

В применении к нашему случаю для решения v получается квадратное уравнение

$$\left(1 - \frac{m}{r} v\right)y + m M x = \frac{p}{v} \left(1 - \frac{m}{r} v\right)(v - M). \quad (32)$$

Из двух корней этого уравнения надо выбрать тот, который при $x = 0$ и $y = 0$ принимает значение M . Что такое решение существует, видно непосредственно из уравнения (32), которое при $x = 0$, $y = 0$ переходит в уравнение

$$\left(1 - \frac{m}{r} v\right)(v - M) = 0.$$

Вследствие условия $\frac{r}{m} < M$, значение которого здесь проявляется, оба корня различны при $x = y = 0$. Поэтому дискриминант квадратного уравнения (32) отличен от нуля в начале координат, а, следовательно, и в некоторой окрестности начала координат. Следовательно, наш корень в окрестности начала координат, наверное, допускает разложение в сходящийся степенной ряд по x и y .

И, действительно, нетрудно проверить, что такое решение можно дать в явном виде:

$$v = \frac{1}{2} \frac{M \left(1 - \frac{rx}{p}\right) + \frac{r}{m} \left(1 - \frac{y}{p}\right)}{1 - \frac{y}{p}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\left[M \left(1 - \frac{rx}{p}\right) - \frac{r}{m} \left(1 - \frac{y}{p}\right)\right]^2 - 4 \frac{rM}{m} \left(1 - \frac{y}{p}\right) \frac{rx}{p}}}{1 - \frac{y}{p}}. \quad (33)$$

Таким образом доказана сходимость мажорантных рядов (23), а, следовательно и сходимость первоначальных рядов (17) в некоторой окрестности начала координат. В силу замечания, набранного курсивом на стр. 53, тем самым дано доказательство существования для наших задач Коши.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

§ 1. Дифференциальное уравнение для опорной функции минимальной поверхности

Нелинейное дифференциальное уравнение минимальной поверхности $u(x, y)$ можно написать (ср. т. I, стр. 171 и 181—182) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = 0.$$

Мы дадим здесь отличный от изложенного в § 6, п. 3 метод линеаризации, который приводит к уравнению Лапласа. Эта линеаризация основывается на введении так называемой опорной функции. Выражения

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, & \beta &= \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \\ \gamma &= -\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

очевидно, дают направляющие косинусы нормали в точке (x, y, u) поверхности. Дифференциальное уравнение можно переписать также в виде

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0,$$

выражающем тот факт, что

$$\alpha dy - \beta dx$$

есть полный дифференциал. Введем теперь величины α и β в качестве координат на поверхности и пусть x, y, u выражены как функции от α, β ¹). Для минимальной поверхности выражение

$$x d\beta - y d\alpha = d(\beta x - \alpha y) - (\beta dx - \alpha dy)$$

должно быть полным дифференциалом, т. е. должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0. \quad (2)$$

Касательная плоскость к поверхности в точке с направлением нормали α, β, γ имеет уравнение

$$(X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (U-u)\gamma = 0$$

или

$$\alpha X + \beta Y + \gamma U - \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad (3)$$

где

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha x + \beta y + \gamma u, \quad (4)$$

¹⁾ Для того, чтобы это было возможно, достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \neq 0$. Но этот функциональный определитель равен здесь

$\frac{u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2}{V1+u_x^2+u_y^2}$. Если $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0$ в некоторой области, то указанный

выбор величин α, β в качестве координат точки на поверхности невозможен, что понятно, так как последнее уравнение есть дифференциальное уравнение развертывающихся поверхностей.

Таким образом, форма дифференциального уравнения минимальных поверхностей, данная в этом параграфе, не охватывает развертывающихся минимальных поверхностей. Но развертывающиеся поверхности — это по-

причем надо себе представить, что вместо координат точки касания $x, y, u(x, y)$ подставлены их выражения через α, β, γ из пропорций $\frac{u}{u_x} = \frac{\beta}{u_y} = \frac{\gamma}{-1}$.

$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ есть так называемая опорная функция поверхности, т. е. расстояние от начала координат до касательной плоскости с направлением нормали α, β, γ . Это — однородная функция первой степени. В самом деле, выражая x, y через α, β, γ из пропорции $\frac{u}{u_x} = \frac{\beta}{u_y} = \frac{\gamma}{-1}$, мы представляем $x, y, u(x, y)$ в виде функций от отношений величин α, β, γ . Таким образом, $x, y, u(x, y)$ становятся однородными функциями нулевого измерения, а выражение $\alpha x + \beta y + \gamma u$ будет тогда, очевидно, однородной функцией первой степени от α, β, γ .

Далее имеем:

$$\varphi_\alpha = x + \alpha \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \gamma \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \alpha} + u_y \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right),$$

$$\varphi_\beta = x + \alpha \frac{\partial x}{\partial \beta} + y + \beta \frac{\partial y}{\partial \beta} + \gamma \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \beta} + u_y \frac{\partial y}{\partial \beta} \right),$$

$$\varphi_\gamma = x + \alpha \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \beta \frac{\partial y}{\partial \gamma} + u + \gamma \left(u_x \frac{\partial x}{\partial \gamma} + u_y \frac{\partial y}{\partial \gamma} \right),$$

или, так как $\gamma u_x = -\alpha$, $\gamma u_y = -\beta$,

$$\varphi_\alpha = x, \quad \varphi_\beta = y, \quad \varphi_\gamma = u^1.$$

Отсюда вытекает (подставляя $\gamma = -\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$):

$$x_\alpha = \varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_{\alpha\gamma} \frac{\alpha}{\gamma}, \quad y_\beta = \varphi_{\beta\beta} - \varphi_{\beta\gamma} \frac{\beta}{\gamma},$$

ибо $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{\gamma}$. С помощью этих соотношений дифференциальное уравнение минимальной поверхности (2) принимает вид

$$\varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} - \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_{\alpha\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} \varphi_{\beta\gamma} = 0;$$

так как φ есть однородная функция первого измерения, то φ_γ — однородная функция нулевого измерения, а, следовательно,

$$\alpha \varphi_{\alpha\gamma} + \beta \varphi_{\beta\gamma} = -\gamma \varphi_{\gamma\gamma},$$

и для φ получается уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = \varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma} = 0. \tag{5}$$

верхности нулевой гауссовой кривизны, а минимальные поверхности характеризуются равенством нулю средней кривизны. Следовательно, из данной здесь формы уравнения минимальных поверхностей изымается лишь плоскость. Случай, когда $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ на некоторых особых линиях или в некоторых точках, подлежит особому рассмотрению. (Прим. перев.)

¹) Ср. гл. I, § 6.

Это уравнение, которое пока доказано лишь в предположении $\gamma = -\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, вследствие однородности левой части справедливо при любых α, β, γ .

§ 2. Система дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение высшего порядка

В гл. I, § 2 для случая двух независимых переменных мы посредством простого подсчета сделали вероятным предположение, что систему дифференциальных уравнений в частных производных с помощью процессов дифференцирования и исключения невозможно, вообще говоря, привести к одному дифференциальному уравнению высшего порядка для одной единственной функции. Мы здесь проведем этот подсчет несколько точнее и для более общего случая.

Пусть дана система m дифференциальных уравнений

$$F_i(x_1, \dots, x_n; u, u_1, \dots, u_{m-1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (1)$$

для функций $u, u_1, \dots, u_{m-1}(x_1, \dots, x_n)$.

Дифференцируя каждое из уравнений (1) повторно по переменным x_1, \dots, x_n , получаем новые уравнения для функций u, u_1, \dots, u_{m-1} , в которых, однако, появляются производные порядка выше первого. Если, например, выполнить все возможные дифференцирования до порядка x , то из уравнения (1) получится система из $m \binom{n+x}{x}$ дифференциальных уравнений¹⁾, в которой надо (в общем случае) ожидать появления всех производных функций u, u_1, \dots, u_{m-1} до $(x+1)$ -го порядка включительно.

В частности, число производных от функций u_1, \dots, u_{m-1} , начиная с порядка нуль до порядка $x+1$, т. е. общее число величин, подлежащих исключению из новой системы, есть

$$(m-1) \binom{n+x+1}{x+1},$$

так что исключение будет вообще возможно лишь в том случае, если разность

$$\begin{aligned} D(x) &= m \binom{n+x}{x} - (m-1) \binom{n+x+1}{x+1} = \\ &= \frac{(n+x)!}{n!(x+1)!} (x+1 - n(m-1)) \end{aligned} \quad (2)$$

больше или равна 1.

¹⁾ Функция от n переменных имеет $\binom{n+x-1}{x}$ производных порядка x ; следовательно, общее число производных от порядка нуль до порядка x включительно есть

$$\sum_{v=0}^x \binom{n+v-1}{v} = \binom{n+x}{x}.$$