Далее, очевидно, что для всякого квадрата Q, лежащего в G, имеет место соотношение $\iint\limits_Q \varphi^{(m)}\,dx\,dy \to 0$. Отсюда следует, что для всякой функции ζ из $\mathfrak{H}$ имеет место соотношение

$$H[\varphi^{(m)}, \zeta] \to 0 \tag{22}$$

(см. доказательство теоремы 1a из § 5). Но это соотношение противоречит теореме Реллиха. В самом деле, допустим, что можно выбрать такую подпоследовательность функций $\varphi^{(m)}$, для которой $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \to 0$; найдем такое большое значение n, чтобы при $m > n$ выполнялось условие $H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \leqslant \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. В силу (22) мы можем выбрать m настолько большим, чтобы $|H[\varphi^{(m)}, \varphi^{(n)}]| \leqslant \varepsilon$, но в силу неравенства (21) мы приходим отсюда к выводу: $\varepsilon \geqslant H[\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}] \geqslant 1 - 2\varepsilon$, противоречащему предположению, что $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Итак, теорема Реллиха не имеет места.

Задачи. Доказать, что: a) область, рассмотренная в первом примере, не обладает свойством $\mathfrak{R}$, тогда как область примера 2 обладает свойством $\mathfrak{P}$; b) для первой области вторая краевая задача при $a = b = q = 0$ неразрешима, и c) для обеих областей система собственных функций является неполной.

§ 9. Дополнения и задачи

В этом параграфе мы приведем в менее систематической и не всюду законченной форме (частично в форме задач) ряд указаний относительно обобщений и приложений изложенной выше теории.

1. Функция Грина для Δu. В гл. IV мы построили функцию Грина для краевого условия первого рода, рассматривая только области специального вида и требуя, чтобы нулевые краевые значения принимались на границе в точном смысле слова. Теория § 2 дает нам возможность построить функцию Грина для произвольной области G, если формулировать краевое условие в смысле настоящей главы. Рассмотрим, например, случай двух независимых переменных. Пусть x, y — координаты точки P; обозначим через Q заданную особую точку функции Грина и пусть ξ и η — координаты точки Q. Положим $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ и пусть g есть некоторая функция из $\mathfrak{D}$, которая совпадает с функцией $\frac{1}{2\pi}\log r$ в некоторой пограничной полосе области G, т. е., во всяком случае, в тех точках области G, расстояние которых от границы Γ достаточно мало. Для такой функции g рассмотрим теперь вариационную задачу I из § 2, полагая $f = 0$. Если w — решение этой задачи, то функция

$$K(P, Q) = -\frac{1}{2\pi}\log r + w$$

и будет искомой функцией Грина.

Эту функцию Грина мы могли бы строить несколько иным методом, представляющим в некоторых случаях известные преимущества. Образуем для этой цели функцию

$$T(r) = -\frac{1}{2\pi}\left[\log\frac{r}{R} + \frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \quad \text{при} \quad r \leqslant R,$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad r \geqslant R.$$

Она обладает при $r=0$ необходимой для функции Грина особенностью; далее, при $r=R$ функция T и ее производная T_r обращаются в нуль, а

$$f = \Delta T = \frac{2}{\pi k^2}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \text{при} \quad r \leqslant R,$$
$$= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad r \geqslant R,$$

так что ΔT непрерывна. Функция $f = \Delta T$ непрерывна в $G+\Gamma$ и имеет в G кусочно-непрерывные производные первого порядка, удовлетворяя, таким образом, требованиям задачи 1 из § 2.

Выберем R настолько малым, чтобы круг K_R с центром Q и радиуса R целиком содержался внутри области G. Рассмотрим теперь вариационную задачу при $p=k=1$ о нахождении минимума выражения $D[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ при условии, что φ лежит в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Согласно § 2 существует решение v этой вариационной задачи, принадлежащее $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\Delta v + f = \Delta v + \Delta T = 0$. Тогда функция $u = v + T$ является, очевидно, искомой функцией Грина. Эта функция не зависит от выбора радиуса R, ибо разность двух функций u, соответствующих двум значениям R_1 и R_2, представляла бы собой регулярное всюду в G решение уравнения Лапласа, принадлежащее к функциональному пространству $\mathring{\mathfrak{D}}$, а такая функция должна на основании § 2 тождественно равняться нулю.

Напомним, что для односвязных областей G построение функции Грина почти непосредственно дает конформное отображение области G на единичный круг.

Только что изложенным методом можно воспользоваться также для построения функции Грина при краевом условии $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Для этой цели выберем в качестве f функцию $f = \Delta T - c$ и определим константу c так, чтобы выполнялось условие $\iint\limits_G f\,dx\,dy = 0$. При этом условии вариационная задача о нахождении минимума выражения $D[\varphi] - 2H[\varphi, f]$, в котором φ уже может пробегать все функциональное пространство $\mathfrak{D}$ (а не только подпространство $\mathring{\mathfrak{D}}$), имеет решение v из $\mathfrak{F}$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $\Delta v + \Delta T - c = 0$. Таким образом, функция $u = v + T + d$, где d — произвольная постоянная, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u = c$. Отсюда следует, что u является искомой функ-

цией Грина. В силу произвольности d мы можем определить u однозначно, подчинив ее дополнительному условию: $\iint\limits_G u\,dx\,dy = 0$.

В независимости построенной таким образом функции от выбора радиуса R мы можем убедиться так:

Разность $w = u_{R_1} - u_{R_2}$ двух таких функций, соответствующих радиусам R_1 и R_2, принадлежит в области G функциональному пространству $\mathfrak{F}$ и удовлетворяет условиям:

$$\Delta w = k, \text{ где } k = k_{R_1} - k_{R_2} = \text{const.}, \iint w\,dx\,dy = 0.$$

На основании формулы Грина для краевых условий второго и третьего рода мы имеем:

$$D[w] = -H[w, \Delta w] = -k \iint\limits_G w\,dx\,dy = 0,$$

откуда следует, что $w = \text{const.}$, а в силу добавочного условия мы отсюда заключаем, что $w = 0$.

2. Особенность типа биполя. В геометрической теории функций, в частности, в теории конформного отображения, большую роль играют гармонические функции, имеющие в заданной точке особенность типа биполя и удовлетворяющие краевому условию второго рода [1]). Если r и ϑ — полярные координаты с началом координат в биполе, то особенность этого типа задается функцией $\frac{1}{r}\cos\vartheta = \frac{x}{r^2}$. По методу п. 1 мы можем такой потенциал биполя охарактеризовать с помощью соответствующей вариационной задачи и доказать его существование, опираясь на теорию, изложенную в предыдущих параграфах. Мы поступаем следующим образом. В качестве функции особенностей $T(r)$ мы принимаем функцию:

$$T(r) = \begin{cases} \left[\frac{R}{r} - 3\frac{r}{R} + 3\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \left(\frac{r}{R}\right)^5\right]\cos\vartheta & \text{при } r \leqslant R, \\ 0, & \text{если } r \geqslant R. \end{cases}$$

Функция

$$f = \Delta T = \begin{cases} \frac{24x}{R^3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r \leqslant R, \\ 0, & \text{если } r \geqslant R, \end{cases}$$

удовлетворяющая, очевидно, условию $\iint\limits_G f\,dx\,dy = 0$, непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные первого порядка. Таким образом, функция f удовлетворяет всем условиям вариационной за-

---

[1]) См. Курант, *Crelles Journ.*, т. 165, стр. 249, а также Курант, Геометрическая теория функций.

дачи III, перечисленным в § 6. Отсюда следует, что вариационная задача о нахождении функции φ из $\mathfrak{D}$, для которой выражение

$$D[\varphi] - 2H[f, \varphi]$$

достигает минимума, разрешима и ее решение w определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Функция $u = w + T$ дает нам искомую потенциальную функцию. В силу замечаний, которые мы сделаем ниже в п. 3, сопряженная с u гармоническая функция v принимает вдоль каждого связного непрерывного куска границы постоянные краевые значения. Чтобы доказать независимость функции u от радиуса R, мы снова рассуждаем следующим образом.

Разность w двух таких функций всюду регулярна в G, принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{D}$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta w = 0$ и краевому условию второго рода. Поэтому в силу формулы Грина имеет место соотношение $D[w] = 0$, так что $w = \text{const.}$, что и требовалось доказать.

Так как R можно сделать сколь угодно малым, то мы можем отсюда получить следующую теорему: наряду с особенностью $\frac{1}{r}\cos\vartheta$ функция u обладает следующим характеристическим свойством: если ζ произвольная функция из $\mathfrak{D}$, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности точки $r = 0$, то имеет место соотношение

$$D[u, \zeta] = 0.$$

3. Поведение на границе решения уравнения $\Delta u = 0$ с двумя независимыми переменными при краевом условии второго рода. Если f принадлежит $\mathfrak{D}$, то в пограничной полосе S, в которой $f = 0$, для решения u уравнения $\Delta u = -f$ существует сопряженная гармоническая функция v.

Тогда имеет место следующая теорема: При втором краевом условии сопряженная гармоническая функция имеет вдоль каждого связного и непрерывного множества граничных точек непрерывные и притом постоянные краевые значения [1]). Для частей границы, состоящих из прямолинейных отрезков и дуг окружностей, имеет место следующая теорема: решение u может быть с помощью зеркального отражения аналитически продолжено через такие части границы; если обозначить через s длину дуги, то вдоль таких частей границы имеет место условие: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial s} = 0$.

4. Непрерывная зависимость от области. Принципиально важный вопрос о непрерывной зависимости решений краевых задач от исходной области решается в случае дифференциального уравнения $\Delta u = -f$ с функцией f, принадлежащей к $\mathfrak{D}$, при втором краевом условии

---

[1]) Доказательство читатель может найти в статье Куранта: *Crelles Journ.*, т. 165, стр. 255, а также в книге: Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, гл. VIII, § 7.

с помощью следующей теоремы: Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ обозначает последовательность областей, монотонно сходящихся к области G, т. е. таких, что G_n содержится в G_{n+1}, а каждая точка из G попадает в G_n при достаточно большом значении индекса n. Если точка O с $r=0$ принадлежит всем областям G_n, а f принадлежит пространству $\mathfrak{D}_G$, то, обозначая через u_n решение краевой задачи для G_n, обращающееся в нуль в точке O и удовлетворяющее второму краевому условию, а через u соответствующее решение для G, мы получаем, что $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ и сходимость равномерна в каждой внутренней подобласти G.

Доказательство[1]). Функции u_n являются решениями вариационной задачи о минимуме выражения $D_{G_n}[\varphi] - 2H_{G_n}[f, \varphi]$, в которой допустимыми являются все функции φ из $\mathfrak{D}_{G_n}$. Обозначим соответствующие минимумы через d_n, минимум для области G — через d и пусть u — соответствующее решение. Начиная с некоторого значения n, вне G_n функция f всюду равна нулю, откуда следует, что для всякой функции φ из $\mathfrak{D}_{G_n}$ имеет место неравенство

$$D_G[\varphi] - 2H_G[f, \varphi] \geqslant D_{G_n}[\varphi] - 2H_{G_n}[f, \varphi].$$

Поэтому $d_n \leqslant d$. С другой стороны, функции $u_n - u_m$ при $m > n$ являются регулярными и ограниченными гармоническими функциями в G_n. Из этого легко заключить (см. гл. IV, стр. 278), что можно выделить такую подпоследовательность u_n, которая сходится в каждой замкнутой подобласти G' области G к предельной функции v так, что первые производные u_n стремятся к соответствующим производным функциям v, и сходимость равномерна. Отсюда следует, что для каждой подобласти G'

$$D_{G'}[v] - 2H_G[f, v] \leqslant \lim_{n\to\infty} \{ D_{G_n}[u_n] - 2H_{G_n}[f, u_n] \} \leqslant d;$$

поэтому, в частности, $D_{G_m}[v] - 2H_{G_m}[f, v] \leqslant d$.

Заставляя m стремиться к бесконечности, мы получим $D_G[v] - 2H_G[f, v] \leqslant d$, так что v лежит в $\mathfrak{D}_G$ и, следовательно, v является допустимой функцией сравнения; отсюда следует, что последнее неравенство совместимо с минимальным свойством числа d только в том случае, когда имеет место равенство. Итак, мы получаем $D_G[v] - 2H_G[f, v] = d$, и, следовательно, $v = u$ является решением вариационной задачи для области G. Далее, из того, что функция u однозначно определена, следует, что не только некоторая подпоследовательность u_n, но и вся последовательность этих функций сходится к функции u.

5. Распространение теории на неограниченные области G. Решение задач о краевых и собственных значениях распространяется

[1]) Курант, Геометрическая теория функций, гл. VIII, § 8.

также и на тот случай, когда область G простирается в бесконечность. При этом должны быть введены следующие ограничения относительно поведения коэффициентов a, b и q в бесконечности. Мы требуем, чтобы имело место неравенство

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqslant \varkappa(r)\zeta^2,$$

где $\varkappa(r)$ обозначает функцию от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, стремящуюся вместе с r к бесконечности. Очевидно, что тогда q также стремится вместе с r к бесконечности.

Тогда снова имеет место основное неравенство $H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]$, а также теорема Реллиха для функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Предлагаем читателю доказать это и построить на основе этих теорем теорию решения задач о краевых и собственных значениях в случае краевого условия первого рода.

Рассмотрение краевых задач и задач о собственных значениях с краевыми условиями второго и третьего рода требует наложения дальнейших ограничений на характер области G с тем, чтобы область G обладала свойствами $\mathfrak{P}$ и соответственно $\mathfrak{R}$, формулированными в §§ 6 и 7. Мы можем, например, потребовать, чтобы пересечение области G со всяким конечным кругом представляло собой область типа $\mathfrak{N}$. Построить при этом условии теорию соответствующих задач о краевых и собственных значениях.

К качестве практически важного примера отметим теорию *гармонического осциллятора*. В этом случае $p = 1$, $a = b = 0$, $q = cr^2$, где c—положительная константа. Областью G является при этом вся плоскость x, y. Дифференциальное уравнение для задачи о собственных значениях имеет вид

$$\Delta\varphi - cr^2\varphi + \lambda\varphi = 0.$$

6. Применение вариационного метода к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Поперечные деформации и колебания пластинок. Рассмотрение задач о краевых и собственных значениях для дифференциального выражения

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$$

(см. т. I, стр. 290) требует введения наряду с пространствами $\mathfrak{H}$, $\mathring{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ еще пространств $\mathfrak{K}$, $\mathring{\mathfrak{K}}$, $\mathring{\mathfrak{K}}$, определенных следующим образом: $\mathfrak{K}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{D}$, непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывные производные второго порядка, для которых существует интеграл

$$K[\varphi] = \iint\limits_G (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)\, dx\, dy;$$

$\mathring{\mathfrak{K}}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{K}$, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе, а $\mathring{\mathfrak{K}}$ состоит из всех функций φ из $\mathfrak{K}$,

которые могут быть аппроксимированы с помощью последовательности функций φ из $\mathring{\mathfrak{K}}$ так, чтобы

$$H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0 \quad \text{и} \quad K[\varphi^\nu - \varphi] \to 0.$$

В вариационной задаче мы можем заменить K выражением

$$K_\mu[\varphi] = (1-\mu)K[\varphi] + \mu H[\Delta\varphi],$$

где μ означает константу, удовлетворяющую условию $0 \leqslant \mu < 1$, причем дифференциальное выражение Эйлера остается без изменения, тогда как в краевые условия, кроме условия первого рода, входит константа μ. [В теории колебаний пластинок μ обозначает коэффициент поперечного расширения[1].] Процесс решения остается для всех значений μ одинаковым (включая $\mu = 1$, если не считать доказательства непрерывного приближения производных к своим краевым значениям в собственном смысле слова, а не в смысле обобщенных краевых условий, формулированных в § 1, п. 4).

Доказать тождество $K_\mu[\varphi] = K[\varphi]$ для всех φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Доказать, далее, основные неравенства $H[\varphi] \leqslant \gamma D[\varphi] \leqslant \gamma_1 K[\varphi]$, где γ и γ_1 — некоторые константы, а также теорему Реллиха для последовательностей функций φ из $\mathring{\mathfrak{K}}$.

Теорема Реллиха заключается в этом случае в том, что из равномерной ограниченности интегралов $K[\varphi^\nu]$, $D[\varphi^\nu]$ и $H[\varphi^\nu]$ вытекает возможность выбора такой подпоследовательности φ^ν, что $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ и $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$. (Заметим, что в этом случае даже вся последовательность φ^ν в целом также сходится равномерно; см. ниже.)

Задачи о краевых и собственных значениях при первом краевом условии могут быть теперь формулированы и решены так же, как и в §§ 2, 3, только с заменой пространства $\mathring{\mathfrak{D}}$ пространством $\mathring{\mathfrak{K}}$.

В процессе доказательства остаются в силе все заключения §§ 2, 3, 5, 6, 7 за исключением теоремы 1 из § 5, требующей особого рассмотрения. Прежде всего, здесь можно доказать, что всякая минимизирующая последовательность сходится равномерно в любой замкнутой подобласти G' области G; отсюда уже непосредственно получаются построение предельной функции и теорема 1а из § 5.

Чтобы доказать, что предельная функция u имеет непрерывные производные первого и второго порядка, необходимо, далее, получить для u интегральное представление вида (13), § 5. Для этой цели нужно применить в качестве аналога функции Ψ_R функцию вида $\eta(r)\frac{1}{8\pi}r^2\log r$, где $\eta(r)$ обозначает функцию, имеющую непрерывные производные достаточно высокого порядка (в данном случае до восьмого порядка включительно) и равную единице при $r < \frac{R}{2}$ и нулю

---

[1]) $\mu = \frac{1}{m}$, где m—коэффициент поперечного сжатия или число Пуассона. (*Прим. перев.*)

при $r > R$. Провести соответствующее изменение в рассуждениях § 5, п. 1 [1]).

Аналогично § 4 получается, что функция u и производные u_x, u_y в точности принимают заданные краевые значения. При этом, однако, рассуждения этого параграфа непосредственно применяются только к самой функции u; что же касается производных u_x, u_y, то в силу того, что существование интеграла $D[\Delta\varphi]$ заранее не предполагается, необходимо опереться на следующее нетрудно доказываемое неравенство:

$$D_{K_h}[\Delta\varphi] \leqslant \operatorname{ch}^2 H_{K_{2h}}[\Delta\Delta\varphi] + \frac{c}{h^2} H_{K_{2h}}[\Delta\varphi],$$

где c — некоторая константа, а K_h и K_{2h} имеют указанное в § 4 значение.

Рассмотрение второго и третьего краевого условия проводится аналогично §§ 6, 7, 8 при любом μ из промежутка $0 \leqslant \mu < 1$.

7. Первая краевая задача и соответствующая задача о собственных значениях в плоской теории упругости. Теория упругих деформаций является другим примером, на который переносится вся теория §§ 1—5 почти без всяких изменений. Только рассуждения § 5, п. 1 должны быть видоизменены, так как здесь речь идет о других особенностях основного решения. Мы ограничимся случаем двух измерений, т. е. случаем касательных деформаций пластинки. Чтобы проще формулировать задачу, целесообразно ввести сокращенные обозначения.

Обозначим точки x_1, x_2 (вместо x, y) просто через x, двойные интегралы $\int\int \ldots dx_1\, dx_2$ обозначим через $\int \ldots dx$. Систему двух функций $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ будем кратко обозначать знаком $\varphi(x) = \{\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)\}$; для производных введем обозначения $\varphi_{\alpha,\beta} = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta}$.

Мы рассматриваем снова открытую область G с границей Γ, а в этой области образуем обе квадратичные формы

$$H[\varphi] = \int_G \{\varphi_1^2 + \varphi_2^2\}\, dx, \quad D[\varphi] = \int_G \{\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2 + \varphi_{2,2}^2\}\, dx.$$

Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$ и $\mathring{\mathfrak{D}}$ определяются так же, как и в § 1. Пусть $\varphi(x)$ обозначает вектор деформации для пластинки, простирающейся

---

[1]) Краевая задача первого рода для колебаний пластинки была впервые решена с помощью вариационных методов Г. Фубини (G. Fubini, Il principio di minimo e i teoremi di existenza... *Rendiconti Palermo*, 1907). После Фубини Ритц исследовал как краевую задачу, так и задачу о собственных значениях [W. Ritz, *Crelles Journal*, т. 135 (1909) и *Annalen Physik* (1909), а также Собрание сочинений]. Относительно данного нами здесь способа изложения также и для других краевых условий, см., прежде всего, К. Фридрихс, *Math. Ann.*, т. 98 (1927), стр. 206.

над областью G; мы допускаем, что $\varphi(x)$ содержится в $\mathfrak{D}$. Вдоль границы Γ пусть деформация задается системой функций $g(x)$; таким образом задается краевое условие, состоящее в том, что $\varphi - g$ должно содержаться в $\mathring{\mathfrak{D}}$. Удвоенная потенциальная энергия деформации φ выражается с помощью двух положительных постоянных упругости a и b в виде интеграла

$$E[\varphi] = \int \{ a(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + a(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + b(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 \} \, dx.$$

Соответствующее интегралу $E(\varphi)$ вариационное выражение для вектор-функции $\varphi(x)$, имеющей кусочно-непрерывные производные второго порядка, равняется с точностью до множителя 2 выражению

$$L[\varphi] = \{ a\Delta\varphi_1 + b(\varphi_{1,11} + \varphi_{2,21}),\ a\Delta\varphi_2 + b(\varphi_{1,12} + \varphi_{2,22}) \}.$$

$L[\varphi]$ выражает плотность силового поля, возникающего в результате деформации, и представляет собой также вектор-функцию.

Имеет место следующая теорема: Для любой заданной вектор-функции g из $\mathfrak{D}$ существует вектор деформации u из $\mathfrak{D}$, имеющий кусочно-непрерывные производные второго порядка, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений $L[u] = 0$ и такой, что вектор-функция $u - g$ содержится в пространстве $\mathring{\mathfrak{D}}$. При этом для всякой вектор-функции $\varphi \neq u$ из $\mathfrak{D}$, для которой $\varphi - g$ содержится в $\mathring{\mathfrak{D}}$, имеет место условие $E[\varphi] > E[u]$.

При доказательстве следует исходить из формулы Грина $E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]$, имеющей место для любой функции ψ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ и любой функции φ из $\mathfrak{D}$, для которой $L[\varphi]$ содержится в $\mathfrak{H}$. Эта формула выводится сначала для функций ψ из $\dot{\mathfrak{D}}$, а затем распространяется на все функции ψ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ процессом замыкания. Далее, точно так же, как и в § 2, для всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место основное неравенство вида

$$H[\varphi] \leqslant \gamma E[\varphi]. \tag{1}$$

Это неравенство выводится так: берем за основу тождество

$$\int_G \{ (\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + (\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2 \} \, dx = 2D(\varphi), \tag{2}$$

выражающее $D[\varphi]$ через интегралы от выражений $(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2$, $(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2$, $(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2$, входящих в $E[\varphi]$, и интеграл от четвертого выражения $(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2$. Обозначая через $2c$ наибольшее из двух чисел a и b, мы получаем на основании тождества (2), что для всех функций φ из $\mathfrak{D}$ имеет место неравенство

$$E[\varphi] \leqslant cD[\varphi]. \tag{3}$$

Далее, мы пользуемся тем, что для всех функций φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место тождество

$$\int_G \{(\varphi_{1,1}-\varphi_{2,2})^2+(\varphi_{1,2}+\varphi_{2,1})^2-(\varphi_{1,1}+\varphi_{2,2})^2-(\varphi_{1,2}-\varphi_{2,1})^2\}\,dx=0. \qquad (4)$$

Мы доказываем тождество (4) сначала для функций φ из $\dot{\mathfrak{D}}$. Левая часть (4) имеет вид:

$$-2\int_G \{\varphi_{1,1}\varphi_{2,2}-\varphi_{1,2}\varphi_{2,1}\}\,dx=-2\int_\Gamma \varphi_1\,d\varphi_2=0,$$

так как подинтегральное выражение является функциональным детерминантом функций φ_1 и φ_2, обращающихся в нуль в некоторой пограничной полосе. Процессом замыкания мы распространяем тождество (4) на все функции φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$. Из тождеств (2), (4) и определения $E[\varphi]$ мы непосредственно получаем для всех φ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ неравенство

$$aD[\varphi]\leqslant E[\varphi], \qquad (5)$$

а отсюда на основании нашего прежнего основного неравенства из § 2 и неравенство (1).

После этого мы рассматриваем минимизирующую последовательность φ^ν вариационной задачи о нахождении минимума выражения $E(\varphi)$ для вектор-функций φ из $\mathfrak{D}$, для которых $\varphi-g$ лежит в $\dot{\mathfrak{D}}$. Так же, как и в § 2, мы получаем, что для всех вектор-функций ζ из $\mathring{\mathfrak{D}}$ имеет место соотношение $E[\varphi^\nu,\zeta]\to 0$, а в силу неравенств (5) и (1) имеют место также соотношения

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \quad H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0.$$

Распространение дальнейших выводов § 2 на рассматриваемую задачу опирается на теорему 2 из § 5, которая в полной мере остается справедливой и здесь, и на теорему 1 из § 5. Последняя может быть в этом случае доказана методом, излагаемым ниже в п. 8.

Провести доказательство, применяя, вместо функции особенностей $\log r$, следующий основной разрешающий тензор:

$$\begin{pmatrix} \alpha\log r-\beta\dfrac{y_1^2}{r^2} & -\beta\dfrac{y_1y_2}{r^2} \\ -\beta\dfrac{y_1y_2}{r^2} & \alpha\log r-\dfrac{\beta y_2^2}{r^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha=\frac{a+b}{a\left(\dfrac{a}{2}+b\right)}, \qquad \beta=\frac{b}{a\left(\dfrac{a}{2}+b\right)},$$

а

$$y_i=x_i-x_i^0, \quad r^2=y_1^2+y_2^2.$$

Построить, далее, теорию собственных значений для дифференциального уравнения $L[u]+\lambda u=0$ при первом краевом условии и доказать, что все результаты § 4 относительно характера приближения решения к краевым значениям остаются здесь в силе.

Следующей задачей является распространение этого метода на случай трех измерений.

8. Другой метод построения предельной функции. Изложенный в § 5 метод построения предельной функции и доказательства теоремы 1а из § 5 опирался, в первую очередь, на то, что нам был известен в явной форме вид характеристической особенности основных решений дифференциального выражения Δu. Опишем здесь вкратце другой метод, формально кажущийся менее простым, но зато применимый и в тех случаях, когда особенность основного решения имеет более сложную природу (ср. пример из теории упругости в предыдущем п. 7). Чтобы уяснить себе сущность этого метода, достаточно его разобрать для случая, рассмотренного в § 5. Существенным здесь является, во-первых, построение предельной функции и, во-вторых, получение для нее интегрального представления, из которого вытекают необходимые свойства дифференцируемости этой функции.

Полагая $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, введем функцию $\eta(r)$, имеющую непрерывные производные до четвертого порядка, равную нулю при $r\geqslant R$ и единице при $r\leqslant\frac{R}{2}$. Пусть, далее,

$$S(x_0, y_0; x, y)=\eta(r)\frac{1}{2\pi}\log r.$$

Эта функция особенностей S, зависящая от параметров x_0, y_0, принадлежит, как функция от x и y, к $\mathfrak{H}$, но не к $\mathfrak{D}$, хотя она всюду, кроме точки $x=x_0$, $y=y_0$, имеет непрерывные производные первого порядка. Однако, выражение ΔS, в котором дифференцирование производится по x и y, является всюду в G дважды непрерывно дифференцируемой функцией.

Обозначим снова через G_R область, образуемую всеми теми точками x_0, y_0, для которых круг $r\leqslant R$ целиком лежит внутри G. Для какой-нибудь точки x_0, y_0 из области G_R функция S обращается вместе со своими производными в нуль в некоторой пограничной полосе. Условимся, далее, обозначать через ζ_{2R} функции, обращающиеся тождественно в нуль вне области G_{2R}. Введем теперь следующие три операции над функцией φ:

$$U[\varphi]=\iint\limits_G S(x, y; x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1)\,dx_1\,dy_1=$$

$$=\iint\limits_G \varphi(x_0, y_0)S(x_0, y_0; x, y)\,dx_0\,dy_0,$$

$$V[\varphi] = \iint\limits_G \{ S_{x_1}(x, y; x_1, y_1)\varphi_{x_1}(x_1, y_1) + $$
$$+ S_{y_1}(x, y; x_1, y_1)\varphi_{y_1}(x_1, y_1) \} \, dx_1 \, dy_1,$$
$$W[\varphi] = \iint\limits_G \Delta_1 S(x, y; x_1, y_1)\varphi(x_1, y_1) \, dx_1 \, dy_1,$$

причем индекс 1 при Δ_1 указывает, что операция Δ относится к переменным x_1 и y_1. С помощью этих операций мы образуем из функций φ, принадлежащих соответственно пространствам $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{H}$ новые функции, определенные в G и принадлежащие пространствам $\mathfrak{D}_{G'}$, $\mathfrak{H}_{G'}$ и $\mathfrak{D}_{G'}$ для каждой замкнутой подобласти G' области G. Это непосредственно очевидно: для операций U и W, если функция φ—непрерывна, а для операции V, если функция φ непрерывно дифференцируема; в результате этих операций получаются непрерывно дифференцируемые и соответственно непрерывные функции. Доказать, что они остаются кусочно-непрерывно дифференцируемыми или соответственно кусочно-непрерывными, если потребовать в отношении φ только кусочную непрерывность или соответственно кусочно-непрерывную дифференцируемость и вывести отсюда формулированное выше утверждение. Если функция φ обращается в нуль вне G_{2R}, то функции $U[\varphi]$, $V[\varphi]$ и $W[\varphi]$ обращаются в нуль вне G_R и принадлежат поэтому пространствам $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{H}}$ и $\dot{\mathfrak{D}}$.

Доказать для наших операций следующие тождества:

1. Если φ содержится в $\mathfrak{H}$, а ζ_{2R} в $\dot{\mathfrak{H}}$, то

$$H_{G_R}\{\zeta_{2R}, U[\varphi]\} = H\{U[\zeta_{2R}], \varphi\}. \tag{1}$$

2. Если φ содержится в $\mathfrak{D}$, а ζ_{2R} в $\dot{\mathfrak{D}}$, то

$$H_{G_R}\{\zeta_{2R}, V[\varphi]\} = D\{U[\zeta_{2R}], \varphi\}. \tag{2}$$

Эти тождества выражают только перемену порядка интегрирования.

3. Для всякой функции φ из $\mathfrak{F}$ имеет место тождество

$$V[\varphi] = -U[\Delta\varphi]\,^{1)}, \tag{3}$$

в чем легко убедиться с помощью интегрирования по частям.

4. Для всех функций φ из $\mathfrak{D}$ имеет место интегральная формула

$$\varphi = -V[\varphi] - W[\varphi]. \tag{4}$$

Эта формула выводится путем интегрирования по области, получающейся исключением круга $r < \varepsilon$, и последующего предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

---

[1]) Это тождество имеет место во всех точках области G_R. (*Прим. перев.*)

Пусть теперь φ^ν—некоторая последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы 1 из § 5. Мы сопоставляем этой последовательности последовательность

$$\varphi^\nu = -U[f - q^*\varphi^\nu] - W[\varphi^\nu]. \tag{5}$$

Доказать, что функции $\bar{\varphi}^\nu$ сходятся в G_R равномерно к непрерывной в G_R предельной функции u. Для этой функции u имеет место тогда

Теорема 1а. Для всякой функции ζ_{2R} из $\mathfrak{H}$

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - u] \to 0. \tag{6}$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] \to 0;$$

чтобы в этом убедиться, заметим, что в силу формулы (4) имеем:

$$\varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu = U[f - q^*\varphi^\nu] - V[\varphi^\nu],$$

откуда на основании соотношений (2) и (1) следует:

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] = H\{U[\zeta_{2R}], f - q^*\varphi^\nu\} - D\{U[\zeta_{2R}], \varphi^\nu\}.$$

Так как $U[\zeta_{2R}]$ принадлежит к $\dot{\mathfrak{D}}$, то в силу условия (10) из § 5 правая часть последнего равенства стремится к нулю, так что имеет место соотношение (6), и теорема 1а доказана.

Полагая в теореме 1а

$$\zeta_{2R} = \Delta S(x_0, y_0; x, y)$$

и соответственно

$$\zeta_{2R} = q^*(x, y) S(x_0, y_0; x, y),$$

мы получим для всякой точки x_0, y_0, лежащей в G_{3R}:

$$W[\varphi^\nu] \to W[u] \quad \text{и} \quad U[q^*\varphi^\nu] \to U[q^* u].$$

Поэтому в силу формулы (5)

$$\varphi^\nu \to U[q^* u - f] - W[u],$$

так что для u получается интегральная формула:

$$u = U[q^* u - f] - W[u]. \tag{7}$$

Вывести теперь из формулы (7) теоремы 1б и 1в, т. е. доказать, что функция u имеет непрерывные производные первого и второго порядка и удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u - q^* u = -f$; доказать также теорему 1 из § 5 [1]).

§ 10. Задача Плато

В этом последнем параграфе мы займемся на основе вариационных методов решением задачи Плато (гл. III, § 7, стр. 198 и § 2, стр. 155).

---

[1]) См. по поводу этого метода Курант, *Math. Ann.*, т. 97.