Описанный процесс приводит к одному единственному уравнению для одной функции u лишь при том условии, если $D(\varkappa)$ принимает для некоторого определенного значения $\varkappa$ значение 1. Однако, нетрудно убедиться, что при $m>1$ это невозможно, если исключить случай $n=1$.

Прежде всего, из равенства (2) вытекает, что $D(\varkappa)$ обращается в нуль при $\varkappa=n(m-1)-1$, так что во всяком случае возможно выразить функции $u_1, \ldots, u_{m-1}$ и их производные до порядка $n(m-1)$ через функцию u и ее производные до этого порядка.

Имеем:

$$D(\varkappa+1)-D(\varkappa)=\frac{(n+\varkappa)!}{(n-1)!\,(\varkappa+2)!}(\varkappa+2-(m-1)(n-1)),$$

а, следовательно, $D(\varkappa)$ монотонно убывает при $\varkappa<(m-1)(n-1)-2$ и монотонно возрастает при $\varkappa$, большем этого числа, а тем более при $\varkappa\geqslant n(m-1)-1$. Таким образом, $D(\varkappa)$ сначала убывает, начиная с $D(0)<0$ до некоторого наименьшего отрицательного значения, затем начинает монотонно возрастать; при $\varkappa=n(m-1)-1$, $D(\varkappa)=0$, а, следовательно, наименьшее положительное значение $D(\varkappa)$ принимает при $\varkappa=n(m-1)$.

Но это значение

$$D(n(m-1))=\binom{nm}{n}\frac{1}{n(m-1)+1}=\frac{nm}{n}\,\frac{nm-1}{n-1}\,\frac{nm-2}{n-2}\cdots\frac{nm-(n-2)}{2},$$

определяющее в общем случае ожидаемое наименьшее число дифференциальных уравнений высшего порядка, которые получаются для u, при $n>1$ и $m>1$ всегда больше единицы.

В проведенных выше рассуждениях, носящих характер чистого подсчета, мы не обращали внимания на то обстоятельство, что система, получающаяся из уравнения (1) в результате процессов дифференцирования, весьма специального вида, так что невозможность исключения лишь сделана вероятной, но не доказана. Поэтому в дополнение к опровергающему примеру гл. I, § 2, п. 1 мы здесь установим точнее, хотя бы для частного случая, условия, необходимые и достаточные для возможности приведения к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

§ 3. Система двух дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение второго порядка

Пример дифференциальных уравнений Коши-Римана

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

показывает, что в специальных случаях может иметь место эквивалентность системы дифференциальных уравнений одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной лишь функции:

всякое решение u уравнений (1) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, и для любой такой гармонической функции можно найти сопряженную гармоническую функцию v, так что u и v удовлетворяют системе (1).

Общее, мы ставим вопрос о том, при каких условиях система

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \\ \Psi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка $L[u] = 0$ для одной лишь функции u в том смысле, *чтобы всякое решение u системы* (2) *удовлетворяло уравнению $L[u] = 0$ и чтобы, обратно, для всякого решения u уравнения $L[u] = 0$ можно было найти такую «сопряженную» функцию v, чтобы u и v удовлетворяли системе* (2).

Сначала рассмотрим линейные дифференциальные уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} v_x = a(x, y)v + A(x, y, u, u_x, u_y), \\ v_y = b(x, y)v + B(x, y, u, u_x, u_y), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где A и B — линейные функции от u, u_x, u_y, коэффициенты которых, а также $a(x, y)$ и $b(x, y)$ — аналитические функции от x и y в окрестности начала координат; кроме того, пусть коэффициент при u_x в B отличен от нуля.

Из гл. I, § 7 вытекает, что система (3) при заданных аналитических начальных значениях $u(0, y)$ и $v(0, y)$ в окрестности начала координат имеет *однозначно определенные аналитические решения* $u(x, y)$ и $v(x, y)$. С другой стороны, вместо $u(0, y)$ и $v(0, y)$ можно задать произвольно $u(0, y) = \varphi(y)$ и $u_x(0, y) = \psi(y)$, однако *этими начальными условиями решения u и v системы не определяются однозначно.* Действительно, из второго уравнения (3) получается для функции $v(0, y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$v_y(0, y) = b(0, y)v(0, y) + B(0, y, \varphi(y), \psi(y), \varphi'(y)),$$

следовательно, однопараметрическое многообразие начальных значений $v(0, y)$, а, следовательно, и однопараметрическое семейство решений $v(x, y)$ системы (3).

После этих предварительных замечаний докажем теперь следующую теорему.

Система (3) *эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной только функции u в том и только в том случае, если выполняется условие*

$$a_y = b_x.$$

Для доказательства дифференцируем уравнения (3), первое по y, второе по x, и вычитая из первого полученного уравнения другое, имеем:

$$(a_y - b_x)v = L[u], \tag{4}$$

где $L[u]$ — линейное дифференциальное выражение второго порядка с одной лишь функцией u.

И вот, если $a_y - b_x = 0$, то $L[u] = 0$, что доказывает первую часть теоремы.

Если же при $x = 0$, а, следовательно, и в некоторой окрестности оси y $a_y - b_x \neq 0$, то из уравнения (4) вытекает

$$v = \frac{L[u]}{a_y - b_x}; \tag{5}$$

следовательно, функция v определяется однозначно функцией u.

Теперь, если бы функция u удовлетворяла одному дифференциальному уравнению второго порядка, то u, а, следовательно, на основании (5) и v однозначно определялись бы начальными заданиями $u(0, y)$ и $u_x(0, y)$, что противоречит результату, полученному нами ранее [1]).

Наконец, для того, чтобы исследовать общий случай, предположим, что система (2) может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F(x, y, u, v, p, q), \\ v_y &= G(x, y, u, v, p, q), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где F и G — аналитические функции своих аргументов и, кроме того, $\frac{\partial G}{\partial p} \neq 0$. Сравнивая выражения для v_{xy}, получаемые из обоих уравнений, имеем:

$$G_p u_{xx} + (G_q - F_p) u_{xy} - F_q u_{yy} + G_u p - F_u q + G_x - F_y + \\ + G_v F - F_v G = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка будет таковым для одной только функции u, если выражения

$$\frac{F_q}{G_p}, \quad \frac{G_q - F_p}{G_p}, \quad \frac{G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G}{G_p} \tag{7}$$

не зависят от v.

Точно так же, как в линейном случае, можно показать, обратно, что дифференциальное уравнение второго порядка для u, эквивалентное системе (6), может существовать только лишь при выполнении условий (7).

§ 4. Параметрическое представление отображений, сохраняющих площадь [2])

Недоопределенное дифференциальное уравнение

$$u_x v_y - v_x u_y = 1 \tag{1}$$

---

[1]) Заметим, что доказанная выше теорема справедлива и в том случае, если A и B не являются линейными функциями от u, u_x, u_y. Если коэффициенты a и b также зависят еще от u, $u_x = p$, $u_y = q$, то вместо условия $a_y = b_x$ возможность приведения связана с существованием равенств

$$a_q = b_p = 0, \qquad a_p = b_q, \qquad a_y + a_u q = b_x + b_u p.$$

[2]) Ср. G. Scheffers, *Math. Zeitschr.*, т. 2, стр. 181.