Это уравнение, которое пока доказано лишь в предположении $\gamma = -\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$, вследствие однородности левой части справедливо при любых α, β, γ.

§ 2. Система дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение высшего порядка

В гл. I, § 2 для случая двух независимых переменных мы посредством простого подсчета сделали вероятным предположение, что систему дифференциальных уравнений в частных производных с помощью процессов дифференцирования и исключения невозможно, вообще говоря, привести к одному дифференциальному уравнению высшего порядка для одной единственной функции. Мы здесь проведем этот подсчет несколько точнее и для более общего случая.

Пусть дана система m дифференциальных уравнений

$$F_i\left(x_1, \ldots, x_n; u, u_1, \ldots, u_{m-1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}\right) = 0 \; (i=1, \ldots, m) \quad (1)$$

для функций $u, u_1, \ldots, u_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)$.

Дифференцируя каждое из уравнений (1) повторно по переменным $x_1, \ldots, x_n$, получаем новые уравнения для функций $u, u_1, \ldots, u_{m-1}$, в которых, однако, появляются производные порядка выше первого. Если, например, выполнить все возможные дифференцирования до порядка $\varkappa$, то из уравнения (1) получится система из $m\binom{n+\varkappa}{\varkappa}$ дифференциальных уравнений[1]), в которой надо (в общем случае) ожидать появления всех производных функций $u, u_1, \ldots, u_{m-1}$ до $(\varkappa+1)$-го порядка включительно.

В частности, число производных от функций $u_1, \ldots, u_{m-1}$, начиная с порядка нуль до порядка $\varkappa+1$, т. е. общее число величин, подлежащих исключению из новой системы, есть

$$(m-1)\binom{n+\varkappa+1}{\varkappa+1},$$

так что исключение будет вообще возможно лишь в том случае, если разность

$$D(\varkappa) = m\binom{n+\varkappa}{\varkappa} - (m-1)\binom{n+\varkappa+1}{\varkappa+1} = \\ = \frac{(n+\varkappa)!}{n!\,(\varkappa+1)!}(\varkappa+1-n(m-1)) \quad (2)$$

больше или равна 1.

---

[1]) Функция от n переменных имеет $\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}$ производных порядка $\varkappa$; следовательно, общее число производных от порядка нуль до порядка $\varkappa$ включительно есть

$$\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{n+\nu-1}{\nu} = \binom{n+\varkappa}{\varkappa}.$$

Описанный процесс приводит к одному единственному уравнению для одной функции u лишь при том условии, если $D(\varkappa)$ принимает для некоторого определенного значения $\varkappa$ значение 1. Однако, нетрудно убедиться, что при $m>1$ это невозможно, если исключить случай $n=1$.

Прежде всего, из равенства (2) вытекает, что $D(\varkappa)$ обращается в нуль при $\varkappa=n(m-1)-1$, так что во всяком случае возможно выразить функции $u_1, \ldots, u_{m-1}$ и их производные до порядка $n(m-1)$ через функцию u и ее производные до этого порядка.

Имеем:

$$D(\varkappa+1)-D(\varkappa)=\frac{(n+\varkappa)!}{(n-1)!\,(\varkappa+2)!}(\varkappa+2-(m-1)(n-1)),$$

а, следовательно, $D(\varkappa)$ монотонно убывает при $\varkappa<(m-1)(n-1)-2$ и монотонно возрастает при $\varkappa$, большем этого числа, а тем более при $\varkappa\geqslant n(m-1)-1$. Таким образом, $D(\varkappa)$ сначала убывает, начиная с $D(0)<0$ до некоторого наименьшего отрицательного значения, затем начинает монотонно возрастать; при $\varkappa=n(m-1)-1$, $D(\varkappa)=0$, а, следовательно, наименьшее положительное значение $D(\varkappa)$ принимает при $\varkappa=n(m-1)$.

Но это значение

$$D(n(m-1))=\binom{nm}{n}\frac{1}{n(m-1)+1}=\frac{nm}{n}\,\frac{nm-1}{n-1}\,\frac{nm-2}{n-2}\cdots\frac{nm-(n-2)}{2},$$

определяющее в общем случае ожидаемое наименьшее число дифференциальных уравнений высшего порядка, которые получаются для u, при $n>1$ и $m>1$ всегда больше единицы.

В проведенных выше рассуждениях, носящих характер чистого подсчета, мы не обращали внимания на то обстоятельство, что система, получающаяся из уравнения (1) в результате процессов дифференцирования, весьма специального вида, так что невозможность исключения лишь сделана вероятной, но не доказана. Поэтому в дополнение к опровергающему примеру гл. I, § 2, п. 1 мы здесь установим точнее, хотя бы для частного случая, условия, необходимые и достаточные для возможности приведения к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

§ 3. Система двух дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение второго порядка

Пример дифференциальных уравнений Коши-Римана

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

показывает, что в специальных случаях может иметь место эквивалентность системы дифференциальных уравнений одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной лишь функции: