляет собой «гребень», состоящий из квадрата R: $0<x<1$, $1<y<2$ и «зубцов»:

$$\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}, \qquad 0<y<1 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассмотрим последовательность функций $\varphi^{(m)}(x, y)$, заданную условиями: $\varphi^{(m)}(x, y)=2^{\frac{m+1}{2}}$ в прямоугольнике $\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}$, $\frac{1}{2}<y<1$ и $\varphi^{(m)}(x, y)=2^{\frac{m+3}{2}}y$ в прямоугольнике $\frac{1}{2^{m+1}}<x<\frac{1}{2^m}$, $0<y<\frac{1}{2}$. Во всей остальной части области G пусть $\varphi^{(m)}(x, y)=0$. Для этой последовательности мы получаем:

$$\frac{1}{2}<H[\varphi^{(m)}]<1; \quad D[\varphi^m]=2. \tag{21}$$

Далее, очевидно, что для всякого квадрата Q, лежащего в G, имеет место соотношение $\iint\limits_Q \varphi^{(m)}\,dx\,dy \to 0$. Отсюда следует, что для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ имеет место соотношение

$$H[\varphi^{(m)}, \zeta] \to 0 \tag{22}$$

(см. доказательство теоремы 1a из § 5). Но это соотношение противоречит теореме Реллиха. В самом деле, допустим, что можно выбрать такую подпоследовательность функций $\varphi^{(m)}$, для которой $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \to 0$; найдем такое большое значение n, чтобы при $m > n$ выполнялось условие $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \leqslant \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. В силу (22) мы можем выбрать m настолько большим, чтобы $|H[\varphi^{(m)}, \varphi^{(n)}]| \leqslant \varepsilon$, но в силу неравенства (21) мы приходим отсюда к выводу: $\varepsilon \geqslant H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \geqslant 1 - 2\varepsilon$, противоречащему предположению, что $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Итак, теорема Реллиха не имеет места.

Задачи. Доказать, что: a) область, рассмотренная в первом примере, не обладает свойством $\mathfrak{R}$, тогда как область примера 2 обладает свойством $\mathfrak{P}$; b) для первой области вторая краевая задача при $a = b = q = 0$ неразрешима, и c) для обеих областей система собственных функций является неполной.

§ 9. Дополнения и задачи

В этом параграфе мы приведем в менее систематической и не всюду законченной форме (частично в форме задач) ряд указаний относительно обобщений и приложений изложенной выше теории.

1. Функция Грина для Δu. В гл. IV мы построили функцию Грина для краевого условия первого рода, рассматривая только области специального вида и требуя, чтобы нулевые краевые значения принимались на границе в точном смысле слова. Теория § 2 дает нам возможность построить функцию Грина для произвольной области G, если формулировать краевое условие в смысле настоящей главы. Рассмотрим, например, случай двух независимых переменных. Пусть x, y — координаты точки P; обозначим через Q заданную особую точку функции Грина и пусть ξ и η — координаты точки Q. Положим $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ и пусть g есть некоторая функция из $\mathfrak{D}$, которая совпадает с функцией $\frac{1}{2\pi}\log r$ в некоторой пограничной полосе области G, т. е., во всяком случае, в тех точках области G, расстояние которых от границы Γ достаточно мало. Для такой функции g рассмотрим теперь вариационную задачу I из § 2, полагая $f = 0$. Если w — решение этой задачи, то функция

$$K(P, Q) = -\frac{1}{2\pi}\log r + w$$

и будет искомой функцией Грина.